

УДК 531/534(09)

## ТЕОРИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕШЕТОК В РАБОТАХ Н. Е. ЖУКОВСКОГО И С. А. ЧАПЛЫГИНА И ЕЕ ПОСЛЕДУЮЩЕЕ РАЗВИТИЕ

(К 125-летию со дня рождения Н. Е. Жуковского)

В научном наследии Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина основную часть составляют исследования в области теоретической и прикладной гидромеханики, среди них — основополагающие исследования разрезных и решетчатых крыльев, турбин, гребных винтов, ветряков и вентиляторов, т. е. вопросов теории гидродинамических решеток. Эта теория в современном понимании рассматривает течение жидкостей и газов через пространственные системы неподвижных и вращающихся лопастей турбомашин. Важность теории решеток определяется уже тем, что практически вся энергия, которой располагает человечество, получается при помощи гидравлических или тепловых турбин. К числу турбомашин, кроме турбин, относятся также винты, лопастные компрессоры, насосы и вентиляторы, и основной частью теории турбомашин является теория их решеток. Аэродинамику крыла, теорию течения в трубе и канале можно рассматривать как различные предельные случаи теории решеток.

Указанное содержание и значение теория решеток получила не сразу. Сначала решались отдельные частные задачи, связь которых с этой теорией и с турбомашинами была понята значительно позже.

Началом гидродинамической теории турбомашин можно считать работы Л. Эйлера, относящиеся к середине XVIII века, в которых была развита гидравлическая (одномерная, струйная) теория турбомашин, получена формула для момента, носящая его имя, и вычислена реакция жидкости на стенки изогнутого канала.

Первые двумерные гидродинамические задачи, непосредственно связанные с турбомашинами, были поставлены и решены в работах Н. Е. Жуковского.

В 1890 г., чтобы получить для дальнейшего изучения плоскую решетку пластин, Н. Е. Жуковский предполагает, что течение жидкости через турбину происходит по поверхностям соосных круговых цилиндров, и производит развертку одной из этих поверхностей на плоскость ([<sup>1</sup>], фиг. 40). Заметим, что такой подход до сих пор применяется в теории осевых турбомашин.

В 1914 г. Н. Е. Жуковский вновь возвращается к исследованию турбомашин в своей вихревой теории гребного винта. При этом он уже не считает течение цилиндрическим, а в поток за решеткой помещает вихревые поверхности, сходящие с кромок лопастей ([<sup>2</sup>], фиг. 10). Полагая, что поток осесимметричен, Н. Е. Жуковский получает из уравнений движения распределения параметров потока по радиусу, которые значительно позже, в 40-х годах, стали называться законами закрутки (законами «свободного вихря», заданного угла потока, твердого тела). В осесимметричных сечениях лопастей возникает двумерная решетка профилей ([<sup>2</sup>], фиг. 11). Одновременно Н. Е. Жуковский показал справедливость своей знаменитой теоремы (1906 г.) о подъемной силе крыла и для профиля в решетке, если за скорость потока в бесконечности принять среднее

арифметическое из векторов скорости на бесконечностях перед и за решеткой. Этот вывод получается элементарно, путем применения только уравнений неразрывности, Бернулли и количества движения. Предельный переход к профилю в решетке с бесконечно большим шагом дает самое простое современное доказательство основной теоремы Жуковского как для несжимаемой жидкости, так и для газа при дозвуковых скоростях.

В той же работе [2] Н. Е. Жуковский предвосхитил современный квазитрехмерный подход в теории обтекания решеток турбомашин, заключающийся в рассмотрении двух двумерных задач: во-первых, осредненного осесимметричного потока, включающего модель вихревого диска («дношка» по Н. Е. Жуковскому), и, во-вторых, обтекания решеток на осесимметричных поверхностях в слоях переменной толщины.

В упоминавшейся работе [1] Н. Е. Жуковский впервые поставил и решил своим методом, в числе многих других, одну задачу струйного обтекания решетки пластин плоским потоком несжимаемой жидкости. Сущность его метода заключалась в выражении комплексного потенциала течения и логарифма комплексной скорости (функции Н. Е. Жуковского) через параметрическую переменную, изменяющуюся в полуплоскости. Для некоторых простых течений, ограниченных отрезками прямых и свободными струями, полное решение задач получалось в виде алгебраических формул. С. А. Чаплыгин несколько усовершенствовал метод Н. Е. Жуковского и в 1930 г. (в сотрудничестве с А. П. Минаковым) дал полное решение задачи о струйном обтекании решетки пластин [3]. (За рубежом решение той же задачи было впервые опубликовано в 1931 году А. Бетцем и Е. Петерсоном.) Среди струйных задач Н. Е. Жуковского была задача обтекания симметричного клина, расположенного в канале между параллельными плоскостями ([1], фиг. 31). Ее решение одновременно относится и к обтеканию решетки клиньев, получающейся путем отражения течения от стенок канала. В 1891 г. Н. Е. Жуковский применил свой метод в более общем случае течений с учетом тяжести и капиллярности жидкости (что свелось к постановке определенных условий на неизвестных граничных линиях тока), построил два примера таких течений в каналах, на которых одновременно впервые получил две решетки из криволинейных тел ([4], фиг. 2 и фиг. 5), намного опередив другие аналогичные решения. (Насколько известно, этот факт приоритета Н. Е. Жуковского ранее не отмечался). Л. И. Седов в 1938 г. распространил метод Жуковского на самый общий случай струйного обтекания любой системы произвольных профилей, сведя задачу к решению интегро-дифференциального уравнения относительно неизвестной функции угла наклона касательной к профилю на границе полуплоскости [5]. В частном случае профилей, ограниченных отрезками прямых, интегралы в уравнении берутся, и задача упрощается до дифференциального уравнения и алгебраических условий для параметров задачи.

Другая, неоднозначная, модель сплошного обтекания решетки пластин была впервые полностью рассмотрена в 1914 г. С. А. Чаплыгиным [6]. Автор в примечании к Полному собранию сочинений отметил, что эта работа выполнена в 1911 г. С. А. Чаплыгин указал функцию, конформно отображающую на внешность искомой решетки пластин верхнюю полуплоскость параметрического переменного, в которой пластинам соответствуют равные смежные отрезки действительной оси, а бесконечно-удаленным точкам — повторяющиеся с тем же периодом точки полуплоскости. Однозначное решение задачи обтекания находится затем, как и в случае одиночного профиля, путем построения в области параметрического переменного комплексного потенциала, удовлетворяющего условию Жуковского — Чаплыгина о конечной скорости в задних по потоку краях

профилей. Следует заметить, что за рубежом произвольная решетка пластин была рассмотрена только в 1922 г. Э. Кенигом. В 1933 г. при переиздании работы [6] С. А. Чаплыгин дополнил отображающую функцию восемью свободными параметрами и получил (на несколько лет раньше других авторов) решетки из теоретических профилей конечной толщины.

Почти одновременно с С. А. Чаплыгиным Н. Е. Жуковский опубликовал в 1914 и 1915 гг. другое решение задачи обтекания решетки пластин. Он сразу пишет по аналогии с обтеканием одиночной пластины комплексную скорость поперечного и чисто циркуляционного обтекания решетки пластин, образованных отрезками одной прямой, и затем получает путем линейной комбинации этих скоростей с постоянной скоростью продольного обтекания любое течение через рассматриваемую решетку [2]. Для произвольной решетки пластин с выносом Н. Е. Жуковский использует найденный комплексный потенциал косога бесциркуляционного обтекания решетки отрезков одной прямой в качестве отображающей функции, что дает в плоскости указанного потенциала решетку пластин с произвольно заданным выносом [7]. Заслуживает специального упоминания построенное циркуляционно-осевое течение с нулевым расходом и конечной скоростью на одной из кромок пластин ([7], фиг. 7), из факта существования которого немедленно следует наличие линейной зависимости скоростей на профиле и тангенса угла выхода потока из решетки от тангенса угла входа.

Итак, первые двумерные задачи теории гидродинамических решеток были поставлены и решены в работах Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, которых следует считать основоположниками этой теории. В смежных работах по теории крыла и аэродинамике ими были указаны основные методы исследования, успешно использованные при последующем развитии теории решеток и в ее технических приложениях.

Наиболее плодотворной оказалась гидродинамическая вихревая теория Н. Е. Жуковского, основанная на рассмотрении присоединенных и свободных вихрей.

Применение вихревого метода к задачам расчета профилей и лопастей турбомашин (гидротурбин и вентиляторов) было начато в 20-годах П. А. Вальтером, учеником Н. Е. Жуковского и его сотрудником по МВТУ [8]. Для расчета потока около тонкого профиля (дужки) заданной формы дужка заменяется распределенными вдоль ее дуги  $s$  присоединенными вихрями с неизвестной интенсивностью  $\gamma(s)$ . Условие непротекания дужки приводит к сингулярному интегральному уравнению относительно  $\gamma(s)$ . Г. Глауэрт в 1926 г. опубликовал его решение путем разложения искомой функции  $\gamma(s)$  в ряд Фурье. М. А. Лаврентьев в работе [9] свел это уравнение, называемое им уравнением П. А. Вальтера, к системе линейных алгебраических уравнений. В предисловии к работе [8] С. А. Чаплыгин примечательно оценивает вихревой метод: «... громадное преимущество приема заключается в том, что он не делается сложнее при переходе к другим более трудным задачам (например, к задаче о параллельной или круговой решетке, к задаче о пространственном потоке в колесе турбины и т. д.)». Действительно, вихревая теория Н. Е. Жуковского успешно применялась уже в 30-годах к решеткам, винтам и вентиляторам (в первую очередь его учениками П. А. Вальтером, К. А. Ушаковым, В. П. Вечинкиным) и к гидротурбинам (А. А. Саткевичем, И. Н. Вознесенским, Г. Ф. Проскурой, Л. Ф. Лесохиным и др.). В практических расчетах решеток вихревой метод до последнего времени является одним из основных.

В 1921 г. С. А. Чаплыгин указал общий аналитический метод построения комплексной скорости течения вокруг разрезного крыла, состоящего из произвольной системы дужек одной окружности [10]. Существенную

роль в этом методе играла функция вида

$$R(z) = \Pi(z - a_{2k})^{1/2} (z - a_{2k-1})^{-1/2}$$

выделяющая особенности на кромках дужек. Функции такого вида возникали ранее во всех работах, касающихся обтекания пластин или бесконечно-тонких профилей (дужек), но только здесь они были систематически использованы. С. А. Чаплыгин подробно изучил своим методом обтекание крыла, состоящего из двух, позже из трех произвольно расположенных дужек (биплана и триплана). Полную законченность и многочисленные применения, в том числе в теории решеток, этот метод получил в последующих работах Московской школы гидродинамиков [11]. Исходные интегральные уравнения метода могут интерпретироваться как уравнения метода особенностей (с распределением вихрей и источников-стоков вдоль хорды профиля), однако он отличается строгостью и эффективным, в виде квадратур, обращением интегралов. С помощью этого метода Л. И. Седов нашел решения для двоякопериодической решетки пластин, для решетки из тонких профилей произвольной формы, импульсного движения и гармонического колебания лопаток в такой решетке [12].

Не менее важен для теории решеток геометрический метод конформных отображений, применявшийся Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным при построении струйного и сплошного течения через решетку пластин и для получения теоретических профилей.

Следующие приложения метода принадлежат П. А. Вальтеру, который с его помощью свел задачу обтекания круговой решетки к аналогичной задаче для прямой решетки и одновочного профиля, построил семейство теоретических решеток из тонких искривленных дужек и указал метод пересчета распределения скоростей на профиле решетки при изменении угла входа потока [8].

В последующем развитии теории решеток широкую известность получили различные обобщения профилей Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина. Первое из них, произведенное самим С. А. Чаплыгиным, уже упоминалось [6]. Это обобщение можно рассматривать как превращение функции, отображающей полуплоскость или внешность круга на внешность теоретического профиля, в бесконечнозначную. Другое обобщение профилей Чаплыгина, использующее вместо круга решетку некоторых овалов, близких к кругам, дал Э. Л. Блох [13]. Для получения теоретических профилей методом Жуковского (1910 г.) используется простая функция  $w(z) = z + z^{-1}$ , отображающая плоскость  $z$  основной окружности на двуплоскую плоскость комплексного потенциала ее бесциркуляционного обтекания. При этом любая «изображающая» окружность, не совпадающая с основной, в плоскости отображения переходит в теоретический профиль. Если аналогично применить функцию, преобразующую основную окружность в решетку пластин, любой другой окружности будет соответствовать решетка из обобщенных профилей Жуковского [14]. Вместо одиночной основной окружности можно взять решетку кругов или овалов, получающихся, например, при наложении однородного потока на решетку диполей; тогда другая, изображающая, решетка таких же овалов перейдет в решетку теоретических профилей, также обобщающих профили Жуковского [15].

При изучении обтекания круговых вращающихся решеток возникает необходимость расчета вихревого потока с постоянной завихренностью. Первые задачи построения такого потока в плоских областях были решены Н. Е. Жуковским в 1885 г. [16]. Значительно позже выяснилось, что эти задачи имеют отношение к определению работы колеса радиальных турбомашин (коэффициент Кухарского, 1913 г.).

Практически важным направлением в теории гидродинамических решеток оказалось построение их по заданной области годографа комплексной скорости обтекания. Фактически метод годографа скорости использовался Н. Е. Жуковским в работах [1] и [4]. В первой из них области годографа ограничивались дугами окружности и ее радиусами; во второй был задан годограф в виде круга с разрезом. Примеры построения различных решеток по заданным годографам скорости достаточно простого вида были выполнены Л. А. Симоновым в 1940 г. [17]. Автором данной статьи в 1949 г. в качестве годографа струйного течения через решетку была взята круговая луночка, скругленная внутрь по способу Н. Е. Жуковского ([18], § 14).

Существенным этапом реализации разработанных методов теории гидродинамических решеток явилось широкое применение электронно-вычислительной техники, сначала аналоговой (в виде электрических моделей), а затем и цифровой.

В частности, по методу годографа скорости, при использовании электро моделирования для конформного отображения заданной области годографа на круг, в 1949—1960 гг. строились для практического применения серии решеток с гидродинамически целесообразным распределением скорости. Учет сжимаемости газа при дозвуковых скоростях производился с помощью приближенного метода С. А. Чаплыгина; вязкость учитывалась путем расчета пограничного слоя и ограничения отрицательных градиентов давления на профиле ([18], §§ 25, 56).

Цифровые ЭВМ были применены для построения таблиц гидродинамических параметров теоретических решеток [19] и затем для реализации методов решения задач нестационарного и квазитрехмерного обтекания решеток.

Влияние вязкости реальных жидкостей и газов в современной теории решеток учитывается путем расчета пограничного слоя на профилях и изучения вторичных течений у концов лопаток, причем в значительной степени используются экспериментальные исследования решеток и турбомашин. Следует отметить важную роль Н. Е. Жуковского в разработке и этих вопросов. Теоретическое изучение вторичных течений было начато им в 1914 г. применительно к течению воды на повороте реки [20]. Общеизвестен также вклад Н. Е. Жуковского в постановку и проведение аэродинамического эксперимента. Для теории турбомашин существенны его исследования воздушных винтов и ветряков; кроме того, под руководством Н. Е. Жуковского в 1904 г. в аэродинамической трубе Московского университета были проведены, по-видимому впервые, экспериментальные исследования прямой решетки из пластинок. В этих исследованиях было установлено хорошее соответствие расчетных и измеренных величин силы, действующей вдоль решетки ([21], § 12).

Выше были кратко охарактеризованы основополагающие результаты Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, относящиеся к теории решеток, а также отмечены некоторые непосредственно примыкающие к ним последующие работы. С современным содержанием теории решеток и более подробной историей ее развития можно ознакомиться по книге [18] и обзорам [22].

*Г. Ю. Степанов*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока. Матем. сб., 1890, т. 15, № 1; Полн. собр. соч., т. 3, ОНТИ, 1936.
2. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта. Статья вторая. Сообщение

- 18 июня 1913 г. на 13-м съезде естествоиспытателей и врачей в Тифлисе. Тр. отд. физ. н. Общества любителей естествознания, 1914, т. 17, № 1; Полн. собр. соч., т. 6, ОНТИ, 1937.
3. Чаплыгин С. А., Минаков А. П. Теоретический расчет действия турбины. Тр. ЦАГИ, 1930, № 41; Полн. собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1933.
  4. Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Ж. Русск. физ.-хим. о-ва, ч. физ., 1891, т. 23, отд. 1, № 2; Полн. собр. соч., т. 3, ОНТИ, 1936.
  5. Седов Л. И. Развитие метода Жуковского для определения струйных течений, стесненных несколькими криволинейными препятствиями. Теор. сб. ЦАГИ, 1938, № 5; Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М., Гостехиздат, 1950.
  6. Чаплыгин С. А. Теория решетчатого крыла. Сообщение 23 апреля (6 мая) 1913 г. в Моск. мат. о-ве. Матем. сб., т. 29, № 2, 1914; Полн. собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1933.
  7. Жуковский Н. Е. Вихревая теория гребного винта. Статья третья. Тр. отд. физ. н. Общества любителей естествознания, 1915, т. 17, № 2; Полн. собр. соч., т. 6, ОНТИ, 1937.
  8. Вальтер П. А. Теория интегральных уравнений Гильберта и ее приложение к задаче о движении жидкости внутри колеса турбины. Доклад в МВТУ, 1922; О подъемных силах, развивающихся на лопатках гидравлических аппаратов, работающих в сходящихся потоках. Тр. ЦАГИ, 1925, № 12; 1926, № 18; Теория гидродинамической решетки, состоящей из дужек окружности небольшой кривизны. Тр. ЦАГИ, 1938, № 352.
  9. Лаврентьев М. А. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. Тр. ЦАГИ, 1932, № 118.
  10. Чаплыгин С. А. Схематическая теория разрезного крыла аэроплана. Научн.-техн. вестн. НТО ВСНХ, 1921, № 4, 5; Полн. собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1933.
  11. Келдыш М. В., Седов Л. И. Приложения теории функций комплексного переменного к гидродинамике и аэродинамике (обзор некоторых работ московской школы). М., «Наука», 1964.
  12. Седов Л. И. К гидродинамической теории решеток и некоторых краевых задач, приводящихся к определению периодических функций комплексного переменного. Докл. АН СССР, 1938, т. 18, № 1. Теория плоских движений идеальной жидкости. М., Оборонгиз, 1939; Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., Гостехиздат, 1950.
  13. Блох Э. Л. Исследование плоской решетки, составленной из теоретических профилей конечной толщины. Тр. ЦАГИ, 1947, № 611.
  14. Kawada S. A contribution to the theory of latticed wing. Proc. III Congr. for Appl. Mech., Stockholm, 1931, vol. 1; Weing F. Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. J. Springer, 1935.
  15. Merchant W., Collar A. R. Flow of an ideal fluid past a cascade of blades. P. II, ARC, R.&M., 1941, № 1893.
  16. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью, Ж. Русск. физ.-хим. о-ва, ч. физ., 1885; т. 17, отд. 1, вып. 6—8, Полн. собр. соч., т. 3, ОНТИ, 1936.
  17. Симонов Л. А. Построение профилей по годографу скоростей. Прикл. матем. и механ., 1940, т. 4, № 4; 1941, т. 5, № 2.
  18. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. М., Физматгиз, 1962.
  19. Белоцерковский С. М., Гиневский А. С., Полонский Я. Е. Силловые и моментные аэродинамические характеристики решеток тонких профилей. Пром. аэродинамика, № 22, М., Оборонгиз, 1962.
  20. Жуковский Н. Е. О движении воды на повороте реки. Матем. сб., 1914, т. 29, № 2; Полн. собр. соч., т. 4, М., ОНТИ, 1937.
  21. Жуковский Н. Е. Теоретические основы воздухоплавания, ч. 1. Студ. изд. общ. ИМТУ, 1911—1912; Полн. собр. соч., лекции, вып. 1, М., Оборонгиз, 1938.
  22. Степанов Г. Ю. Применение электрического моделирования для отыскания конформного отображения при решении плоских краевых задач (обзор). Инж. ж., 1965, т. 5, № 3; Гидродинамическая теория решеток. «Механика в СССР за 50 лет», т. 2, М., «Наука», 1970.