

УДК 532.59:532.529.2

ВНУТРЕННИЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ И КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОСТИ

М. Ш. ГИТЕРМАН, В. А. ШТЕЙНБЕРГ

(Москва)

Исследуется взаимосвязь условий конвективной неустойчивости с условием существования внутренних гравитационных волн в жидкости при наличии градиента плотности по высоте как из-за гравитационного поля, так и из-за градиента температуры и концентрации, в частности, вблизи критических точек чистых жидкостей и бинарных смесей. Оценивается ошибка при измерении коэффициента теплопроводности вблизи критической точки, связанная с распространением внутренних гравитационных волн.

1. Внутренние гравитационные волны (ВГВ) и конвективная неустойчивость жидкости — явления, связанные общей природой: наличием существенной неоднородности плотности по высоте слоя жидкости, и описывающиеся одними и теми же уравнениями. ВГВ распространяются в механически равновесной жидкости, если восстанавливающая сила отлична от нуля [1]. Различные диссипативные механизмы приводят к затуханию колебаний и сдвигают границу существования ВГВ в сторону положительных градиентов температуры, в то же время в случае конвективной неустойчивости порог конвекции сдвигается в сторону отрицательных градиентов. Ниже на отдельных примерах выясняется взаимное расположение границы существования ВГВ и границы конвективной неустойчивости как стационарной, так и колебательной.

2. Известно, что при небольших высотах слоя жидкости l , когда существенны диссипативные механизмы (случай Рэлея), система уравнений гидродинамики несжимаемой вязкой и теплопроводной жидкости имеет колебательные, затухающие во времени решения при любом, отличном от нуля, положительном градиенте температуры, и только стационарные решения, начиная с некоторого отрицательного градиента температуры [2]. Эти слабо затухающие во времени колебательные решения и есть ВГВ. Действительно, из системы уравнений для малых возмущений в случае Рэлея для свободных границ [3], видно, что дисперсионное уравнение в безразмерных переменных имеет следующий вид:

$$\omega = -i \frac{1 + P_T}{P_T} (n^2 \pi^2 + k^2) \pm \frac{n^2 \pi^2 + k^2}{k^2} \left[\omega_n^2 - k^4 \left(\frac{1 - P_T}{2P_T} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\omega_n = \omega_0 \left(1 + \frac{n^2 \pi^2}{k^2} \right)^{-3/2}, \quad \omega_0 = \left(-\frac{R}{P_T} \right)^{1/2}, \quad R = \frac{A_0 \beta g l^4}{\nu \kappa},$$

$$P_T = \frac{\nu}{\kappa}, \quad A_0 = -\frac{dT}{dz}$$
(2.1)

Здесь R — число Рэлея, ν и κ — соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости и температуропроводности, P_T — число Прандтля, A_0 — градиент температуры, β — коэффициент теплового расширения, ω_0 — предельная частота ВГВ (частота Вязисля), ω_n — набор собственных частот для граничной задачи.

Условием существования ВГВ из (2.1) будет

$$\omega_n^2 - k^4 \left(\frac{1 - P_T}{2P_T} \right)^2 \gg 0$$
(2.2)

Поэтому граница существования ВГВ, выраженная через градиент температуры (плотности), имеет вид

$$R = -\gamma_0(k)P_T \left(\frac{1 - P_T}{2P_T} \right)^2, \quad \gamma_0(k) = (n^2\pi^2 + k^2)^3 k^{-2} \quad (2.3)$$

Из (2.3) видно, что при $P_T \neq 1$ граница существования ВГВ зависит от значения длины волны, причем имеется длина волны, равная $k_0 = 2^{-1/2}n\pi$, при которой предельный градиент температуры минимален (по абсолютной величине) и равен

$$R_1 = -657,5n^4 P_T \left(\frac{1 - P_T}{2P_T} \right)^2 \quad (2.4)$$

При $R < R_1$ ВГВ существуют со значениями длин волн, попадающими в интервал допустимых значений. Волны со значениями длины вне этого интервала затухают, при этом имеется две затухающие моды — вязкая и теплопроводная:

$$\omega_1 = -i(n^2\pi^2 + k^2), \quad \omega_2 = -iP_T^{-1}(n^2\pi^2 + k^2)$$

Известно, что граница конвективной неустойчивости в случае Рэлея при $k_0 = 2^{-1/2}\pi$ для свободных границ определяется соотношением $R_2 = \gamma_0 \neq 0$, где $\gamma_0 = 657.5$. Таким образом, при $R_1 < R < R_2$ жидкость еще механически устойчива, а ВГВ уже не существуют¹.

3. Как было показано в [5], для сжимаемой вязкой и теплопроводной жидкости, находящейся вблизи критической точки кроме ветви стационарной неустойчивости появляется ветвь колебательной неустойчивости. Поэтому интересно рассмотреть взаимосвязь границ существования ВГВ и конвективной неустойчивости в этом случае. Однако получающееся дисперсионное уравнение четвертого порядка по ω очень громоздко даже для случая свободных границ. Так как диссипация незначительно сдвигает границу существования ВГВ, рассмотрим ВГВ в идеальной сжимаемой жидкости, а затем исследуем связь границы их существования с конвективной неустойчивостью вблизи критической точки T^* . ВГВ в идеальной сжимаемой жидкости описываются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= -\frac{\nabla p'}{\rho_0} + \frac{g\beta T}{c_p} S' \mathbf{v} - \frac{g}{\rho_0 c_s^2} p' \mathbf{v} \\ \frac{1}{\rho_0 c_s^2} \frac{\partial p'}{\partial t} &= \frac{g}{c_s^2} \mathbf{V} \mathbf{v} - \text{div } \mathbf{V} \\ \frac{\partial S'}{\partial t} &= -\frac{dS_0}{dz} \mathbf{V} \mathbf{v}, \quad c_s^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \end{aligned} \quad (3.1)$$

При этом считаем равновесные градиенты плотности и энтропии вертикальными и постоянными. Здесь \mathbf{V} — скорость возмущения в жидкости, $\rho_0(z)$ и $S_0(z)$ — ее равновесные плотность и энтропия (зависимость от вертикальной координаты связана с гравитационным полем и внешним гра-

¹ Условие существования ВГВ (2.2), дисперсионное соотношение (2.4) и выражение для характерной предельной частоты совпадают с полученными в [4] соответствующими выражениями при рассмотрении ВГВ в сверхтекучем растворе. Критерий возникновения конвекции здесь, как и в задаче Рэлея для обычной жидкости, вопреки тому, что говорится в работе [4], определяется из задачи на собственные значения. Число γ_0 в этом случае оказывается равным 657.5 при свободных границах, как и для обычной жидкости, а для твердых границ $\gamma_0 \approx 7500$, что сильно отличается от значения критерия конвекции в обычной жидкости ($\gamma_0 = 1707.8$). Это связано с более высоким порядком уравнения движения для сверхтекучего раствора.

диентом температуры $\nabla T_0 = -A_0 \mathbf{y}$), \mathbf{y} — единичный вектор, направленный вертикально вверх вдоль оси z , S' и p' — отклонения энтропии и давления от равновесных значений, вызванные возмущением; c_p — теплоемкость при постоянном давлении, c_s — адиабатическая скорость звука. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$\chi^2 = -k^2 \left[\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 c_s^2}\right) + \left(\frac{g}{c_s^2} + \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz}\right)^2 k^{-2} \right] \quad (3.2)$$

а χ определяется из уравнения для собственных значений задачи. В случае твердых границ ($V_z = 0$ при $z = 0, l$) решение этого уравнения имеет вид

$$\chi l = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Выражение для предельной частоты ВГВ в (3.2) имеет вид

$$\omega_0^2 = \frac{g\beta T}{c_p} \frac{dS_0}{dz} \quad (3.4)$$

и граница существования ВГВ определяется равенством

$$A_0 = g\rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \left(1 - \frac{cv}{c_p}\right) \quad (3.5)$$

совпадающим с критерием Шварцшильда [3].

С приближением к критической точке граница конвективной неустойчивости сжимаемой вязкости и теплопроводной жидкости приближается к (3.5) — адиабатическому градиенту [6] — и, значит, приближается к границе существования ВГВ, т. е. при достаточной близости к T_* они совпадают, как и в случае Шварцшильда. Однако, как показано в [5], при достаточной близости к T_* (при $\lg(\partial\rho/\partial p)_T > 1$) появляется колебательная ветвь конвективной неустойчивости, которая стремится к адиабатическому градиенту снизу. Поэтому при таких температурах увеличение внешнего градиента температуры приводит сначала к переходу от ВГВ к колебательной конвекции, а затем — к стационарной конвекции. Этот результат было бы интересно проверить экспериментально.

В случае нижней границы твердой ($V_z = 0$ при $z = 0$), а верхней — свободной ($V_z = \omega^2 (gk^2)^{-1} dV_z/dz$ при $z = l$ [1]), уравнение для собственных значений имеет вид

$$\operatorname{tg} \chi l = \chi l \frac{\omega^2}{gk^2 l} \left[1 + \frac{\omega^2}{2gk^2 \rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right]^{-1} \quad (3.6)$$

и дает в дисперсионном уравнении (3.2) помимо ВГВ и волн акустического типа также и поверхностную волну (ей соответствует единственный мнимый корень уравнения (3.6) с законом дисперсии $\omega^2 = gk \operatorname{th} kl$). Для однородной жидкости поправки к дисперсионному закону определяются величиной gl/c_s^2 .

Аналогично может быть рассмотрена поверхностная волна, распространяющаяся вдоль границы раздела двух сжимаемых жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 . В этом случае дисперсионное соотношение, содержащее акустические, внутренние и поверхностные ветви, определяется совместным решением уравнений (3.2) для верхней и для нижней сред и граничным условием на поверхности раздела

$$\chi_1 \rho_1 + \chi_2 \rho_2 = (\rho_1 - \rho_2) \frac{gk^2}{\omega^2} \quad (3.7)$$

Наличием поверхностных волн объясняются эксперименты Л. А. Макаревича¹, которые при дальнейшем усовершенствовании и доведении до количественных результатов могут быть использованы для исследования критического состояния².

4. Связь между границей существования ВГВ и обеими ветвями конвективной неустойчивости рассмотрим на примере горизонтального слоя бинарной смеси, где, как известно, существуют обе эти ветви [8]. Представляя решение системы безразмерных уравнений для малых возмущений в бинарной смеси [9] в виде плоской волны $V_z, T', C' \sim \exp[-i(\omega t - kr)]$, легко получить для свободных границ кубическое дисперсионное уравнение, из которого при малых волновых числах k ($k^4 \ll \omega_n^2$, т. е. вдали от границы существования волн) имеем три решения (при этом, так как смесь считаем несжимаемой, должно выполняться неравенство (2.2))

$$\omega_{\pm} = -\frac{1}{3}i(n^2\pi^2 + k^2)\varphi_1 \pm \omega_n, \quad \omega = -\frac{1}{3}i(n^2\pi^2 + k^2)\varphi_2$$

$$\omega_n = \omega_0 \left(1 + \frac{n^2\pi^2}{k^2}\right)^{-3/2}, \quad \omega_0 = \left[-\left(\frac{R_T}{P_T} + \frac{R_C}{P_C}\right)\right]^{1/2} \quad (4.1)$$

$$\varphi_1 = [6P_C P_T (R_T P_C + R_C P_T)]^{-1} \{R_T P_C [(4 - 3\alpha)P_T + 7P_C(1 + a_1 + P_T)] + R_C P_T [7P_T(1 + P_C) + 4P_C(1 + a_1) - 3a_1 P_C \alpha^{-1}]\},$$

$$\varphi = [3P_C P_T (R_T P_C + R_C P_T)]^{-1} \{R_T P_C [(5 + 3\alpha)P_T + 2P_C(1 + a_1 + P_T)] + R_C P_T [2P_T(1 + P_C) + P_C(5 + 5a_1) + 3a_1 P_C \alpha^{-1}]\}$$

Здесь R_T и R_C — температурное и диффузионное числа Рэлея; P_T и P_C — числа Прандтля и Шмидта; a_1 и α — безразмерные параметры, характеризующие перекрестные эффекты — термодиффузию и дополнительный перенос тепла из-за наличия диффузии.

Первое решение в (4.1), очевидно, представляет собой гравитационную волну с затуханием из-за диссипативных механизмов, а второе — загужающую волну. При $k^4 \gg \omega_n^2$ имеем аperiodическое решение. Область существования комплексно сопряженных корней дисперсионного уравнения, описывающих колебательные возмущения, ограничивается дискриминантной кривой $\Delta = 0$. Граница колебательной конвективной неустойчивости, на которой обращается в нуль декремент колебательных возмущений, всегда лежит внутри указанной области, т. е. граница существования ВГВ в этом случае всегда находится в области конвективной неустойчивости. Следовательно, граница возникновения колебательной конвекции одновременно является и границей существования ВГВ. Естественно, что в случае стационарной конвективной неустойчивости это не так. В общем случае дискриминантная кривая $\Delta = 0$ представляет собой сложную кривую третьего порядка в плоскости (R_T, R_C) .

В пренебрежении перекрестными эффектами ($a_1 = \alpha = 0$) взаимное расположение дискриминантной кривой ($\Delta = 0$) и границ стационарной ($R^{(s)}$) и колебательной ($R^{(0)}$) конвективной неустойчивостей приведено на фигуре при разных соотношениях чисел Прандтля и Шмидта.

При $P_T \neq P_C$ дискриминантная кривая $\Delta = 0$ представляет собой кривую третьего порядка, характерные точки которой определяются следующими координатами:

точка возврата имеет координаты

$$R_T = \frac{\gamma_0 P_C}{27 P_T (P_T - P_C)} \left[2 - \frac{P_T}{P_C} (1 + P_C) \right]^3$$

¹ Эти эксперименты подробно описаны в диссертации Л. А. Макаревича «Термодинамические свойства разбавленных растворов в критической фазе», М., 1967 г.

² Впервые на это было обращено внимание одним из авторов [7]. К сожалению, в работе [7] приведено решение уравнений гидродинамики при несоответствующих эксперименту граничных условиях, поэтому некоторые формулы в работе [7] неверны, например, дисперсионные соотношения (4) и (6) в [7] следует заменить соотношениями (3.2), (3.6), (3.7) данной работы.

$$R_c = \frac{\gamma_0 P_T}{27 P_c (P_c - P_T)} \left[2 - \frac{P_c}{P_T} (1 + P_T) \right]^3 \quad (4.2)$$

угол наклона касательной в этой точке определяется из соотношения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2(P_c - P_T)^2 - P_c P_T (P_T - 1) (P_c - 1)}{(P_c - P_T)^2 + P_T (P_c - 1) (2P_c - 3P_T + P_c P_T)} \quad (4.3)$$

а координаты точек касания кривой $\Delta = 0$ с осями R_T и R_C соответственно равны

$$\begin{aligned} R_T &= \gamma_0 P_c^{-2} (P_c - 1) (P_c - P_T), \\ R_C &= \gamma_0 P_T^{-2} (P_T - 1) (P_T - P_c) \end{aligned} \quad (4.4)$$

и для свободных границ $\gamma_0(k) = (n^2 \pi^2 + k^2)^3 k^{-2}$. Из графиков при $P_T \neq P_c$ видно, что границей существования ВГВ (сплошная кривая) будет либо кривая $\Delta = 0$, либо, где эта кривая проходит в области конвективной неустойчивости, соответствующие ветви конвективной неустойчивости, т. е. граница существования ВГВ в общем случае не определяет конвективной неустойчивости.

При $P_T = P_c = P$, когда имеет место только монотонная неустойчивость, дискриминантная кривая $\Delta = 0$ вырождается в прямую и граница существования ВГВ определяется уравнением

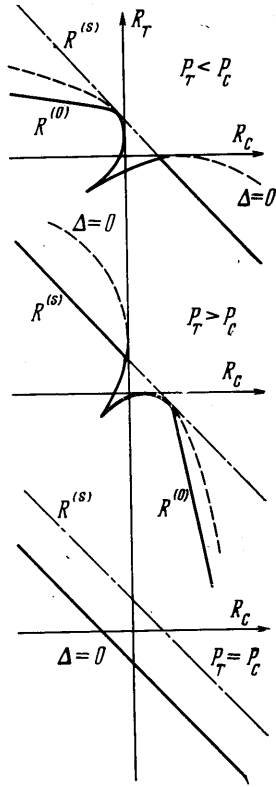
$$\begin{aligned} R_T + R_C &= \quad (4.5) \\ &= -\gamma_0(k) \frac{(P-1)^2}{12P^2} \{P + 4(P-1) [3(1+P^3)]^{1/2}\} \end{aligned}$$

Левая часть уравнения (4.5) пропорциональна градиенту плотности. При $P \neq 1$ граница существования ВГВ зависит, как и в случае чистой жидкости, от значения длины волны, причем минимальное значение $\gamma_0(k)$ $657.5 n^4$ при $k_0 = 2^{-1/2} n \lambda$. При $P = 1$ граница существования ВГВ не зависит от k и определяется нулевым градиентом плотности. Таким образом, при $P_T = P_c$ и любых значениях R_T и R_C имеется «щель» в значениях градиента плотности между границами существования ВГВ и монотонной конвективной неустойчивости.

Следующий важный для эксперимента эффект состоит в обращении в нуль диффузионного потока, что соответствует соотношению $R_c P_T = \alpha R_T P_c$. Тогда граница существования ВГВ при $P_c = P_T = 1$ и $a_1 \ll 1$ определяется выражением

$$R_T = \frac{27}{4} \gamma_0 \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^3} \quad (4.6)$$

Из (4.6) видно, что при $\alpha = -1$ ВГВ не распространяются в бинарной смеси. Причина этого следующая: при $\alpha = -1$ и любом значении внешнего градиента температуры в бинарной смеси благодаря термодиффузии создается такой градиент концентрации, что градиент плотности всегда равен нулю, и в такой системе не могут существовать ВГВ.



Особым случаем будет окрестность критической линии бинарных смесей, когда в уравнениях для малых возмущений в бинарной смеси следует учесть сжимаемость в равновесном состоянии [9]. Тогда граница существования ВГВ приближается к границе конвективной неустойчивости и на самой критической линии определяется следующим выражением:

$$R_T = P_T \left(\frac{\varepsilon}{\alpha P_c} \right)_{(a)}, \quad \varepsilon = \frac{(g\beta_2 l^2)^2}{\nu D \mu_c}, \quad (4.7)$$

$$\mu_c = \left(\frac{\partial \mu}{\partial C} \right)_{p,T}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{p,T}$$

Здесь μ — химический потенциал, C — концентрация, индексом (a) обозначены термодинамические величины вдали от линии критических точек смешения.

Это значение предельного градиента температуры для бинарной смеси аналогично адиабатическому градиенту температуры (критерию Шварцшильда), который характеризует устойчивость и границу существования ВГВ вблизи критической точки чистой жидкости. При этом характерная частота Вязисля в бинарной смеси вблизи линии критических точек смешения, как и в случае чистой жидкости [10], стремится к бесконечности, как $(T - T_*)^{-1}$. Различие границ возникновения конвекции и существования ВГВ имеет место и для максвелловской вязко-упругой жидкости, где также возможны оба типа конвективной неустойчивости. Расчет аналогичен случаю бинарной смеси и здесь для краткости не приводится. Таким образом, в общем случае граница существования ВГВ совпадает с границей возникновения колебательной конвекции и не совпадает с границей возникновения стационарной конвекции.

5. При измерении теплопроводности жидкости эксперимент ставят таким образом, чтобы в системе не возникала конвекция. Так, при измерении теплопроводности в горизонтальном слое жидкости нагрев производят сверху. Однако вблизи критической точки линейный градиент устанавливается достаточно долго [11], причем его установление сопровождается прохождением тепловой волны, которая будет приводить к распространению вдоль слоя жидкости ВГВ, уносящих энергию, и, следовательно, искажающих результаты измерения коэффициента теплопроводности¹.

Плотность энергии, переносимой волной, равна [2]

$$E = \rho_0 \omega^2 a^2 \quad (5.1)$$

где a — амплитуда волны, ω — частота, на которой распространяется гравитационная волна.

При измерении коэффициента теплопроводности

$$\lambda = ql(T_2 - T_1)^{-1} \quad (5.2)$$

где q — подводимый тепловой поток; $T_2 - T_1$ — разность температур на границах слоя жидкости высотой l . Ошибка, связанная с существованием ВГВ в системе, проявляется в отличии фактически измеренной разности температур на границах слоя от $T_2 - T_1$ на δT . При этом относительная ошибка температуры, равная относительной ошибке в измерении теплопроводности $\delta\lambda/\lambda$, следующим образом связана с плотностью потока энергии гравитационных волн частоты ω

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta T}{T_2 - T_1} \sim \frac{E\omega}{kq} \quad (5.3)$$

¹ Источником гравитационных волн могут быть и любые внешние возмущения, сопровождающие эксперимент.

Из предыдущего видно, что частота, на которой распространяется гравитационная волна в жидкости, пропорциональна характерной частоте Вязяля. Поэтому окончательно имеем

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} \sim \frac{\rho_0 a^2}{kq} \omega_0^3 \quad (5.4)$$

Так как здесь рассматриваются малые возмущения в жидкости, то амплитуда волны a будет малой величиной ($ka \ll 1$) [3], и в общем случае эта ошибка при измерении теплопроводности мала. Однако вблизи критической точки системы жидкость — пар T_* , где, как известно [12], сжимаемость $(\partial\rho/\partial p)_T$ сильно возрастает, $\omega_0^2 \sim (\partial\rho/\partial p)^T$ также имеет особенность, и в выражении (5.4) с приближением к критической точке T_* появляется большой параметр $(T - T_*)^{-3/2}$. Следовательно, и ошибка, связанная с распространением ВГВ в такой системе, при измерении теплопроводности может стать существенной. Те же соображения можно привести и при измерении теплопроводности бинарной смеси вблизи линии критических точек, так как здесь

$$\omega_0^2 \sim \left(\frac{\partial\mu}{\partial C} \right)_{p,T}^{-1} \sim \frac{1}{T - T_*} \quad (5.5)$$

Таким образом, мнимый пик при измерении теплопроводности вблизи критических точек жидкостей может быть связан с распространением в жидкости ВГВ.

Следовательно, три связанные с неоднородностью системы явления — колебательная и стационарная конвекции, внутренние гравитационные волны — характеризуются, вообще говоря, различными условиями возникновения, связь которых показана выше для всех практически важных случаев. Интересно было бы экспериментально наблюдать чередование режимов, например, при изменении внешнего градиента температуры.

Авторы благодарны В. Д. Хаиту за сделанные замечания.

Поступило 15 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Эккарт К. Гидродинамика океана и атмосферы. М., Из-во иностр. лит., 1963.
2. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред, Изд. 2. М., Гостехиздат, 1954.
4. Паршин А. Я. Внутренние гравитационные волны в сверхтекучем растворе. Письма в ЖЭТФ, 1969, т. 10, № 11.
5. Штейнберг В. А. Колебательная конвективная неустойчивость сжимаемой жидкости, находящейся вблизи критической точки жидкость — пар. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
6. Гитерман М. Ш., Штейнберг В. А. Критерии возникновения свободной конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
7. Гитерман М. Ш. Исследование критического состояния жидкости с помощью гравитационных волн. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 6, стр. 1298.
8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости двухкомпонентной смеси в поле тяжести. ПММ, 1963, т. 27, вып. 2.
9. Штейнберг В. А. Конвективная неустойчивость двухкомпонентной смеси, в частности, вблизи критической точки. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
10. Хаит В. Д. О гравитационных волнах в газе вблизи критической точки перехода газ — жидкость. ЖЭТФ, 1969, т. 57, № 1 (7).
11. Гитерман М. Ш., Штейнберг В. И. Установление теплового равновесия и возникновение конвекции в жидкости, находящейся вблизи критической точки. Теплофизика высоких температур, в печати.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, т. 5. Статистическая физика. М., «Наука», 1964.