УДК 532.593

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

Г. П. СОЛДАТОВ

(*Саратов*)

Исследуется процесс возникновения ударной волны (бора), образующейся при движении начального слабого разрыва производных по расстоянию от скорости движения и глубины жидкости в область стационарного потока в канале постоянного наклона. Формирование ударных волн из волн сгущения впервые изучено Риманом [1]. Сопротивление трения учитывается в форме Шези. Им же получены уравнения для определения момента времени и координаты точки, в которой образуется ударная волна, а также установлены законы распространения ударных волн применительно к задаче об одномерном неустановившемся движении газа, давление которого зависит от плотности.

Мгновенное разрушение волн, а также образование и движение боров при движении жидкости в реках для идеализированной модели течения по каналу с горизонтальным дном без учета влияния трения описано С. А. Христиановичем, С. Г. Михлиным и Б. Б. Девисоном [2] и Стокером [3]. Недавно в работе Сачдева и Бхатнагара [4] при помощи численного интегрирования уравнения для интенсивности бора исследована задача о распространении ударной волны в канале постоянного наклона с учетом влияния сопротивления жидкости в форме Шези.

Постепенное разрушение волн и механизм образования бора изучены Стокером [3] на основе теории мелкой воды. Пренебрегая трением о горизонтальное дно канала, он вычислил значения момента времени и координаты точки образования ударной волны в случае, когда начальное возмущение представляет собой синусоидальную волну. Зависимости указанных значений от амплитуды волны для канала постоянного наклона были получены Джеффри [5], который также пренебрегал трением жидкости о дно канала и считал начальное возмущение синусоидальным.

Лайтхилл и Уитэм [6] обнаружили, что для чисел Фруда, больше двух, линейная теория приводит к неограниченному росту интенсивности волны паводка. Заметим, что исследования движения волны паводка в окрестности первой характеристики, выполненные в работах [3, 6], отличаются лишь формами законов сопротивления и зависимостями искомых функций от переменных. Физические особенности различных волновых движений жидкости рассмотрены также Лайтхиллом в [7].

1. Постановка задачи. Введя матрицы

$$U=\begin{Bmatrix} v \\ a \end{Bmatrix},\quad A=\begin{Bmatrix} v & 2a \\ a/2 & v \end{Bmatrix},\quad B=\begin{Bmatrix} (gF/c)^2-gS_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

запишем систему уравнений для движения потока жидкости в канале в следующем матричном виде:

$$U_t+AU_x+B=0 \tag{1.2}$$

В матрицах (1.1) приняты обозначения: v — скорость, g — ускорение силы тяжести, $a^2=gh$ — квадрат скорости звука, h — высота свободной поверхности, отсчитанная от некоторой фиксированной плоскости наклона S_0, $F=v/a$ — число Фруда, $c^2=g/f$, где f — коэффициент трения.

Пусть область $x>x_1$ представляет собой невозмущенный поток с постоянной скоростью v_0 и постоянной глубиной h_0, так что в этой области $a^2=gh_0=a_0^2$. В некоторый момент времени на линии $x=x_1$ начальная матрица (вектор) U_0 имеет разрыв производной по координате x, распространяющийся в область постоянного течения. Необходимо вычислить критическое расстояние x_* и критический момент времени t_* превращения этого слабого разрыва в ударную волну.

Ввиду того что собственные значения $\lambda^\pm = v \pm a$ матрицы A вещественны, а левые собственные векторы этой матрицы $l^\pm = [1 \pm 2]$ линейно-независимы, система квазилинейных уравнений (1.2) гиперболическая. Для гиперболической системы уравнений вида (1.2) Лаксом [8] было показано, что слабые возмущения начального вектора U_0 распространяются вдоль характеристик

$$dx/dt = v \pm a$$

Так как начальное возмущение распространяется в область постоянного течения, то волновой фронт находится на линии $x = (v_0 + a_0)t$, вдоль которой

$$v + 2a - gS_0t + \int (gF/c)^2\,dt = \mathrm{const}$$

2. Уравнения для разрывов. Задача о распространении начального разрыва для квазилинейных уравнений вида (1.2) подробно изучалась Джеффри и Таниути [9]. Следуя работе [9], для нахождения критического момента времени и координаты введем новые переменные $\varphi = \mathrm{const}$, $t' = \mathrm{const}$ при помощи уравнений $t' = t$, $\varphi_t + \lambda^+\varphi_x = 0$. Тогда фронт волны задается уравнением $\varphi(x, t) = 0$.

Пусть $[\alpha]$ обозначает скачок величины α. Тогда $(\alpha)_{\varphi=0^-} - (\alpha)_{\varphi=0^+}$

$$[U] = [U_{t'}] = 0, \quad [U_\varphi] = \Pi(t') \neq 0, \quad [x_\varphi] = X(t') \neq 0$$

Для скаляра X и вектора Π с компонентами Π_1 и Π_2 в работе [9] получены уравнения

$$-l_0^{(J)}U_{\varphi 0}X + l_0^{(J)}\Pi x_{\varphi 0} = 0,\ \lambda^{(J)} \neq \lambda^\Phi,\ l_0^\Phi\dot{\Pi} + [(\nabla_U l^\Phi)_0\Pi]' U_{0t'} +$$
$$+ [\nabla_U(l^\Phi B)]_0\Pi = 0, \quad \dot{X} = (\nabla_U\lambda^\Phi)_0\Pi \qquad (2.1)$$

В уравнениях (2.1) ∇_U обозначает оператор градиента в U-пространстве, индекс нуль указывает на то, что соответствующая величина берется со стороны невозмущенного потока, точка обозначает производную по времени, а штрих — операцию транспонирования.

Подставляя матрицы (1.1), собственные значения и собственные векторы матрицы A в уравнения (2.1), получим обыкновенные дифференциальные уравнения для величин скачков

$$\dot{\Pi}_1 + 2\dot{\Pi}_2 + 2\left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{F_0}{a_0}(\Pi_1 - F_0\Pi_2) = 0 \qquad (2.2)$$
$$\Pi_1 = 2\Pi_2,\ \dot{X} = \Pi_1 + \Pi_2$$

3. Определение координаты x_* и момента времени t_* образования ударной волны. Подставив второе уравнение системы (2.2) в первое, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для величины Π_2, решение которого представляется в виде

$$\Pi_2 = \Pi_2^* \exp\left\{\left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{(F_0 - 2)F_0}{2a_0}t\right\}$$

где звездой сверху обозначен предел $E^* = \lim E$ при $t' \to 0$ величины E

вдоль $\varphi = 0$. Тогда вектор П принимает вид

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_1^* \\ \Pi_2^* \end{bmatrix} \exp\left\{ \left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{(F_0-2)F_0}{2a_0} t \right\}$$

причем $\Pi_1^* = 2\Pi_2^*$. Заметив, что

$$\Pi_1^* = v_x^* x_\varphi^*, \qquad \Pi_2^* = a_x^* x_\varphi^*$$

получим

$$\frac{\Pi}{x_\varphi^*} = \begin{bmatrix} v_x^* \\ a_x^* \end{bmatrix} \exp\left\{ \left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{(F_0-2)F_0}{2a_0} t \right\}$$

Для получения момента времени t_* интегрируем последнее уравнение системы (2.1) и введем предельную операцию

$$\lim_{t'\to 0} \{(x_\varphi)_{\varphi=0^-} - (x_\varphi)_{\varphi=0^+}\} = X^*$$

или

$$X^* = x^*\varphi - x_{\varphi^\circ}$$

Тогда, поскольку левая часть полученного таким образом уравнения

$$X + x_{\varphi^\circ} = x_\varphi^* + \int_0^\tau (\nabla_U \lambda^+)_0 \Pi \, dt'$$

обращается в нуль для критического момента времени $\tau = t_*$, искомое уравнение для t_* имеет вид

$$0 = x_\varphi^* + \int_0^{t_*} (\nabla_U \lambda^+)_0 \Pi \, dt'$$

Вычислив подынтегральную функцию, получим

$$0 = x_\varphi^* + \int_0^{t_*} (\Pi_1 + \Pi_2) \, dt'$$

Критический момент времени образования ударной волны определяется выражением

$$t_* = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 - \frac{\beta}{3a_x^*}\right), \qquad \beta = \left(\frac{g}{c}\right)^2 \frac{(F_0-2)F_0}{2a_0}$$

Критическая координата x_* получается тогда из уравнения $x = (v_0 + a_0)t$, в котором следует положить $t = t_*$.

4. Особое решение. Рассмотрим систему уравнений (1.2), в которой приняты обозначения

$$U = \begin{bmatrix} v \\ a \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} v & 2a \\ a/2 & v \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\partial H/\partial x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Система уравнений (1.2), (4.1) используется для изучения волновых движений жидкости над наклонными берегами [5]. В этой системе v обозначает скорость, $a^2 = g(Y - y^*)$ — квадрат местной скорости звука, $H = gY$ — произведение ускорения силы тяжести на функцию, характеризующую наклонный берег, y^* — высоту жидкости, отсчитанную от первоначально невозмущенного уровня жидкости.

Будем искать решение системы (1.2), (4.1) в виде простой волны, т. е. допустим, что искомые функции зависят от t и x неявно, через скорость звука. (Для берега с нулевым наклоном простая волна была исследована Стокером [3]). Имеем

$$\frac{dv}{da}\frac{\partial a}{\partial t} + \left(v\frac{dv}{da} + 2a - \frac{dH}{da}\right)\frac{\partial a}{\partial x} = 0 \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \left(v + \frac{a}{2}\frac{dv}{da}\right)\frac{\partial a}{\partial x} = 0$$

Исключая тривиальный случай, найдем условие совместности системы (4.2)

$$\left(\frac{dv}{da}\right)^2 = 4\frac{dgy^*}{da^2} \tag{4.3}$$

Из последнего уравнения системы (4.2) определим зависимость скорости звука от независимых переменных

$$x - \left\{v + \frac{a}{2}\frac{dv}{da}\right\}t = F(a) \tag{4.4}$$

где F — произвольная функция, вид которой находится из дополнительных условий, наложенных на поток.

Используя полученные простые волны, рассмотрим частный случай, когда $gy^* = A^2a^2$, $A = \text{const}$. В этом случае $H = gY = a^2(1 - A^2)$, а скорость звука и скорость жидкости связаны соотношением

$$v \pm 2A(a - a_0) = 0 \tag{4.5}$$

представляющим собой решение уравнения (4.3), удовлетворяющее начальному условию $v = v_0 = 0$, $a = a_0$ при $t = 0$.

Зависимость скорости звука от расстояния и времени получается из уравнения (4.4)

$$x - (v_0{}^\circ \pm 3Aa)t = F(a), \qquad v_0{}^\circ = \pm 2Aa_0$$

Вид функции $F(a)$ находим из начального условия

$$a_0{}^2 = g(h - mx) \qquad \text{при } t = 0.$$

Имеем

$$x = F(a_0) = \frac{h}{m} - \frac{a_0}{mg}$$

Тогда получается зависимость

$$2a_{1,2} = \{(3Amgt)^2 + 4g[h - m(x - v_0{}^\circ t)]\}^{1/2} \pm 3Amgt,$$

которая вместе с уравнением (4.5) описывает простую волну, полученную в результате изменения берега реки, имевшего в начальный момент времени постоянный наклон $m(Y = h - mx)$ и изменявшегося в дальнейшем по закону $gY = (1 - A^2)a^2$.

Полученная зависимость профиля дна реки от координаты и времени находится в согласии с замечаниями Седдона [10] о том, что большие реки и каналы не имеют дна с равномерным наклоном. Наклон дна реки подвержен, прежде всего, многочисленным изменениям в малом (поперек реки и вниз по потоку на расстояниях, сравнимых с шириной реки). Кроме того, в аллювиальных реках дно реки постоянно меняется со временем.

Автор благодарен С. В. Фальковичу за ценные указания.

Поступило 20 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Риман Б. О распространении плоских волн конечной амплитуды. Сочинения. М., Гостехиздат, 1948.
2. Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. М., Изд-во АН СССР, 1938.
3. Стокер Д. Д. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
4. Sachdev P. L., Bhatnagar P. L. Propagation of a bore produced by the sudden break of a dam. Quart. Mech. Appl. Math., 1969, vol. 22, No. 4, pp. 501—512.
5. Jeffrey A. The breaking of waves on a sloping beach. ZAMP, 1964, vol. 15, No. 7, pp. 97—106.
6. Lighthill M. J., Whitham G. B. On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers. Proc. Roy. Soc., 1955, A229, pp. 281—316.
7. Lighthill M. J. Waves in fluids. Communs. Pure Appl. Math., 1967, vol. 20, No. 2, pp. 267—293.
8. Lax P. The initial value problem for nonlinear hyperbolic equations in two independent variables. Ann. Math. Stud., 1954, vol. 33, pp. 211—229.
9. Jeffrey A., Taniuti T. Nonlinear wave propagation. With application to physics and magnetohydrodynamics. N. Y., Acad. Press, 1964.
10. Seddon J. A. River hydraulics. Trans. Amer. Soc. Civ. Ingrs, 1900, vol. 43, pp. 179—243.