

УДК 533.6.011 + 533.69.01 + 533.662.013 + 533.6.521.661.013

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ПЛОСКИМ ПОТОКОМ НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

К. П. ИЛЬЧЕВ, С. Н. ПОСТОЛОВСКИЙ

(Москва)

Приводятся соотношения, позволяющие в рамках теории идеальной жидкости выполнять расчет отрывного обтекания тел произвольной формы. Даны примеры расчета численными методами с применением ЭЦВМ обтекания плоским потоком круглого цилиндра и плоской пластинки. Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными в автомоделной области.

В статье приняты следующие обозначения: индексами 1 и 2 обозначены величины, относящиеся к точкам, расположенным с двух сторон от линии тангенциального разрыва скорости — вихревой пелены. Звездочкой сверху помечены величины, относящиеся к точке отрыва. Индексы s и n отмечают направления вдоль вихревой пелены и по нормали к вихревой пелене соответственно, p — статическое давление, v_s и v_n — соответственно тангенциальная и нормальная к вихревой пелене компоненты скорости движения точек средней линии пелены ($v_s = 1/2(v_{s1} + v_{s2})$; $v_n = v_{n1} = v_{n2}$), $\gamma = v_{s1} - v_{s2}$ — вихревая плотность пелены в рассматриваемой точке, r — радиус кривизны вихревой пелены, δ — элемент дуги средней степени вихревой пелены, v^* — скорость движения точки отрыва.

1. Исходные положения. Анализ движения идеальной жидкости при наличии в потоке линии тангенциального разрыва скорости — вихревой пелены — позволяет получить, как показано в [1], следующие результаты.

1. Непрерывность давления при переходе через пелену приводит к равенству тангенциальных к пелене компонент градиентов давления в точках, прилегающих с двух сторон к пелене ($\partial p_1 / \partial s = \partial p_2 / \partial s$), что позволяет установить связь между тангенциальными компонентами полных ускорений частиц жидкости в этих точках в виде

$$\frac{dv_{s1}}{dt} - \frac{dv_{s2}}{dt} = -\gamma \frac{v_n}{r}$$

2. Изменение вихревой плотности во времени в точке, движущейся со скоростью средней линии вихревой пелены, для свободной пелены в потоке определяется соотношением

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\gamma \left(\frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{v_n}{r} \right)$$

3. Последнее соотношение приводит к условию сохранения во все время движения циркуляции скорости по элементу дуги вихревой пелены, ограниченной точками ее средней линии, т. е.

$$\frac{d(\Delta\Gamma)}{dt} = \frac{d(\gamma\delta)}{dt} = 0$$

4. Отрыв потока идеальной жидкости от обтекаемого контура может происходить только по касательной к контуру. В противном случае вих-

ревая плотность в точке отрыва γ^* (скорость частицы жидкости относительно точки отрыва) превращается в нуль, т. е. отрыва потока нет.

5. Скорость движения точки отрыва вдоль обтекаемого контура равна скорости движения вдоль пелены частицы жидкости, заключенной между вихревой пеленой и контуром и прилегающей к точке отрыва, т. е.

$$v^* = v_{s2}^*$$

При этом скорость схода с контура в поток средней линии вихревой пелены относительно точки отрыва равна $1/2\gamma^*$.

6. Изменение вихревой плотности во времени в точке отрыва потока от обтекаемого контура определяется соотношением

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^* = -\gamma^* \left[\left(\frac{\partial v_{s1}}{\partial s}\right)^* + \frac{v_n^*}{r^*} \right]$$

Используя уравнение неразрывности для идеальной несжимаемой жидкости, получим

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^* = \gamma^* \left(\frac{\partial v_{n1}}{\partial n}\right)^*$$

7. Последнее соотношение свидетельствует, что появление отрыва потока в зоне, где скорость движения частиц жидкости вдоль контура падает ($\partial v_{n1}/\partial n > 0$), приведет к развитию отрыва во времени ($d\gamma^*/dt > 0$) и, наоборот, если движение жидкости вдоль контура ускоренное ($\partial v_{n1}/\partial n < 0$), то отрыв будет затухать во времени ($d\gamma^*/dt < 0$).

8. Нарастание циркуляции вокруг обтекаемого контура вследствие отрыва потока определяется соотношением $d\Gamma/dt = 1/2(\gamma^*)^2$, причем величина циркуляции равна циркуляции по контуру, охватывающему сходящую с тела пелену, и обратна ей по знаку.

9. Для неподвижного в выбранной системе координат контура с острой кромкой и фиксированным на этой кромке отрывом $v_{s2}^* = 0$ и, следовательно, $\gamma^* = v_{s1}^*$.

10. Для бесконечно тонкой пластинки, неподвижной в выбранной системе координат, для которой сходящую с острой кромки линию разрыва скорости можно рассматривать как результат наложения двух вихревых пелен (общая касательная на конце пластинки к обеим ее граням) производная от вихревой плотности по времени в точке отрыва и изменение циркуляции вокруг пластинки определяются соотношениями

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^* = -\frac{\partial}{\partial s}(\gamma v_s)^*, \quad \frac{d\Gamma}{dt} = \gamma^* v_s^*$$

Приведенные выше соотношения в сочетании с методом наложения потенциальных потоков позволяют выполнить расчетное исследование отрывного обтекания потоком контура произвольной формы вплоть до получения его полных гидродинамических характеристик. Переход при этом от кинематической картины течения к распределению давления на контуре (и в потоке) осуществляется через интеграл Коши — Лагранжа

$$p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C(t)$$

2. Схема и особенности расчета. При безотрывном обтекании потоком идеальной жидкости тел конечных размеров на поверхности тела неизбежно будет иметь место зона, где $\partial v_{n1}/\partial n > 0$. Как уже отмечалось,

внесение в поток в этой зоне возмущения в виде вихревой пелены, берущей начало на обтекаемом контуре, приводит к нарастанию во времени вихревой плотности в точке отрыва — $d\gamma^*/dt > 0$. В результате с обтекаемого контура в поток будет сходиться вихревая пелена, представляющая собой границу оторвавшейся струи.

Задача расчета отрывного обтекания тела потоком сводится, таким образом, к наложению на исходный поток возмущения в виде дополнительного потока от свободной и присоединенной вихревой пелены и к исследованию развития вихревой пелены во времени.

Присоединенная пелена должна быть помещена либо внутри обтекаемого тела, либо совпадать с контуром последнего, т. е. форма ее может быть произвольной. Однако вихревая плотность присоединенной пелены $\gamma'(s')$ должна удовлетворять двум условиям.

1. Нормальная составляющая скорости суммарного потока в точках обтекаемого контура должна быть равна нормальной составляющей скорости рассматриваемой точки контура $(v_n)_c$ (условие непроницаемости):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n = (v_n)_c$$

2. Циркуляция скорости по контуру, охватывающему присоединенную пелену, должна быть равна по величине и обратна по знаку циркуляции скорости по контуру, охватывающему основную вихревую пелену в потоке, т. е.

$$\int_{s'} \gamma' ds' + \int_s \gamma ds = 0$$

что является следствием известной теоремы Томсона о невозможности возникновения циркуляции в потоке идеальной жидкости.

Указанные условия необходимы и достаточны для определения $\gamma'(s')$ для присоединенной вихревой пелены.

Учитывая, что циркуляция по элементу дуги средней линии вихревой пелены не изменяется во времени, представляется естественным заменить вихревую пелену дискретными вихрями, центры которых расположены на средней линии пелены. При этом через интервал времени Δt в потоке вместо нового элемента вихревой пелены будет появляться вихрь с интенсивностью

$$\Gamma = \frac{d\Gamma}{dt} \Delta t = \frac{(\gamma^*)^2}{2} \Delta t$$

При замене вихревой пелены дискретными вихрями следует иметь в виду, что скорость, индуцируемая элементами пелены в какой-либо точке потока, и $\partial \varphi_\gamma / \partial t$ не могут превышать соответственно $1/2\gamma$ и $1/2\gamma v_s$, что требует внесения в программу расчета необходимых ограничений.

Приращения координат вихрей в потоке определяются через значения составляющих скорости и шаг счета по времени Δt .

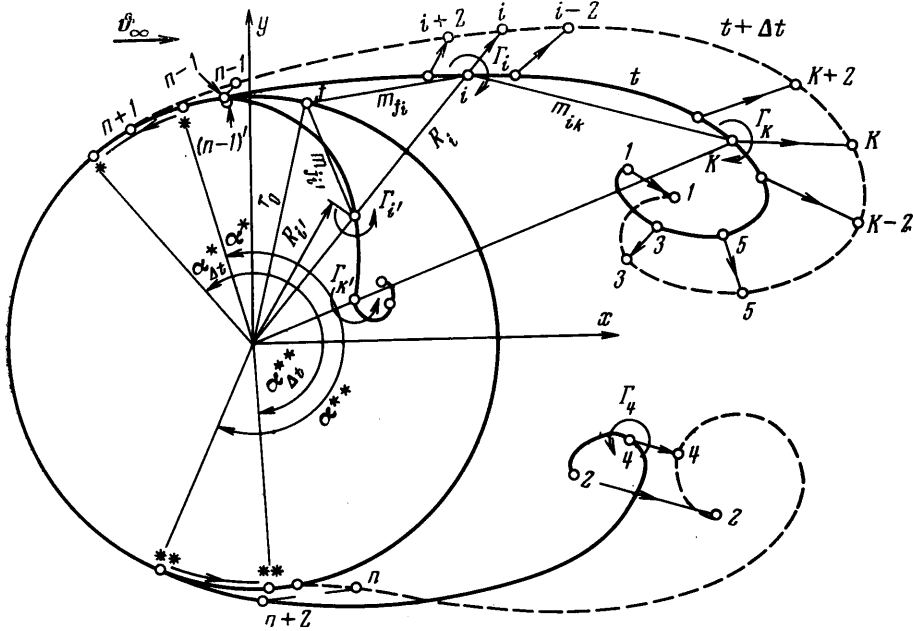
Присоединенные вихри, обеспечивающие выполнение указанных выше двух условий — непроницаемости контура и равенства нулю суммарной циркуляции, могут быть определены посредством разбиения обтекаемого контура на q элементов с q вихрями. Условие 1 приводит к системе q линейных уравнений, в которых в качестве неизвестных фигурируют интенсивности q вихрей. Однако такая система уравнений является линейно зависимой. Поэтому одно из уравнений в этой системе следует заменить условием 2

$$\sum_q \Gamma_j + \sum_n \Gamma_i = 0$$

где Γ_j — присоединенные вихри, Γ_i — вихри вне обтекаемого контура (свободные).

Полученная таким образом система из q линейных уравнений позволяет определить с необходимой степенью точности, зависящей от значения q , интенсивность присоединенных вихрей, заменяющих собой действие на поток обтекаемого контура.

При составлении программы для расчета обтекания круглого цилиндра было использовано то обстоятельство, что условие непроницаемости круглого контура при наличии в потоке вихря интенсивностью Γ_i может быть обеспечено наложением внутри этого контура сопряженного вихря такой же по величине, но противоположной по знаку интенсивности, находящегося на прямой, соединяющей центр ци-



Фиг. 1. Схема к расчету отрывного обтекания круглого цилиндра

линдра с вихрем в потоке на расстоянии $R_j = r_0^2 / R_i$ от центра цилиндра. При этом одновременно обеспечивается равенство нулю суммарной циркуляции по контуру, охватывающему цилиндр и вихрь в потоке. Схема расчета обтекания круглого цилиндра приведена на фиг. 1.

Скорость движения точки отрыва определялась как

$$v^* = v_{s2}^* = v_{s1}^* - \gamma^*$$

где v_{s1}^* — скорость жидкости в точке отрыва, получающаяся в результате наложения потенциальных потоков.

Завихренность γ^* в начальный момент времени задается произвольно, как и координаты точки отрыва x^* и y^* , в виде начальных условий. В процессе расчета завихренность в точке отрыва определялась как

$$\dot{\gamma}_{t+\Delta t} = \gamma_t^* + \left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^* \Delta t$$

где производная рассчитывалась в соответствии с п. 1.

При расчете обтекания выбраны следующие единицы измерений: единицей линейных размеров служит радиус цилиндра r_0 , единицей скорости — скорость набегающего потока v_∞ . В качестве единицы времени выступает величина r_0 / v_∞ , т. е. время, за которое набегающий поток проходит расстояние, равное радиусу цилиндра $t' = tv_\infty / r_0$. Циркуляция

скорости отнесена к $r_0 v_\infty$, статическое давление к $\frac{1}{2} \rho v_\infty^2$. Коэффициенты сопротивления и подъемной силы были получены из соотношений

$$C_x = \frac{P_x}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 2r_0}, \quad C_y = \frac{P_y}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 2r_0}$$

Расчет плоской пластинки велся в предположении, что она имеет весьма малую толщину и кромки ее заострены, т. е. принималось, что

$$v_2^* = v_2^{**} = 0, \quad v_1^* = \gamma^*, \quad v_1^{**} = \gamma^{**}$$

Поэтому

$$v_s^* = \frac{1}{2} \gamma^*, \quad v_s^{**} = \frac{1}{2} \gamma^{**}$$

Воздействие пластинки на окружающий поток заменялось системой присоединенных вихрей, расположенных на равных расстояниях вдоль пластинки. Интенсивность этих вихрей определялась на каждом шаге счета в результате решения указанной выше системы линейных уравнений. Число вихрей (и тем самым порядок системы уравнений) можно было изменять. Было установлено, что 20 вихрей достаточно близко характеризуют распределение вихревой плотности присоединенной пелены.

За единицу линейных размеров выбрана половина длины пластинки l . Коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы определялись так же, как и в случае круглого цилиндра (с заменой r_0 на l).

3. Результаты расчета и сравнение их с экспериментальными данными.

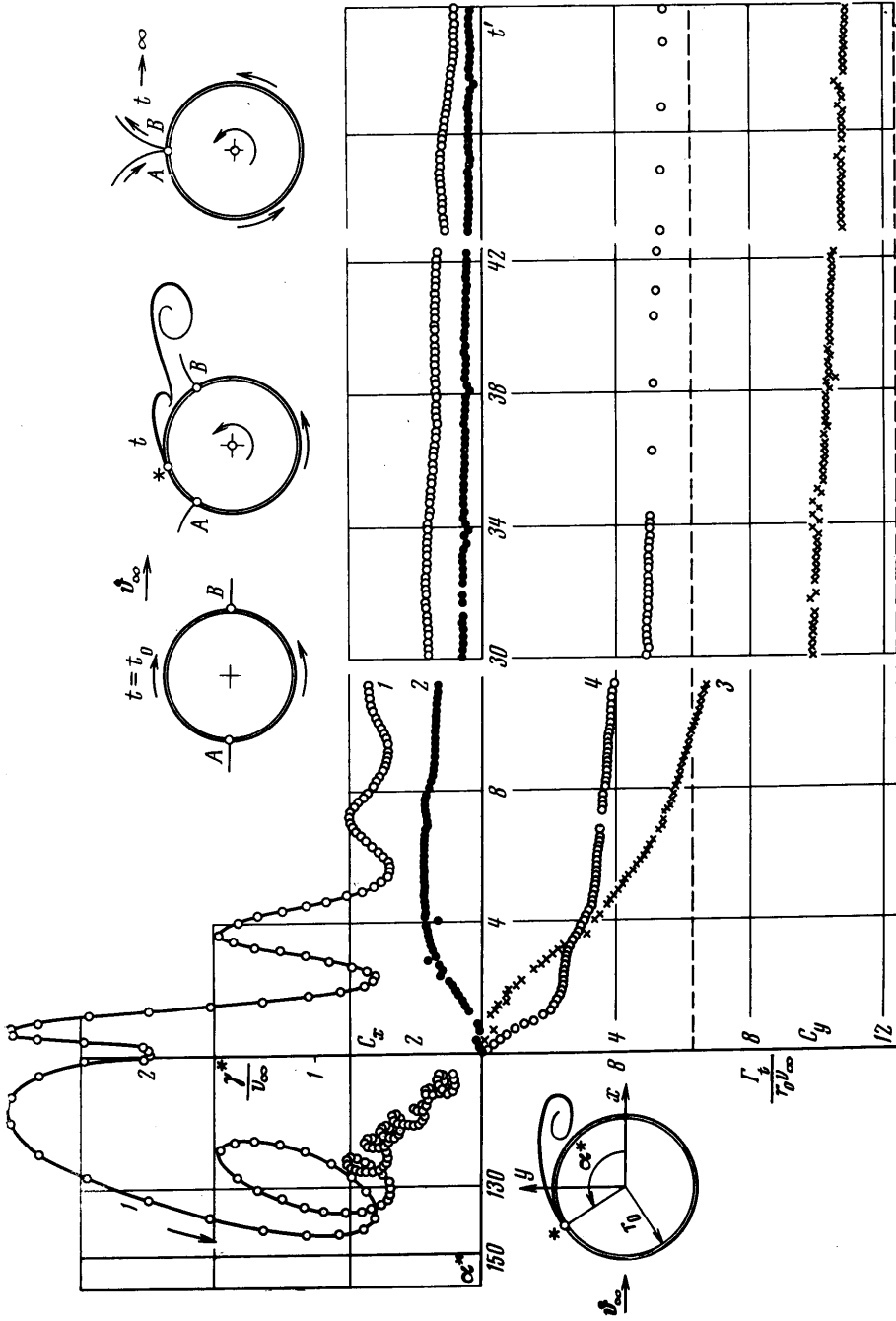
Круглый цилиндр. Прежде всего представлялось целесообразным выполнить расчет обтекания круглого цилиндра при одностороннем отрыве потока. Хотя такое обтекание в действительности не может иметь места, поскольку обе половины цилиндра — верхняя и нижняя — в отношении безотрывного обтекания в равной мере неустойчивы, рассмотрение этого варианта представляет интерес как с точки зрения методики расчета, так и в части физического смысла полученных результатов. Отрыв в начальных условиях был внесен в точке $\alpha^* = 90^\circ$ в виде $\gamma^* = 2v_\infty$.

На фиг. 2 приведены данные расчета обтекания цилиндра при одностороннем отрыве потока в функции времени. Как видно из левой верхней части графика, точка отрыва вначале резко уходит навстречу набегающему потоку, затем возвращается и, совершая колебательные движения, приближается к $\alpha = 90^\circ$. Нарастание завихренности в потоке ведет к нарастанию циркуляции вокруг цилиндра от сопряженных вихрей, имеющих, как отмечалось выше, направление вращения, обратное завихренности основной пелены. Но циркуляция вокруг цилиндра нарастает не беспредельно.

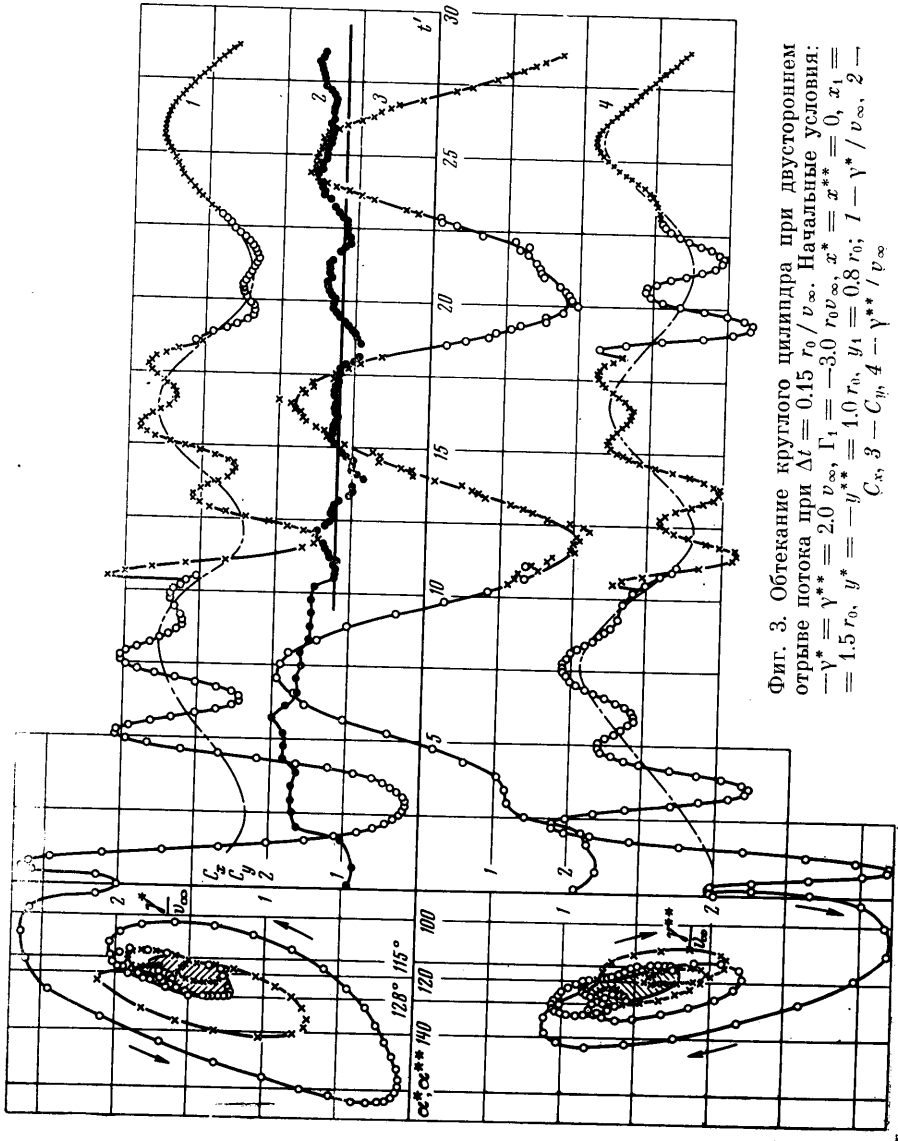
Следует ожидать, что при $t \rightarrow \infty$ величина $\Gamma(r_0 v_\infty)^{-1}$ стремится к 4л, т. е. к значению циркуляции, при котором точка A разветвления потока на цилиндре и точка B схода потока сольются в одну точку (см. схему на фиг. 2). Такое протекание процесса естественно. Начавшийся отрыв потока может прекратиться лишь в том случае, если скорость потока в точке отрыва превратится в нуль.

При расчете обтекания цилиндра в условиях двустороннего отрыва потока в картину обтекания вносилась асимметрия в виде начального вихря, который в процессе расчета сносился потоком. Интенсивность этого вихря так же, как и начальные условия в точках отрыва и шаг счета, варьировалась.

Как и в случае одностороннего отрыва, при двустороннем отрыве в начальный период времени величины γ^* и γ^{**} осциллируют с большой амплитудой, но по мере развития процесса амплитуда этих колебаний быстро затухает (фиг. 3). Точка отрыва быстро смещается навстречу набегающему потоку, но затем возвращается. В отличие от случая односторон-



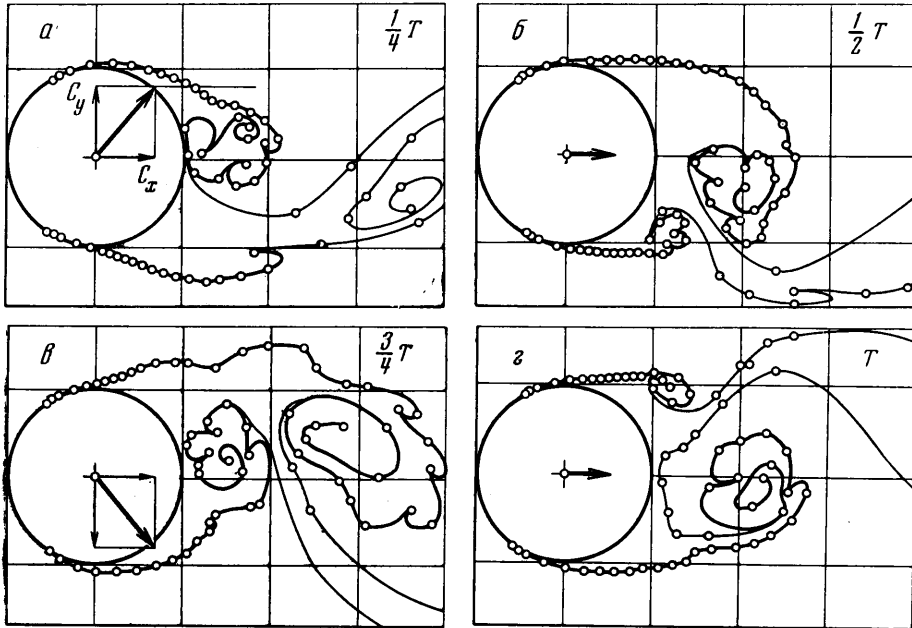
Фиг. 2. Обтекание круглого цилиндра при одностороннем отрыве потока. 1 — γ^* / v_∞ , 2 — C_x , 3 — C_y , 4 — $\Gamma(r_0 v_\infty)^{-1}$



Фиг. 3. Обтекание круглого цилиндра при двустороннем отрыве потока при $\Delta t = 0.15 r_0 / v_\infty$. Начальные условия: $-y^* = y^{**} = 2.0 v_\infty$, $\Gamma_1 = -3.0 r_0 v_\infty$, $x^* = x^{**} = 0$, $x_1 = 1.5 r_0$, $y^* = -y^{**} = 1.0 r_0$, $y_1 = 0.8 r_0$; 1 — γ^* / v_∞ , 2 — C_x , 3 — C_m , 4 — γ^{**} / v_∞ .

него отрыва, значения γ^* и γ^{**} колеблются относительно некоторой средней линии, не приближающейся к оси t , т. е. средние значения завихренности в точках отрыва не стремятся к нулю. В связи с ограниченной оперативной памятью машины БЭСМ-4 на протяжении счета пришлось дважды прибегнуть к искусственному уменьшению числа вихрей в потоке посредством суммирования удаленных вихрей ($t = 10.5r_0/v_\infty$ и $t = 18.5r_0/v_\infty$).

Отметим, что, несмотря на вмешательство в процессе расчета, вызвавшее раскочку колебаний значений γ^* и γ^{**} , в целом эти колебания устойчиво происходят относительно некоторых средних значений $\langle \gamma^* \rangle$ и $\langle \gamma^{**} \rangle$, примерно синусоидально зависящих от времени. Точки отрыва при дву-



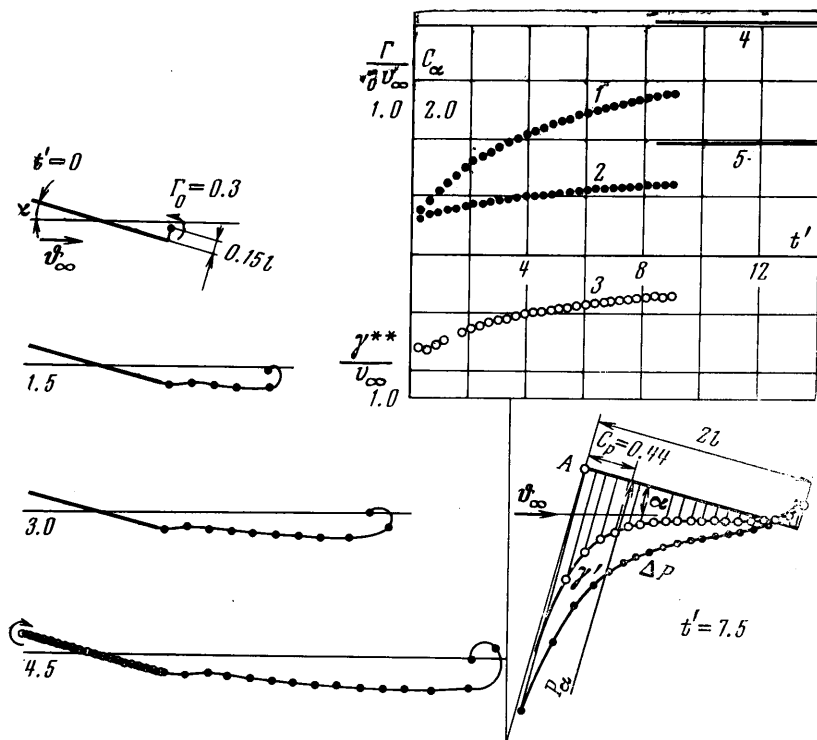
Фиг. 4. Картина вихревого обтекания круглого цилиндра в пределах одного периода

стороннем отрыве потока после нескольких колебаний вдоль контура цилиндра, вызванных известным произволом в начальных условиях, в конце концов стабилизируются в диапазоне углов α^* и α^{**} от 115° до 128° и начинают описывать в плоскостях (α^*, γ^*) и $(\alpha^{**}, \gamma^{**})$ овальные кривые, находясь при этом в противофазе. Процесс принимает периодический характер. Последнее четко следует из характера изменения во времени коэффициента подъемной силы C_y . Коэффициент лобового сопротивления также изменяется во времени и с выходом процесса на периодический режим колеблется в диапазоне $C_x = 0.9 - 1.5$ (по данным английской национальной физической лаборатории (1914 г.) и лаборатории в Геттингене (1923 г.) в диапазоне $Re = 10^4 - 10^5$ среднее значение коэффициента сопротивления равно $1.2 - 1.23$).

На фиг. 4 представлена полученная в результате расчета картина обтекания цилиндра потоком в пределах одного периода изменения подъемной силы. Каждая вихревая пелена поочередно сворачивается в вихревые сгустки, причем в пределах одного периода изменения подъемной силы образуется по одному вихревому сгустку от верхней и от нижней пелены. Указанные вихревые сгустки сносятся потоком, образуя

цилиндром вихревой след с шахматным расположением зон завихренности чередующегося знака (дорожка Кармана).

Как показали варианты расчета, изменение начальных условий в части величин γ^* и γ^{**} , положения точек отрыва, а также величины асимметрии за счет начального вихря приводит лишь к изменению характера течения в начальный период времени. Однако весьма скоро (через $t = 20 \div 30r_0/v_\infty$) процесс принимает все тот же периодический характер.

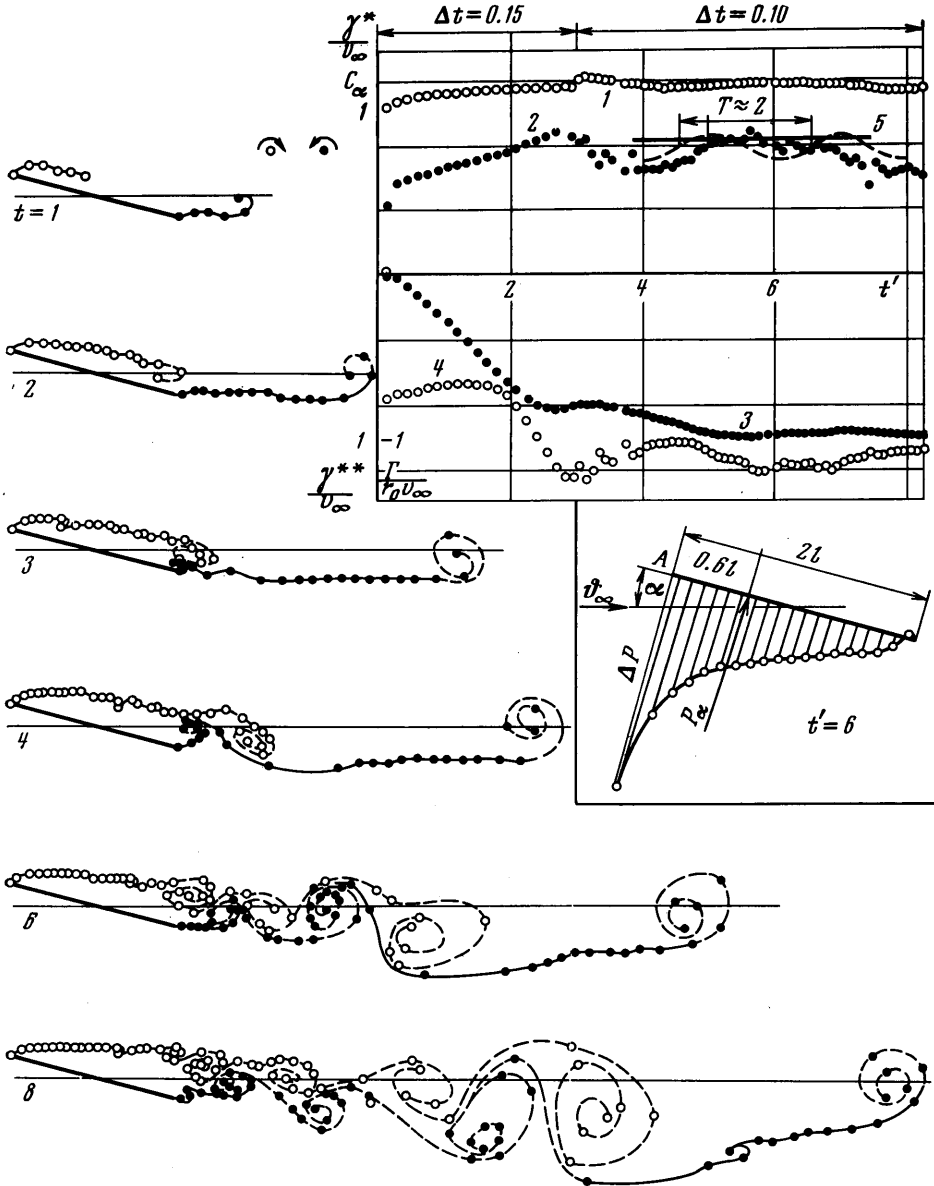


Фиг. 5. Обтекание пластинки при $\alpha = 15^\circ$ в случае одностороннего отрыва потока. 1 — $\Gamma / (r_0 v_\infty)^{-1}$, 2 — C_α , 3 — γ^{**} / v_∞ , 4 — $\Gamma / (r_0 v_\infty)^{-1} = 2\pi \sin 15^\circ$, 5 — $C_\alpha = 2\pi \sin 15^\circ \cos 15^\circ$

Период схода вихревых сгустков в вариантных расчетах с разным шагом счета составил $(9-10)r_0/v_\infty$ против $11r_0/v_\infty$ по экспериментальным данным английской национальной лаборатории (см. [2]).

Плоская пластинка. Как и в случае круглого цилиндра расчеты обтекания пластинки были произведены при одностороннем отрыве потока с задней кромки (фиг. 5) и при двустороннем (фиг. 6) — с передней и задней кромок. При одностороннем отрыве сходящая с задней кромки вихревая пелена постепенно удлиняется, а ее конец сворачивается в спираль, неоднократно регистрировавшуюся в экспериментах и известную под названием «разгонного вихря». Совершенно очевидно, что сход вихревой пелены и рост завихренности в потоке будут продолжаться до тех пор, пока γ^{**} не превратится в нуль, что возможно лишь при одном значении циркуляции, которое, как известно, составляет для плоской пластинки $\Gamma = r_0 v_\infty 2\pi \sin \alpha$, т. е. в рассматриваемом случае $\alpha = 15^\circ$, $\Gamma \approx 1.63r_0 v_\infty$. Процесс обтекания с односторонним отрывом стремится к указанному

случаю асимптотически при $t \rightarrow \infty$. При двустороннем отрыве потока спутная струя за пластинкой со временем приобретает структуру типа «дорожки Кармана» (фиг. 6), причем расстояние между зонами завихренности, как и при обтекании круглого цилиндра, нарастает по мере удале-



Фиг. 6. Обтекание пластинки при $\alpha = 15^\circ$ в случае двустороннего отрыва потока. 1 — γ^*/v_∞ , 2 — C_α , 3 — $\Gamma / (r_0 v_\infty)^{-1}$, 4 — γ^{**}/v_∞ , 5 — экспериментальное значение C_α

ния от пластинки, что регистрировалось и в действительности (см., например, [2]).

Как коэффициент силы, действующей на пластинку, так и точка ее приложения весьма близки к экспериментальным значениям [3].

Близкое сходство расчетной кинематической картины обтекания с действительной и удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных количественных характеристик обтекания позволяют заключить, что положенная в основу расчета отрывного обтекания схема и полученные при этом теоретические соотношения отражают существо процесса отрывного обтекания тел потоком невязкой жидкости в автомоделльной области.

Авторы благодарят Т. Л. Межибовскую за помощь, оказанную при программировании изложенных задач и при вариантных расчетах на ЭЦВМ. Особо авторы благодарят Г. Ю. Степанова за ряд полезных советов и практических замечаний при подготовке статьи.

Поступило 20 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Постоловский С. Н. К расчету отрывного обтекания тел плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости. В сб. «Компрессоры и дутьевые машины», Тр. ЦКТИ, 1970, № 102.
2. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 1, 2. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
3. Красноперов Е. В. Экспериментальная аэродинамика. Л.— М., ОНТИ, Главн. ред. авиац. лит-ры, 1935.