

УДК 533.6.011.5 : 532.529.5

## ОБТЕКАНИЕ КЛИНА СВЕРХЗВУКОВЫМ ДВУХФАЗНЫМ ПОТОКОМ

Г. А. САЛТАНОВ, Р. А. ТКАЛЕНКО

(Москва)

С обтеканием тел сверхзвуковым двухфазным потоком приходится сталкиваться при расчете течения около лопаток последних ступеней конденсационных турбин, при изучении движения самолетов в условиях облачности и т. д. В последнем случае наряду с эрозией передних кромок крыловых профилей имеет место также изменение волновой структуры и интерференционной картины обтекания самолета, что может привести к нерасчетным режимам движения.

Сверхзвуковое течение двухфазной смеси около клина без учета влияния частиц на поток изучалось в работах [1-3]. В [4] в такой же упрощенной постановке исследовалось взаимодействие частиц с поверхностью клина, причем учитывалось отражение частиц от стенки. Экспериментальное изучение обтекания клина смесью воздуха и частиц окиси алюминия было проведено Морганталером [5]. В работе [6] теоретически исследовалось сверхзвуковое двухфазное течение около тонких плоских и осесимметричных тел. В частности, для обтекания клина были найдены в замкнутом виде форма ударной волны, форма линий тока газа и частиц, распределение всех параметров вдоль поверхности клина. Ниже на основании уравнений работы [7] и метода характеристик, развитого для течений смеси газа с инородными частицами в соплах [8, 9], проведено исследование обтекания клина сверхзвуковым двухфазным потоком.

1. Рассмотрим двумерное стационарное сверхзвуковое течение смеси газа и частиц около клина. Будем считать, что газ термически и калорически совершенный, а вязкость и теплопроводность проявляются только при взаимодействии фаз. Частицы имеют сферическую форму, объемом, занимаемым ими, пренебрежем. Поместим начало декартовой системы координат в вершину клина, ось  $x$  направим параллельно скорости набегающего потока, ось  $y$  — в перпендикулярном направлении (фиг. 1). Уравнения, описывающие течение между поверхностью клина и ударной волной, имеют вид [7]

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\rho_s}{\rho} f_x &= 0 \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho_s}{\rho} f_y &= 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \rho_s u_s}{\partial x} + \frac{\partial \rho_s v_s}{\partial y} &= 0 \\ u \frac{\partial i}{\partial x} + v \frac{\partial i}{\partial y} - \frac{u}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{v}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\rho_s}{\rho} [(V_s - V)f + q] &= 0 \\ u_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} = f_x, \quad u_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} = f_y, \\ u_s \frac{\partial e_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial e_s}{\partial y} &= q \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $u$  и  $v$  — проекции вектора скорости газа  $V$  на оси координат,  $i$  — удельная энтальпия газа,  $e_s$  — удельная внутренняя энергия частиц, индекс  $s$  приписан параметрам «газа»

частиц. Все предположения, использованные при выводе уравнений (1.1), должны, конечно, выполняться и в данной работе.

Вектор  $f$  и величина  $q$ , характеризующие взаимодействие между частицами и газом, представлялись в виде

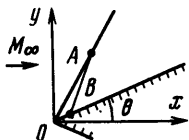
$$f = a(V - V_s), \quad g = b(T - T_s) \quad (1.2)$$

$$a = \frac{9}{2} \frac{\mu}{\rho^0 r^2}, \quad b = \frac{3\lambda}{\rho^0 r^2}$$

где  $r$  — радиус частицы,  $\mu$  и  $\lambda$  — коэффициенты вязкости и теплопроводности газа,  $\rho^0$  — плотность вещества частиц. Формулы (1.2) соответствуют стоксовскому закону сопротивления для частиц.

Набегающий поток представлял собой смесь воздуха и капель воды. В качестве граничного условия на стенке использовалось условие непротекания

$$v = u \operatorname{tg} \theta \quad \text{при } y = x \operatorname{tg} \theta$$



Фиг. 1

( $\theta$  — половина угла при вершине клина).

Пусть индекс  $\infty$  относится к параметрам набегающего потока, а индекс 1 — к параметрам непосредственно за фронтом ударной волны. Обозначим через  $\kappa$  показатель адиабаты газа,  $M$  — число Маха,  $\beta$  — угол наклона фронта ударной волны к оси  $x$ . Согласно экспериментальным данным [3] изменением параметров частиц через фронт ударной волны, толщина которого составляет несколько длин свободного пробега молекул, можно пренебречь. Тогда условия при переходе двухфазной смеси через фронт ударной волны запишутся

$$p_1 = p_\infty [1 + 2\kappa(\kappa + 1)^{-1}(M_\infty^2 \sin^2 \beta - 1)]$$

$$\rho_1 = \rho_\infty \frac{(\kappa + 1)M_\infty^2 \sin^2 \beta}{(\kappa - 1)M_\infty^2 \sin^2 \beta + 2}$$

$$u_1 = u_\infty (1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \alpha)^{-1}, \quad v_1 = u_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_\infty^2 \sin^2 \beta - 1}{M_\infty^2 (\kappa + \cos 2\beta) + 2} 2 \operatorname{ctg} \beta \quad (1.3)$$

$$u_{s1} = u_{s\infty}, \quad v_{s1} = 0, \quad \rho_{s1} = \rho_{s\infty}$$

В дальнейшем будет исследовано изменение параметров потока вдоль линий тока газа и частиц. Обозначим через  $\psi$  и  $\psi_s$  функции тока, которые определяются уравнениями

$$d\psi = \rho u dy - \rho v dx, \quad d\psi_s = \rho_s u_s dy - \rho_s v_s dx$$

Как показано в работах [7, 9], система уравнений (1.1) при  $w^2 = u^2 + v^2 > a^2$ , где  $a$  — скорость звука в газе, имеет четыре семейства характеристик (два семейства линий Маха, линии тока газа и частиц). Первые два семейства характеристик определяются следующим образом:

$$dy = \frac{uv \pm Ba^2}{u^2 - a^2} dx$$

а соотношения на них имеют вид

$$d\psi = \rho a^2 \frac{v \pm Bu}{u^2 - a^2} dx$$

$$d\psi_s = \pm \rho_s u_s \frac{1 + VV_s \pm B(V - V_s)}{B \mp V} dx \quad (1.4)$$

$$\frac{\rho u^2}{B} dV \pm dP \pm \Phi dx = 0, \quad V = \frac{v}{u}, \quad B^2 = \frac{w^2}{a^2} - 1$$

$$\Phi = \frac{\rho w^2}{B(B \mp V)} \left\{ \frac{\rho_s B}{\rho w^2} [(B \mp V)f_x \pm (1 \pm BV)f_v] - \right.$$

$$\left. - \frac{\rho_s}{\rho u} \left[ \frac{1}{a^2} fV - \frac{\kappa - 1}{\kappa T} (V_s - V)f - \frac{\kappa - 1}{\kappa T} q \right] \right\}$$

Здесь  $T$  — температура газа, верхний (нижний) знак относится к характеристикам первого (второго) семейства.

Следующие два семейства характеристик описывают линии тока газа и частиц, и характеристические соотношения на них могут быть получены из системы уравнений (1.1) [8].

Все параметры в уравнениях (1.1) — (1.4) удобно считать безразмерными. Пусть  $L$  — некоторая характерная длина (рассматриваемая задача при однофазном течении не имеет характерной длины, однако при двухфазном течении в качестве этого размера можно взять длину зоны релаксации для рассматриваемого релаксационного процесса). Приведение к безразмерному виду достигается отнесением параметров размерности скорости к  $w_\infty$ , плотности — к  $\rho_\infty$ , давления — к  $\rho_\infty w_\infty^2$ , температуры — к  $R^{-1} w_\infty^2$ , где  $R$  — универсальная газовая постоянная, и т. д. Следует помнить, что при таком методе обезразмеривания скорость в набегающем потоке равна единице, а давление и температура равны  $(\kappa M_\infty^2)^{-1}$ .

2. Задача решалась методом характеристик. Уравнение неразрывности для газа и одно уравнение сохранения количества движения заменялись соотношениями на характеристиках первого и второго семейств. Остальные уравнения записывались вдоль линий тока газа. Все уравнения для частиц, кроме уравнения неразрывности, записывались вдоль линий тока частиц. Плотность частиц  $\rho_s$  (или их концентрация) находилась в результате интегрирования уравнения неразрывности для частиц по замкнутому контуру, огибающему рассматриваемую элементарную ячейку. Элементарные ячейки внутри потока и на поверхности клина были такими же, как в работе [9]. Ячейка вблизи фронта ударной волны рассчитывалась по неявной конечно-разностной схеме, причем наклон фронта ударной волны находился итерационным методом Ньютона. Для сходимости достаточно было двух-трех итераций.

Величина отрезка  $AB$  выбирается таким образом, чтобы течение вблизи носика клина (в области  $OAB$ , фиг. 1) было замороженным. В этом случае все параметры газа на отрезке  $AB$  находились из условий на скачке при заданном угле наклона скорости  $\theta$  к оси  $x$  за ним, а параметры «газа» частиц на этом отрезке совпадали со своими значениями в набегающем потоке. Отрезок  $AB$  разбивался на 40 равных частей, после чего начинался счет. Длительность расчета одного варианта на ЭВМ М-20 составляла 10—15 мин.

Предполагается, что теплообмен между газом и частицами отсутствует и зона релаксации определяется только механическим взаимодействием фаз. Расчет проводился для различных значений чисел Маха набегающего потока ( $1.5 \leq M_\infty \leq 5$ ), полууглов раствора клина ( $5^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ ), коэффициента скольжения  $v_\infty = u_{s_\infty} / u_\infty$  ( $0.1 \leq v_\infty \leq 1$ ), размеров частиц ( $10^{-7} \text{ м} \leq r \leq 10^{-5} \text{ м}$ ) и концентрации газа  $m = \rho_\infty / (\rho_{s_\infty} + \rho_\infty)$  ( $0.4 \leq m \leq 1$ ). Термодинамические параметры двухфазной смеси перед клином принимались следующими:  $p_\infty = 1,0 \text{ бар}$ ,  $T_{s_\infty} = T_\infty = 300^\circ \text{ К}$ .

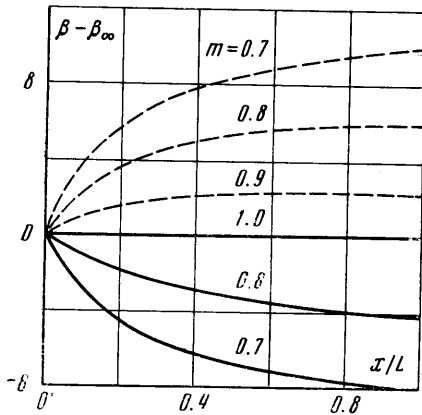
Метод характеристик в том виде, в каком он рассматривается в данной работе, удовлетворителен в тех случаях, когда в потоке протекает или

только один релаксационный процесс (динамическое скольжение, температурное отставание), или несколько процессов, времена релаксации которых по величине соизмеримы.

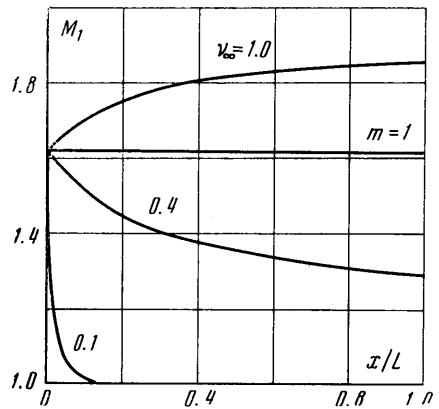
Вычислительный процесс продолжался до тех пор, пока вблизи поверхности клина не совпадали линии тока газа и частиц, а на больших расстояниях от клина наклон ударной волны не переставал изменяться (достигал своего равновесного значения).

3. Рассмотрим влияние динамического скольжения на форму и интенсивность фронта ударной волны. На фиг. 2 представлены результаты расчета фронта ударной волны при обтекании клина ( $\theta = 10^\circ$ ,  $M_\infty = 2$ ,  $r = 0.32 \cdot 10^{-6}$  м) при различных значениях  $m$  и  $v_\infty$ .

• Анализ показывает, что в зоне релаксации вблизи клина линии Маха искривляются, это в свою очередь приводит к искривлению фронта ударной волны. Для



Фиг. 2



Фиг. 3

большой наглядности на фиг. 2 приведена зависимость разности углов наклона ( $\beta - \beta_\infty$ ) в произвольной точке фронта ударной волны и на вершине клина от  $x/L$ . Если скорости газа и частиц в невозмущенном потоке одинаковы (коэффициент скольжения  $v_\infty = 1$ ), то рассматриваемая разность будет отрицательной и фронт ударной волны изогнется вниз по потоку (сплошные линии). На достаточно большом расстоянии от носика клина фронт ударной волны становится прямолинейным. С уменьшением радиуса капель при прочих равных условиях расстояние от поверхности клина до того места ударной волны, где она практически становится прямолинейной, также уменьшается. При уменьшении радиуса капель на порядок это расстояние уменьшается на два порядка. Это объясняется уменьшением времени релаксации за фронтом ударной волны и соответственно более быстрым установлением равновесия.

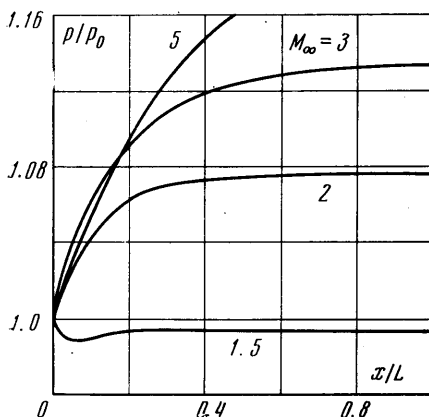
В верхней части фиг. 2 пунктиром приведены значения ( $\beta - \beta_\infty$ ) для течения с коэффициентом скольжения  $v_\infty = 0.4$ . В этом случае ударная волна изгибается против потока, причем изменение угла  $\beta$  может быть значительным. Например, при  $v_\infty = 1$   $m = 0.7$ ,  $\beta = 28^\circ$ , а при уменьшении коэффициента скольжения до значения  $v_\infty = 0.4$  угол наклона скачка возрастает приблизительно в два раза и на достаточно большом удалении от носка клина становится равным  $54^\circ$  (для чистого газа  $m = 1$ ,  $\beta = 40^\circ$ ). Если  $m = 1$ , то ударная волна всегда прямолинейная. Можно подобрать коэффициент скольжения и вертикальную составляющую скорости в набегающем потоке таким образом, чтобы для любого значения  $m$  фронт ударной волны на одной (верхней или нижней) части клина был прямолинейным. Эти условия таковы:

$$u_{s\infty} = u_0, \quad v_{s\infty} = v_0 = u_0 \operatorname{tg} \theta$$

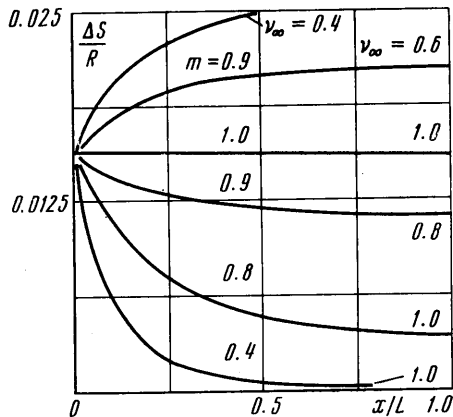
Здесь индексом 0 отмечены параметры за фронтом ударной волны на носике клина. Очевидно, что в этом случае угол атаки клина будет отличен от нуля, и подобные условия одновременно для верхней и нижней поверхностей клина подобрать невозможно.

Видно, что с ростом концентрации частиц в набегающем потоке (с уменьшением  $m$ ) искривление фронта ударной волны увеличивается. Отметим, что кривые фиг. 2 построены в пренебрежении тепло- и массообменом между газом и частицами.

Кривым, изображенным сплошными линиями на фиг. 2, соответствует уменьшение наклона фронта ударной волны по мере удаления от поверхности клина. В этом случае число Маха непосредственно за фронтом ударной волны  $M_1$  будет увеличиваться в том же направлении. Напротив, вдоль фронта ударных волн, соответствующих штриховым линиям на фиг. 2, число  $M_1$  будет уменьшаться. На фиг. 3 приведена зависимость числа Маха вдоль фронта ударной волны от  $x/L$ . Прямая линия соответствует чистому воздуху ( $m = 1$ ), в остальных случаях  $m = 0.7$ . Принято  $M_\infty = 2$ ,  $\theta = 10^\circ$ ,  $r = 0.32 \cdot 10^{-6}$  м. При сильном рассогласовании скоростей в набегающем



Фиг. 4



Фиг. 5

потоке ( $v_\infty = 0.1$ ) число Маха за фронтом ударной волны при удалении от носка клина уменьшается, тогда как при обтекании клина сверхзвуковым потоком чистого газа число Маха за фронтом ударной волны остается постоянным или растет вдоль ударной волны (при  $\theta > \theta_{max}$ ). К сожалению, рассчитать область за звуковой линией не удалось, так как метод характеристик может быть применен только при  $M > 1$ .

На фиг. 4 приводится зависимость безразмерного статического давления (отношенного к давлению  $p_0$  на носике клина за фронтом ударной волны) от  $x/L$  вдоль поверхности клина для различных чисел Маха набегающего потока ( $\theta = 10^\circ$ ,  $r = 0.32 \cdot 10^{-6}$  м,  $m = 0.7$ ).

Как видно из графика, при больших числах  $M_\infty$  происходит рост давления. Однако при  $M_\infty = 1.5$  давление падает и проходит через минимум. Такое anomalous поведение давления при небольших числах  $M_\infty$  объяснено в работе [6] на основании теории малых возмущений. Оно определяется характером самого релаксационного процесса, так как выравнивание скоростей в зоне релаксации связано с обменом между газом и частицами как количеством движения, так и энергией. Первый процесс приводит к росту статического давления, а второй — к его уменьшению. При больших числах Маха влияние процесса обмена количеством движения преобладает. Как показано в работе [6], при рассмотрении только температурного отставания, давление всегда монотонно падает. В этом случае между газом и частицами происходит обмен только энергией.

Ширина зоны релаксации за фронтом ударной волны определяется прежде всего размером частиц  $r$  и коэффициентом скольжения  $v_\infty$  в набегающем потоке. С ростом значений  $r$  и  $v_\infty$  ширина релаксационной зоны возрастает.

На фиг. 5 приведена зависимость относительного изменения энтропии газа  $\Delta S/R$  при переходе через фронт ударной волны. (Здесь  $\Delta S$  — прирост энтропии в скачке уплотнения,  $R$  — газовая постоянная.) Показано изменение  $\Delta S/R$  вдоль фронта при разных значениях концентрации газа в набегающем потоке  $m$  и коэффициента скольжения  $v_\infty$  ( $M_\infty = 2.0$ ,  $\theta = 10^\circ$ ,  $r = 1.0 \cdot 10^{-6}$  м). Из графика следует, что в рассматриваемом случае вблизи поверхности клина образуется так называемый энтропийный слой. (Аналогичный процесс имеет место при обтекании затупленного тела сверхзвуковым однофазным газовым потоком, когда перед телом образуется криволинейный отсоединенный скачок уплотнения.) Это обстоятельство при-

водит к тому, что даже при наличии равномерного потока перед клином и соблюдении в нем полного равновесия в случае, когда скачок будет присоединенным, движение газа за ним может быть вихревым (т. е. завихренность за фронтом ударной волны в отличие от однофазного случая не будет равна нулю и изменяется вдоль фронта ударной волны).

Общая картина течения газа между фронтом ударной волны и поверхностью клина качественно похожа на картину течения при нарушении термодинамического равновесия в газе (колебательная релаксация, неравновесные химические реакции и т. д.) и состоит из зоны релаксации за фронтом ударной волны, в которой происходит выравнивание скоростей и температур газа и частиц, и энтропийного слоя вблизи поверхности клина.

Поступило 24 V 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tribus M., Guibert A. Impingement of spherical water droplets on a wedge at supersonic speeds in air. *J. Aeronaut. Sci.*, 1952, vol. 19, No. 6, pp. 391—394.
2. Serafini I. Impingement of water droplets on wedge and double-wedge airfoils at supersonic speeds. *NASA. Rept. No. 1159*, 1954.
3. Салтанов Г. А., Куршаков А. В. Движение частиц за косым скачком уплотнения при обтекании клина сверхзвуковым двухфазным потоком. *Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт*, 1970, № 9, стр. 177—181.
4. Салтанов Г. А. Взаимодействие частиц с поверхностью обтекаемого клина. *Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт*, 1971, № 1.
5. Морганталер Д. Исследование сверхзвукового двухфазного течения. Сб. «Детонация и двухфазные течения», М., «Мир», 1966.
6. Ткаленко Р. А. К линейной теории сверхзвуковых течений смеси газа и частиц. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1971, № 1.
7. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми и жидкими частицами. *ПММ*, 1965, 29, вып. 3, стр. 418—429.
8. Верещака Л. П., Крайко А. Н., Стернин Л. Е. Метод характеристик для расчета сверхзвуковых течений газа с инородными частицами в плоских и осесимметричных соплах. *Сообщ. по прикл. матем. ВЦ АН СССР*, 1969, вып. 1.
9. Клигель Д., Никерсон Г. Течение смеси газа и твердых частиц в осесимметричном сопле. Сб. «Детонация и двухфазные течения», М., «Мир», 1966.