

УДК 532.556.4:532.011.12

МЕДЛЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КОНИЧЕСКОМ ДИФфуЗОРЕ

В. И. КЕРЧМАН

(Москва)

Показана применимость приближения Стокса на больших расстояниях от вершины конуса. Обсуждается постановка задачи и построены новые асимптотические представления решения, заменяющие парадоксальное решение Харрисона для углов при вершине конуса $\alpha \geq 120^\circ$.

Решение задачи о стоксовом осесимметричном течении вязкой жидкости в коническом диффузоре было впервые получено Харрисоном [1] (см. также [2, 3]). Поле скоростей этого течения имеет вид

$$v_R = \frac{3Q}{2\pi R^2} \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)}, \quad v_\theta = 0 \quad (0.1)$$

где R, θ — сферические координаты, $\theta = 0$ соответствуют оси, а $\theta = \alpha$ — стенке диффузора, Q — объемный расход жидкости. Заметим, что значения скорости в этом чисто радиальном течении стремятся к бесконечности, когда угол α приближается к 120° .

1. Вводя функцию тока Ψ

$$v_R = \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \quad (1.1)$$

уравнения Навье — Стокса для установившегося осесимметричного течения несжимаемой вязкой жидкости можно привести к виду

$$\nu D^4 \Psi + (1 - \tau^2) \frac{\partial \{ \Psi, [R^2 (1 - \tau^2)]^{-1} D^2 \Psi \}}{\partial \{ R, \tau \}} = 0 \quad (1.2)$$

$$\tau = \cos \theta, \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{\sin \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1 - \tau^2}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$$

Поле скоростей должно быть регулярно внутри конуса и исчезать на бесконечности, т. е. $\Psi = o(R^2)$ при $R \rightarrow \infty$. При $\theta = \alpha$ должно выполняться условие прилипания

$$\partial \Psi / \partial \theta = 0, \quad \Psi = \text{const} \quad (1.3)$$

К этому добавляется условие постоянства расхода в каждом сечении

$$2\pi [\Psi(R, \alpha) - \Psi(R, 0)] = Q \quad (1.4)$$

Если поле скоростей достаточно быстро исчезает на бесконечности, так что $\Psi = O(R^\lambda)$, где $\lambda < 1$, при $R \rightarrow \infty$, то при достаточно больших $\rho = \nu R / Q$ уравнение (1.2) можно заменить уравнением Стокса

$$D^4 \Psi = 0 \quad (1.5)$$

Поэтому на большом удалении от вершины конуса течение будет описываться решением задачи (1.3) — (1.5).

Физической реализацией точечного стока Q в вершине конуса служит установившееся истечение жидкости из конического сосуда через отверстие малого диаметра d с тем же расходом Q . Анализ размерностей позволяет представить решение этой задачи для уравнения (1.5) в виде

$$\Psi = Q\Psi_1(R/d, \theta) \quad (1.6)$$

Асимптотический вид решения на больших расстояниях от отверстия, т. е. при $R/d \rightarrow \infty$, должен совпадать с решением задачи (1.3)–(1.5). Обычное предположение состоит в том, что при $R/d \rightarrow \infty$ функция Ψ_1 будет функцией только от θ , что приводит к решению (0.1). Но последнее становится недействительным при $\alpha = 120^\circ$, а при $\alpha > 120^\circ$ меняет знак на противоположный. Между тем приближение Стокса, безусловно, применимо при достаточно больших R . Это дает основания предполагать, что предельный переход при $R/d \rightarrow \infty$ нерегулярен.

2. Следуя общим принципам исследования автомодельных решений, появляющихся при нерегулярных предельных переходах [4], предположим, что при $R/d \rightarrow \infty$ остается конечной комбинация

$$\frac{\Psi_1(R/d, \theta)}{(R/d)^\lambda} \rightarrow F(\theta) \quad (0 < \lambda < 2) \quad (2.1)$$

Сумма решения задачи (1.3)–(1.5) и любого решения с нулевым расходом, удовлетворяющего условиям прилипания (1.3) («самоуравновешенного»), также есть решение задачи (1.3)–(1.5).

Поэтому если существует самоуравновешенное решение вида

$$\Psi = R^\lambda F(\theta) \quad (2.2)$$

при $\lambda > 0$, то именно это решение, а не решение Харрисона, которое быстрее убывает на бесконечности, следует принять в качестве главного члена асимптотики решения неавтомодельной задачи (1.5) на больших расстояниях от отверстия.

Дифференциальное уравнение для функции F имеет вид

$$\Phi'' - \Phi' \operatorname{ctg} \theta + (\lambda - 2)(\lambda - 3)\Phi = 0 \quad (2.3)$$

$$\Phi(\theta) = F''(\theta) - F'(\theta) \operatorname{ctg} \theta + \lambda(\lambda - 1)F(\theta) \quad (2.4)$$

Заменой $\Phi = \varphi \sin \theta$ уравнение (2.3) приводится к уравнению Лежандра для функции φ , общее решение которого

$$\varphi(\theta) = A_1 P_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta) + B_1 Q_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta)$$

После замены $F = \chi \sin \theta$ получим из (2.4) неоднородное уравнение Лежандра для функции χ

$$\begin{aligned} \chi'' + \chi' \operatorname{ctg} \theta + [\lambda(\lambda - 1) - \sin^{-2} \theta] \chi = \\ = A_1 P_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta) + B_1 Q_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Заметим, что функции $P_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta)$ и $Q_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta)$ есть собственные функции оператора, стоящего в левой части. Поэтому общее выражение для функции $F(\theta)$

$$\begin{aligned} F(\theta) = [A P_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta) + B Q_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta) + \\ + C P_{-\lambda}^{-1}(\cos \theta) + D Q_{-\lambda}^{-1}(\cos \theta)] \sin \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

Если λ или $\lambda - 2$ — целое неотрицательное, то вместо $P_{-\lambda}^{-1}(\cos \theta)$ и $P_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta)$ следует брать нетривиальные решения уравнения Лежандра $P_{-\lambda}^{-1}(\cos \theta)$ и $P_{2-\lambda}^{-1}(\cos \theta)$ соответственно. При $\lambda = 3/2$ частное решение уравнения (2.5) есть

$$\chi = A \frac{d}{ds} P_{3/2}^{-1}(\cos \theta) \Big|_{s=1/2} + B \frac{d}{ds} Q_{3/2}^{-1}(\cos \theta) \Big|_{s=1/2}$$

Для самоуравновешенного решения должны выполняться условия

$$F(0) = F(\alpha) = 0, \quad F'(0) < \infty, \quad F'(\alpha) = 0 \quad (2.7)$$

Из условий при $\theta = 0$ имеем $B = D = 0$. Из условий при $\theta = \alpha$ получим характеристическое уравнение для определения λ , которое приводится к виду

$$P_{2-\lambda}^1(\cos \alpha)P_{-\lambda}^2(\cos \alpha) - P_{-\lambda}^1(\cos \alpha)P_{2-\lambda}^2(\cos \alpha) = 0 \quad (2.8)$$

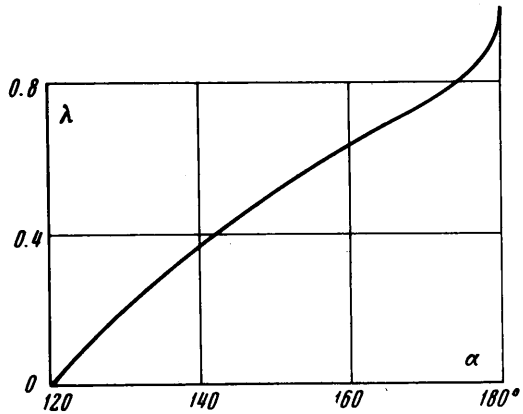
с соответствующими изменениями для $\lambda = 0, 1, 3/2$.

Как показывает численный анализ, уравнение (2.8) имеет решение $\lambda = \lambda(\alpha)$, где $2 > \text{Re } \lambda > 0$, лишь при $\alpha > 120^\circ$. Это решение действительное и единственное, причем $\lambda < 1$, что доказывает применимость приближения Стокса. График зависимости $\lambda = \lambda(\alpha)$ приведен на фигуре.

3. Таким образом, следует различать три возможности.

1. $0 < \alpha < 120^\circ$. Асимптотическое представление решения на больших расстояниях от вершины конуса имеет вид

$$v_r = \frac{3Q}{2\pi R^2} \times \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)} + o\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad v_\theta = o\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (3.1)$$



Течение асимптотически радиальное, главный член разложения есть автомодельное решение первого рода ([4]), не зависит от распределения скоростей в отверстии и определяется расходом Q . Поэтому можно говорить о точечном стоке в вершине конуса.

2. $120^\circ < \alpha < 180^\circ$. Асимптотическое представление решения

$$v_r = \frac{A}{R^{2-\lambda} \sin^2 \theta} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [P_{-\lambda}^1(\cos \alpha) \sin \alpha] \frac{d}{d\theta} [P_{2-\lambda}^1(\cos \theta) \sin \theta] - \frac{d}{d\alpha} [P_{2-\lambda}^1(\cos \alpha) \sin \alpha] \frac{d}{d\theta} [P_{-\lambda}^1(\cos \theta) \sin \theta] \right\} + \frac{3Q}{2\pi R^2} \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)} + o\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad (3.2)$$

$$v_\theta = -\frac{\lambda A}{R^{2-\lambda}} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [P_{-\lambda}^1(\cos \alpha) \sin \alpha] P_{2-\lambda}^1(\cos \theta) - \frac{d}{d\alpha} [P_{2-\lambda}^1(\cos \alpha) \sin \alpha] P_{-\lambda}^1(\cos \theta) \right\} + o\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

имеет главным членом автомодельное решение второго рода [4], показатель λ определяется не из соображений размерности, а из уравнения (2.9), которое отражает условие существования решения в целом. Коэффициент

A не может быть определен в автомодельной постановке задачи и пропорционален $Qd^{-\lambda}$. Выражение для коэффициента A , пригодное для малых чисел Рейнольдса $Q/(vd)$, получено ниже. Второй член этого асимптотического разложения есть классическое (автомодельное первого рода) решение (0.1), которое обеспечивает постоянный расход Q .

3. $\alpha = \alpha_* = 120^\circ$. В этом случае решение, как будет показано ниже, имеет неавтомодельную асимптотику.

4. Можно видоизменить неавтомодельную постановку рассматриваемой задачи, отражающую физическую сущность понятия о точечном стоке, так, что оказывается возможным получить точную асимптотику решения (1.6) при $R/d \rightarrow \infty$. Используется методика, примененная Штернбергом и Койтером [5] к разрешению парадокса Карозерса в плоской теории упругости.

Поставим модифицированную задачу: пусть на продолжении стенок диффузора, на расстоянии $R \leq a$ ($a = \frac{1}{2}d / \sin \alpha$) задано поле скоростей

$$v_R = \frac{1}{R^2 \sin^2 \alpha} \frac{\partial \Psi(R, \alpha)}{\partial \alpha} = U(R), \quad v_\theta = -\frac{1}{R \sin \alpha} \frac{\partial \Psi(R, \alpha)}{\partial R} = V(R) \quad (4.1)$$

причем эти условия совместны с условиями прилипания и постоянства расхода

$$U(a) = V(a) = 0, \quad 2\pi \int_0^a V(R) R dR \sin \alpha = -Q \quad (4.2)$$

К условиям (4.1), (4.2) при $R \leq a$ и (1.3) при $R \geq a$ добавляется требование регулярности, согласно которому

$$v_R, v_\theta \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow \infty \quad (0 \leq \theta \leq \alpha) \quad (4.3)$$

Для решения уравнения (1.5) с поставленными условиями применим преобразование Меллина

$$\psi(s, \theta) = \int_0^\infty \Psi(R, \theta) R^{s-1} dR \quad (4.4)$$

Уравнение (1.5) в изображениях примет вид

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} - \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta} + s(s+1) \right] \left[\frac{d^2}{d\theta^2} - \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta} + (s+2)(s+3) \right] \psi = 0$$

с условиями

$$\psi = 0, \quad d\psi/d\theta = 0, \quad \theta = 0 \quad (4.5)$$

Граничные условия при $\theta = \alpha$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{d}{d\alpha} \psi(s, \alpha) = \int_0^a U(R) R^{s+1} dR = u(s)$$

$$\frac{s}{\sin \alpha} \psi(s, \alpha) = \int_0^a V(R) R^{s+1} dR = v(s) \quad (4.6)$$

Согласно (2.3) — (2.6) решение уравнения (4.4) при условии (4.5) есть

$$\psi(s, \theta) = [A(s) P_{s+2}^1(\cos \theta) + C(s) P_s^1(\cos \theta)] \sin \theta \quad (4.7)$$

Удовлетворяя условиям (4.6), найдем

$$A(s) = \left\{ u(s) \sin^3 \alpha P_{s-1}(\cos \alpha) - \frac{v(s) \sin \alpha}{s} \frac{d}{d\alpha} [P_{s-1}(\cos \alpha) \sin \alpha] \right\} \Delta^{-1}(s, \alpha) \quad (4.8)$$

$$C(s) = \left\{ -u(s) \sin^3 \alpha P_{s+2}(\cos \alpha) + \frac{v(s) \sin \alpha}{s} \frac{d}{d\alpha} \times \right. \\ \left. \times [P_{s+2}(\cos \alpha) \sin \alpha] \right\} \Delta^{-1}(s, \alpha)$$

$$\Delta(s, \alpha) = \sin \alpha \left\{ P_{s-1}(\cos \alpha) \frac{d}{d\alpha} [P_{s+2}(\cos \alpha) \sin \alpha] - \right. \\ \left. - P_{s+2}(\cos \alpha) \frac{d}{d\alpha} [P_{s-1}(\cos \alpha) \sin \alpha] \right\} \quad (4.9)$$

По формуле обращения решение имеет вид

$$\Psi(R, \theta) = \frac{\sin \theta}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [A(s) P_{s+2}(\cos \theta) + C(s) P_{s-1}(\cos \theta)] R^{-s} ds \quad (4.10)$$

где в силу условия (4.3) контур интегрирования (4.10) должен лежать в полуплоскости $\text{Re } s > -2$.

Главные члены асимптотического выражения решения при $R \rightarrow \infty$ определяются вычетами относительно полюсов подынтегральной функции (4.9), расположенных ближе всего к линии $\text{Re } s = -2$. Подынтегральное выражение регулярно в полосе $-2 \leq \text{Re } s \leq -1$, поэтому эти полюсы совпадают с нулями знаменателя, расположенными в полуплоскости $\text{Re } s > -1$ и имеющими наименьшую действительную часть. Точка $s = 0$ есть нуль знаменателя, который простой, если $\alpha \neq 120^\circ$. Расположение остальных нулей при $\text{Re } s > -1$ зависит от угла α . Уравнение $\Delta(s, \alpha) = 0$ лишь множителем $\sin^2 \alpha$ отличается от уравнения (2.8) для $\lambda = -s$. Пусть s_1, s_2, \dots — нули знаменателя, расположенные в порядке возрастания $\text{Re } s$. Для случаев $0 < \alpha < 120^\circ$, $120^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\alpha = 120^\circ$ можно дать следующую классификацию:

- 1) $0 < \alpha < \alpha_* = 120^\circ$. Здесь $s_1 = 0$ (действительный простой корень). В полосе $-1 < \text{Re } s < 0$ нет других нулей;
- 2) $120^\circ < \alpha < 180^\circ$. В этом случае согласно предыдущему исследованию $-1 < s_1 = -\lambda(\alpha) < 0$ (действительный простой корень), $s_2 = 0$ (действительный простой корень);
- 3) $\alpha = \alpha_* = 120^\circ$. В этом критическом случае $s_1 = 0$ (действительный двухкратный корень).

Выберем путь интегрирования в виде границы полукруга радиуса H с центром в точке $s = c$ ($-2 < c < s_1$), расположенного в полуплоскости $\text{Re } s > -2$. Устремляя H к бесконечности, получим интеграл (4.9), равный поэтому сумме вычетов в полюсах s_k ($k = 1, 2, \dots$), умноженных на $(-2\pi i)$. Удобно перейти к переменной $r = R/a$. Кроме того, будем для простоты считать $\dot{U}(R) \equiv 0$. Обозначая $W(r) = -2\lambda^2 V(R) / Q$, перепишем условия (4.2) в виде

$$\sin \alpha \int_0^1 W(r) r dr = 1 \quad (4.11)$$

Учитывая, что

$$w(s) = \int_0^1 W(r) r^{s+1} dr = -\frac{2\pi v(s)}{Qa^s}, \quad w(0) = \frac{1}{\sin \alpha}$$

найдем

$$\Psi = \frac{Q \sin \theta}{2\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{w(s) \sin \alpha}{s \Delta(s, \alpha)} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [P_{s+1}^1(\cos \alpha) \sin \alpha] \times \right. \\ \left. \times P_{s+2}^1(\cos \theta) - \frac{d}{d\alpha} [P_{s+2}^1(\cos \alpha) \sin \alpha] P_{s+1}^1(\cos \theta) \right\} r^{-s} ds \quad (4.12)$$

Опуская выкладки, выпишем асимптотические выражения для Ψ при $r \rightarrow \infty$

$$\Psi = \frac{Q}{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta) [\cos \theta(1 + \cos \theta) + 1 - 3 \cos^2 \alpha]}{(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)} + o(1), \quad 0 < \alpha < 120^\circ \quad (4.13)$$

$$\Psi = \frac{Qw(-\lambda) \sin \alpha r^\lambda}{2\pi \lambda \Delta'(-\lambda, \alpha)} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [P_{-\lambda}^1(\cos \alpha) \sin \alpha] P_{2-\lambda}^1(\cos \theta) - \right. \\ \left. - \frac{d}{d\alpha} [P_{2-\lambda}^1(\cos \alpha) \sin \alpha] P_{-\lambda}^1(\cos \theta) \right\} \sin \theta + \\ + \frac{Q}{2\pi} \frac{(1 - \cos \theta) [\cos \theta(1 + \cos \theta) + 1 - 3 \cos^2 \alpha]}{(1 - \cos \alpha)^2 (1 + 2 \cos \alpha)} + o(1) \quad (4.14)$$

$120^\circ < \alpha < 180^\circ$

$$\lambda = \lambda(\alpha), \quad \Delta'(-\lambda, \alpha) = \frac{d}{ds} \Delta(s, \alpha) |_{s=-\lambda}$$

Таким образом, подтверждается справедливость асимптотических представлений (3.1) и (3.2). Формула (4.14) дает, в частности, выражение для коэффициента A в (3.2), которым можно пользоваться, если приближение Стокса применимо и вблизи отверстия, т. е. при $\nu a / Q \gg 1$

$$A = - \frac{\int_0^a V(R) R^{1-\lambda} dR}{\lambda \Delta'(-\lambda, \alpha)} \sin \alpha \quad (4.15)$$

В критическом случае $\alpha = \alpha_* = 120^\circ$

$$\Psi = \frac{3Q \sin \alpha_* \ln r}{\pi \Delta''(0, \alpha_*)} (1 - \cos \theta) [\cos \theta(1 + \cos \theta) + 1 - 3 \cos^2 \alpha_*] - \\ - \frac{Q[3w'(0) \Delta''(0, \alpha_*) - 2 \Delta'''(0, \alpha_*)]}{\pi [\Delta''(0, \alpha_*)]^2} (1 - \cos \theta) [\cos \theta(1 + \cos \theta) + \\ + 1 - 3 \cos^2 \alpha_*] - \frac{Q}{\pi \Delta''(0, \alpha_*)} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{d}{d\alpha} [P_s(\cos \alpha_*) \cos \alpha_* - \right. \\ \left. - P_{-s}(\cos \alpha_*)] P_{s+2}^1(\cos \theta) \sin \theta - \right. \\ \left. - \frac{d}{d\alpha} [P_{s+2}^1(\cos \alpha_*) \sin \alpha_*] [P_s(\cos \theta) \cos \theta - P_{-s}(\cos \theta)] \right\}_{s=0} + o(1)$$

$$\Delta''(0, \alpha_*) = \frac{d^2}{ds^2} \Delta(s, \alpha_*) |_{s=0}$$

$$\Delta'''(0, \alpha_*) = \frac{d^3}{ds^3} \Delta(s, \alpha_*) \Big|_{s=0}, \quad w'(0) = \frac{d}{ds} \int_0^1 W(r) r^{s+1} dr \Big|_{s=0} = \\ = \int_0^1 W(r) r \ln r dr$$

Как и ожидалось, асимптотика не является автомодельной. Главный член имеет логарифмический порядок при $R \rightarrow \infty$.

Таким образом, при углах $\alpha \geq 120^\circ$ само понятие точечного стока интенсивности Q в вершине конуса теряет однозначный смысл и течение на больших расстояниях существенно зависит от распределения скоростей вблизи вершины конуса.

Отметим, что в работах Н. А. Слезкина [6] и Аккерберга [7], содержащих уточненный анализ течения в коническом диффузоре, даны асимптотические разложения, пригодные лишь для углов $\alpha < 90^\circ$.

В частности, Аккерберг ищет решение уравнений Стокса в виде

$$\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{R^i} f_i(\theta)$$

при этом второе приближение

$$f_1(\theta) = C(1 - \cos^2 \theta) (\cos \theta - \cos \alpha)^2 \left[2 \cos \theta - \frac{5 \cos^2 \alpha - 3}{\cos \alpha} \right]$$

становится непригодным при $\alpha = 90^\circ$, что истолковывается им как «парадокс Уайтхеда». В действительности же следующий член асимптотики решения для $90^\circ < \alpha < 120^\circ$ есть самоуравновешенное решение вида (2.2), где $-1 < \lambda(\alpha) < 0$, поскольку первый корень уравнения (2.8) при этих α лежит в указанном интервале. Для $\alpha = 90^\circ$ ($\lambda(\alpha) = -1$) следующий член асимптотики есть $\Psi_1 = F_1(\theta) \ln R/R$.

Экспериментальному исследованию течения в конических диффузорах с большими углами раствора посвящена работа Бонда [8]. Установлено, что течение в диффузоре с углом $\alpha = 90^\circ$ асимптотически радиально, для углов же $\alpha = 141^\circ$ и 160° течение на больших расстояниях от отверстия, несомненно, нерадиально.

Результат данной работы объясняет это противоречие с теорией Харрисона тем, что при углах $\alpha > 120^\circ$ главный член представления решения на больших расстояниях есть автомодельное решение второго рода, которому соответствует нерадиальное течение.

Автор благодарит Г. И. Баренблатта за руководство и Р. В. Гольдштейна за постоянное внимание.

Поступило 4 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Harrison W. J. The pressure in a viscous liquid moving through a channel with diverging boundaries. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1920, vol. 19, p. 6, pp. 307—312.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
3. Berger R. Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible. Handbuch Physik. Bd 8—12, Springer — Verlag, 1963.
4. Баренблатт Г. И., Сивашинский Г. И. Автомодельные решения второго рода в нелинейной фильтрации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
5. Sternberg E., Koiter W. T. The wedge under a concentrated couple: a paradox in the twodimensional theory of elasticity. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 4. (Рус. перев.: Механика, 1959, № 3.)
6. Слезкин Н. А. Движение вязкой жидкости в конусе и между двумя конусами. Матем. сб., 1935, т. 42, № 1.
7. Ackerman R. C. The viscous incompressible flow inside a cone. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, No. 1. (Рус. перев.: Механика, 1966, № 3.)
8. Bond W. N. Viscous flow through wide-angled cones. Philos. Mag., 1925, vol. 50, Ser. 6.