

УДК 533.6.011.: 51

ЛАМИНАРНОЕ СМЕШЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПОТОКОВ ПРИ НАЛИЧИИ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ

И. Н. МУРЗИНОВ, Г. П. ШИНКИН

(Москва)

Задача смешения потока с покоящимся газом была решена Чепменом [1]. В данной работе приведены некоторые результаты расчетов ламинарной зоны смешения однородных потоков газов с градиентом давления. На основе расчетных данных и оценок показано, что к задаче смешения с градиентом давления применимы соображения локального подобия, сформулированные Лизом [2]. В переменных подобиях профили скорости для градиентного течения практически совпадают с профилями безградиентного течения при одних и тех же значениях параметров на внешней и внутренней границах зоны смешения. Более того, оказывается, что профили избыточной скорости слабо зависят от конкретных условий задачи.

1. Смешение потоков с градиентом давления рассматривается в ряде прикладных задач, например при исследовании отрывных областей течения, где в окрестности точек отрыва и присоединения потока наблюдаются значительные градиенты давления. Аналогичные задачи возникают также при истечении струй в спутный поток.

Рассмотрим ламинарное смешение двух однородных сжимаемых потоков при наличии градиента давления. Выберем систему координат так, чтобы ось x была направлена вдоль разделяющей линии тока и ось y — по нормали к ней. Тогда уравнения неразрывности, сохранения количества движения и энергии в обычных предположениях теории пограничного слоя запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v r_0^*)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r_0^*)}{\partial y} &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} &= u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial i}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

В этих уравнениях u, v — составляющие скорости по осям x и y соответственно; ρ, μ, i, p — плотность, вязкость, энтальпия и давление газа; Pr — число Прандтля, которое в дальнейшем полагалось постоянным ($Pr = 0.72$); r_0 — расстояние от симметрии до разделяющей линии тока; x принимает значения 0 и 1 для плоского и осесимметричного случаев соответственно.

Граничные и начальные условия для системы (1.1) брались в виде

$$\begin{aligned} y \rightarrow \infty, \quad u \rightarrow u_e, \quad i \rightarrow i_e \\ y = 0, \quad v = 0 \\ y \rightarrow -\infty, \quad u \rightarrow u_{-e}, \quad i \rightarrow i_{-e} \\ x = 0, \quad u = f_1(y), \quad i = f_2(y), \quad v = f_3(y) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где индексы e и $-e$ относятся соответственно к величинам на верхней и нижней границах зоны смешения, f_1, f_2, f_3 — заданные функции.

Уравнение состояния и зависимость вязкости от газодинамических параметров задавались в форме

$$p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho i, \quad \rho \mu = C p i^{-n} \quad (1.3)$$

Здесь γ, C, n — постоянные (в расчетах полагалось $\gamma = 1.4, n = 0.315$). Ограничимся случаями смешения потоков с нулевыми начальными толщинами пограничных слоев. При этом для градиентных течений будем пока считать давление торможения одинаковым для верхнего и нижнего потоков.

Рассмотрим возможность сведения данной задачи к автомодельной. Следуя Лизу [2], введем новые переменные

$$\xi = \int_0^x \rho_e \mu_e u_e r_0^{2x} dx, \quad \eta = u_e r_0^x \int_0^y \rho dy \quad (1.4)$$

и запишем систему (1.1) в переменных Мизеса ξ, ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= u_1, & \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= -v_1 \\ u_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi} &= \frac{du_e}{d\xi} \frac{1}{u_e} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - u_1^2 \right] + u_1 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u_1 i_1^{-n} \frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right) \\ \frac{\partial i_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{Pr} u_1 i_1^{-n} \frac{\partial i_1}{\partial \psi} \right) + (\gamma - 1) M_e^2 u_1 i_1^{-n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \psi} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.5)$$

где

$$u_1 = u/u_e, \quad v_1 = \left(u \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{\rho v}{\rho_e \mu_e r_0^x} \right) / u_e, \quad i_1 = i/i_e$$

Далее предположим существование автомодельного решения $u_1(\zeta), i_1(\zeta)$, где $\zeta = \psi/\sqrt{\xi}$. При этом уравнения (1.5) и граничные условия (1.2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\zeta}{2} u_1 \frac{du_1}{d\zeta} &= \frac{du_e}{d\xi} \frac{\xi}{u_e} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - u_1^2 \right] + u_1 \frac{d}{d\zeta} \left(u_1 i_1^{-n} \frac{du_1}{d\zeta} \right) \\ -\frac{\zeta}{2} \frac{di_1}{d\zeta} &= \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{1}{Pr} u_1 i_1^{-n} \frac{di_1}{d\zeta} \right) + (\gamma - 1) M_e^2 u_1 i_1^{-n} \left(\frac{du_1}{d\zeta} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \zeta \rightarrow \infty, & \quad u_1 \rightarrow 1, & \quad i_1 \rightarrow 1 \\ \zeta \rightarrow -\infty, & \quad u_1 \rightarrow u_{-e}/u_e, & \quad i_1 \rightarrow i_{-e}/i_e \end{aligned}$$

Из (1.6) видно, что условиями существования автомодельного решения являются

$$\begin{aligned} \frac{du_e}{d\xi} \frac{\xi}{u_e} \left[\frac{\rho_e}{\rho} - u_1^2 \right] &= F(\zeta) \\ M_e &= M_e(\zeta) \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$u_{-e}/u_e = \text{const}, \quad i_{-e}/i_e = \text{const}$$

В общем случае эти условия не удовлетворяются. Очевидно, что для безградиентного течения автомодельные решения существуют и будут определяться параметрами M_e , γ , n , u_{-c}/u_e , i_{-c}/i_e , P_r . Частный случай этой задачи рассмотрен Чепменом [1].

Возникает вопрос о возможности использования локального подобия для задачи смешения, как это было сделано Лизом для течения в пристеночном пограничном слое. В этой связи покажем прежде всего, что при постоянном давлении торможения для обоих потоков отношения u_{-c}/u_e и i_{-c}/i_e остаются постоянными вдоль зоны смешения независимо от градиента давления. Действительно, если i_{e0} , i_{-e0} , p_0 — соответственно энтальпии торможения внешнего и внутреннего потоков газа и их общее давление торможения, то имеем

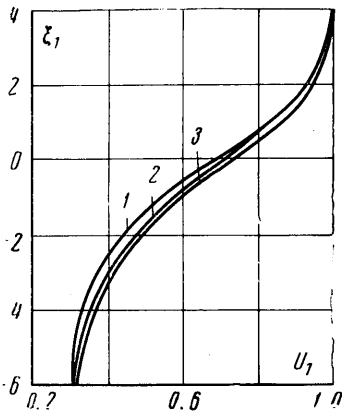
$$\frac{i_e}{u_e} = \frac{i_{e0} [p/p_0]^{(\gamma-1)/\gamma}}{\sqrt{2i_{e0} \{1 - [p/p_0]^{(\gamma-1)/\gamma}\}}}, \quad \frac{i_{-c}}{u_{-c}} = \frac{i_{-e0} [p/p_0]^{(\gamma-1)/\gamma}}{\sqrt{2i_{-e0} \{1 - [p/p_0]^{(\gamma-1)/\gamma}\}}} \quad (1.8)$$

Отсюда следует, что

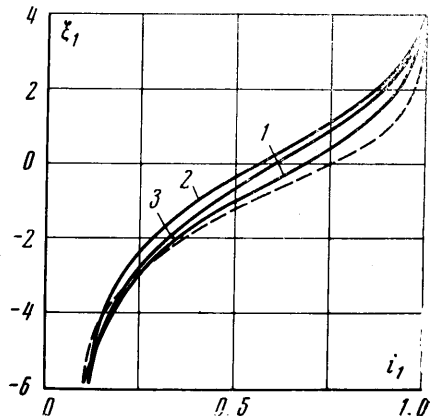
$$u_{-c}/u_e = \sqrt{i_{-e0}/i_{e0}} = \text{const}, \quad i_{-c}/i_e = i_{-e0}/i_{e0} = \text{const}.$$

Если градиент давления не очень велик, то, следуя Лизу, членом с градиентом давления в первом уравнении (1.6) можно пренебречь. Отметим, что величина $[\rho_e/\rho - u_i^2]$ обращается в нуль на внешней и внутренней границах зоны смешения и достигает максимума где-то внутри зоны смешения. Аналогично задаче о пристеночном пограничном слое можно показать, что при небольших числах Маха M_e максимум этой величины имеет порядок $1/4$.

Поэтому можно ожидать, что в задачах смешения метод локального подобия будет давать приемлемые для инженерной практики результаты.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Для количественной оценки точности выполнения локального подобия были выполнены некоторые численные расчеты. Прежде всего было подсчитано несколько вариантов безградиентного течения с различными значениями M_e , u_{-c}/u_e , i_{-c}/i_e , которые необходимы для сравнения и выявления характера зависимости автомодельного решения от определяющих параметров задачи.

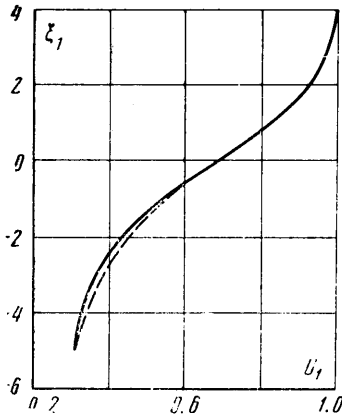
Градиентное смешение потоков рассматривалось для течения, формирующегося вдоль контактной поверхности разрыва. Форма контактной поверхности для простоты задавалась в виде затупленного по сфере конуса с углом полураствора $\theta = 10^\circ$, а распределение давления вдоль контактной поверхности бралось соответствующим обтеканию этого конуса сверхзвуковым потоком с числом Маха $M_\infty = 16$, $i_{-e}/i_e = 0.1$.

На фиг. 1, 2 показано сравнение профилей скорости и энтальпии в сечениях $x = 0.4$ и $x = 1.6$ (кривые 2, 3) с автомодельным безградиентным решением (кривая 1) с тем же значением i_{-e}/i_e и числом Маха $M_e = 2.5$ (расстояния отнесены к радиусу сферического затупления).

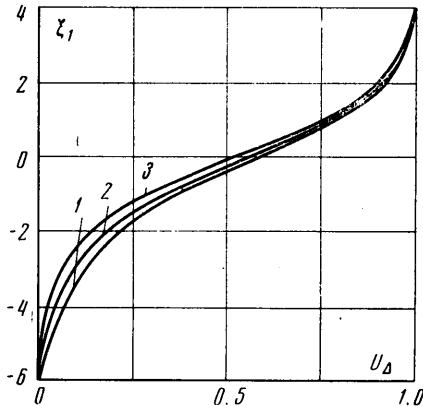
На фиг. 2 пунктирной линией показан профиль энтальпии, подсчитанный из интеграла Крокко по автомодельному профилю скорости. Как видно из этих графиков, совпадение профилей довольно хорошее, и метод локального подобия дает удовлетворительную точность расчетов. Отметим, что графики построены в зависимости от переменной подобия ζ_1 , которая связана с ранее введенной переменной ζ соотношением

$$d\zeta = u_1(\zeta_1) d\zeta_1$$

Хотя числа Маха M_e в сечениях $x = 0.4$ и $x = 1.6$, равные соответственно 0.53 и 2.44, отличаются довольно сильно, профили скоростей в этих сечениях (фиг. 1) разнятся незначительно. Аналогичная картина наблюдается и в других случаях.



Фиг. 3



Фиг. 4

Для иллюстрации на фиг. 3 показано влияние на профиль отношения энтальпий i_{-e}/i_e (сплошная линия — $i_{-e}/i_e = 0.5$; пунктир — $i_{-e}/i_e = 0.1$; $M_e = 2.5$). Видно, что профили скорости в рассматриваемых переменных практически не зависят от отношения энтальпий i_{-e}/i_e . Этот вывод можно было бы сделать на основе анализа системы (1.6), из которой следует, что первое уравнение слабо зависит от профиля энтальпии, а следовательно, и от параметров M_e , i_{-e}/i_e .

Таким образом, профили скоростей будут в основном зависеть от отношения u_{-e}/u_e . Однако влияние этого параметра на профиль избыточной скорости $u_\Delta = (u - u_{-e}) / (u_e - u_{-e})$ не велико. Величины избыточной скорости для безградиентного течения при $M_e = 2.5$ и $i_{-e}/i_e = 0.5$ показаны на фиг. 4. Здесь кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $u_{-e}/u_e = 0.1, 0.3, 0.6$. Видно, что в целом влияние параметра u_{-e}/u_e мало. При этом более заметное изменение наблюдается ниже разделяющей линии тока.

Интересно отметить, что значение избыточной скорости на разделяющей линии тока меняется очень мало. При $u_{-e} = 0$ обычно принимают чепменовское значение $u_\Delta = 0.587$. При $u_{-e} \rightarrow u_e$ на разделяющей линии тока $u_\Delta \rightarrow 0.5$. Действительно, полагая для простоты $n = 0$ и $u_{-e} = u_e(1 - \varepsilon)$, где ε — малая величина, из первого уравнения (1.6) найдем в линейном приближении

$$u_1 = 1 - 0.5\varepsilon + \varepsilon \int_0^\zeta e^{-\zeta^2/4} d\zeta / \int_{-\infty}^\infty e^{-\zeta^2/4} d\zeta$$

Отсюда следует, что на разделяющей линии тока ($\zeta = 0$) избыточная скорость $u_\Delta = 0.5$, что и требовалось показать.

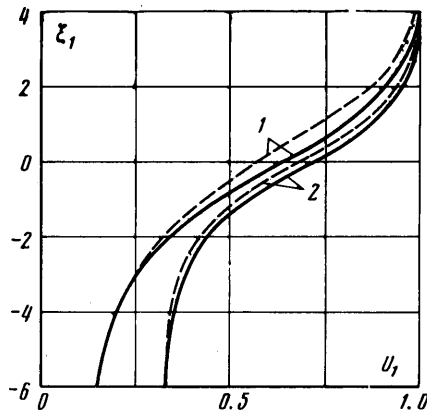
Приведенные выше обоснования о применимости соображений локального подобия для градиентных течений были сделаны в предположении одинаковости давлений торможения в смешивающихся потоках. В этом

случае газодинамические величины на внешней и внутренней границах зоны смешения градиентного течения изменяются пропорционально, так что их отношения остаются постоянными вдоль зоны смешения. Граничные условия в этом случае аналогичны условиям для автомодельных течений.

С практической точки зрения представляют также большой интерес случаи градиентного смешения потоков с разными давлениями торможения. При этом скорости газа на внешней и внутренней границах зоны смешения изменяются по своим закономерностям, отличным друг от друга. Обосновать применимость локального подобия для этого класса задач затруднительно. Например, при вычислении переменной ξ (формула (1.4)) неясно, на какой границе взять скорость в качестве определяющей. Однако численные расчеты показывают, что приближенно локальное подобие выполняется и в таких задачах. Для иллюстрации на фиг. 5 дано сравнение рассчитанных профилей скорости (пунктир) с полученными на основе локальной автомодельности (сплошные кривые).

Расчет проводился для смешения истекающего из сопла газа со спутным потоком. Параметры в начальном сечении $x = 0$ характеризуются следующими значениями: $M_e = 3$, $M_{-e} = 0.3$, $i_{-e}/i_e = 0.5$. Давление изменялось по линейному закону и падало на порядок от начала смешения до

$x = 4$ (расстояния отнесены к радиусу выходного сечения сопла). Приведенные на фиг. 5 кривые 1, 2 относятся к сечениям $x = 1,4$ соответственно. Переменные подобия в рассматриваемом случае считались по верхней границе ($u_e > u_{-e}$). Видно, что локальное подобие дает и в этом случае удовлетворительную для практики точность.



Фиг. 5

Поступило 26 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Chapman D. Laminar mixing of a compressible fluid. NACA Rept, 1950, No. 958.
2. Less L. Laminar heat transfer over blunt-nosed bodies at hypersonic flight speeds. Jet Propulsion, 1956, No. 4.