

УДК 532.526.4

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ РЕЙХАРДТА В ЗАДАЧАХ ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Я. А. ВАГРАМЕНКО

(Москва)

Предложен метод расчета пристенных турбулентных пограничных слоев, основанный на полуэмпирической модели турбулентного смешения Рейхардта. Рассмотрена задача о турбулентном пограничном слое пластины, в том числе при сверхзвуковом обтекании, а также задача о турбулентном пограничном слое при неизоэргическом обтекании поверхностей турбулентными струями. При этом введены некоторые «почти автомоделные» решения дифференциальных уравнений переноса на основе представления о консервативности профилей параметров по отношению к изменениям в подслое. Результаты расчета сопоставлены с экспериментальными данными.

1. Полуэмпирическая индуктивная теория свободной турбулентности [1, 2], основанная на линейных уравнениях турбулентного обмена, дает возможность весьма точно описывать как сжимаемое, так и несжимаемое течения [3, 4]. Эта теория во многом обобщена в родственном методе эквивалентной задачи теплопроводности [5, 6]. Основным в теории является введение в дополнение к уравнениям осредненного движения и теплопереноса

$$\frac{\partial \langle \rho u g \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle \rho v g \rangle}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

феноменологической закономерности

$$\langle \rho v g \rangle = -\Lambda \frac{\partial \langle \rho u g \rangle}{\partial y} \quad (1.2)$$

полученной Рейхардтом на основе анализа обширных экспериментальных данных о распределении величины $\langle \rho u g \rangle$ в поперечных сечениях струй. Здесь ρ — плотность, u — составляющая скорости в направлении основного движения по оси x , v — составляющая скорости по оси y ; $g = u$ или $g = H - H_\infty$, где H — полное теплосодержание (вне струи $H = H_\infty$). Коэффициент переноса Λ , характеризующий масштаб турбулентности, в струях зависит от продольной координаты, так что в развитой турбулентной области $\Lambda = cx$ (c — опытная постоянная).

В силу определенной общности явлений турбулентного обмена в струях и пристенных слоях не исключается возможность интерпретации этого закона и в условиях пристенной турбулентности. Такая возможность действительно обнаруживается, если обратиться к опытным фактам. На фиг. 1 сплошными кружками показаны опытные данные Никурадзе и Рейхардта для распределения скорости в турбулентном пограничном слое течения в трубе. Это распределение там же представлено в виде зависимости для отношения u^2/u_*^2 (светлые кружки). Здесь $u_* = (\tau_w/\rho)^{1/2}$ — динамическая скорость, τ_w — касательное напряжение на стенке, μ — вязкость. Можно видеть, что опытные данные с большой точностью обобщаются формулой (сплошная кривая)

$$\frac{u^2}{u_*^2} = 230 \lg \frac{y \rho u_*}{\mu} - 130 \quad (1.3)$$

Воспользуемся соотношением [7]

$$\langle \rho u v \rangle = \langle \rho \chi u \chi v \rangle - \tau \quad (\tau = -\rho \langle u' v' \rangle) \quad (1.4)$$

где τ — кажущееся турбулентное касательное напряжение (u' , v' — пульсационные составляющие скорости). Вблизи стенки, где $\langle v \rangle \approx 0$, $\tau = \tau_w$, из (1.4) получаем

$$\tau_w = \Lambda \delta \langle \rho u^2 \rangle / \partial y$$

Отсюда следует, что достаточно принять $\Lambda = \beta y$ (β — опытная постоянная), чтобы удовлетворить характеру распределения скоростного напора (1.3) в турбулентном пограничном слое

$$\langle \rho u^2 \rangle = \beta^{-1} \tau_w \ln y + \varepsilon$$

где ε — константа или произвольная функция x . Выражение $\Lambda = \beta y$ отражает уменьшение турбулентного переноса с приближением к стенке. Аналогичные соображения относительно коэффициента переноса Λ можно привести при рассмотрении модели (1.2) применительно к тепловому потоку

$$\begin{aligned} \langle \rho u (H - H_w) \rangle = \\ = \langle \rho \rangle \langle u \rangle \langle H - H_w \rangle - q - u \tau \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $q = -u'H'$, H_w — теплосодержание у стенки (H' — пульсация теплосодержания). В этом случае также необходимо принять $\Lambda = \beta y$, причем здесь значение постоянной β может быть несколько другим ввиду неполного подобия процессов переноса тепла и импульса. В дальнейшем этим отличием будем пренебрегать, что будет соответствовать обычному допущению о равенстве турбулентного числа Прандтля единице.

Уравнения переноса (1.1) можно записать в общем виде

$$\frac{\partial \rho u g}{\partial x} = \beta \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \rho u g}{\partial y} \right) \quad (1.6)$$

(Здесь и далее знаки осреднения опущены.) Как и в случае свободной струйной турбулентности, эти уравнения получены индуктивным путем из анализа весьма общей опытной закономерности для профиля скорости, характер которой, как известно [8, 9], во многом сохраняется и в сжимаемом течении. Определим условия у стенки при таком подходе. Будем при этом исходить из двухслойной схемы, вводя согласно общепринятым представлениям линейное изменение скорости и теплосодержания по толщине подслоя

$$y \leq y_+, \quad u = u_+ y / y_+, \quad H - H_w = (H_+ - H_w) y / y_+ \quad (1.7)$$

и условие устойчивости подслоя

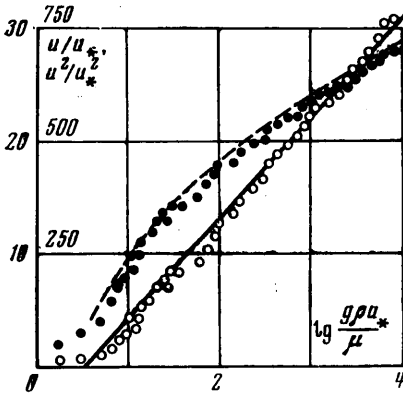
$$\mu_w^{-1} \rho_w u_+ y_+ = \alpha^2 \quad (1.8)$$

где α — опытная постоянная. Индексом плюс обозначены параметры на границе подслоя. Определение (1.8) соответствует приближению, при котором температура подслоя равна температуре стенки [7, 8]. Учитывая, что при $y \leq y_+$

$$\tau = \mu_w \frac{\partial u}{\partial y}, \quad q = \lambda_w \frac{\partial T}{\partial y} \quad (1.9)$$

где μ , λ — вязкость и коэффициент теплопроводности, и вводя определение

$$H = c_p T + \frac{1}{2} u^2 \quad (1.10)$$



Фиг. 1

согласно соотношениям (1.2), (1.4), (1.5) при $v \simeq 0$, получаем на границе подслоя ($y = y_+$) условия

$$\rho u^2 = \beta \alpha^2 y_+ \frac{\partial \rho u^2}{\partial y}, \quad \text{Pr} = \frac{c_p \mu_w}{\lambda_w} \quad (1.11)$$

$$\rho u (H - H_w) = \beta \alpha^2 \text{Pr} y_+ \frac{\partial \rho u (H - H_w)}{\partial y_+} + (1 - \text{Pr}) \rho u^3 \quad (1.12)$$

Здесь Pr — число Прандтля.

Последним членом в правой части соотношения (1.12) можно пренебречь (для газов при $\text{Pr} \sim 1$ этот член вообще исчезает). Таким образом, условия на границе вязкого подслоя можно записать в следующем общем виде:

$$y = y_+, \quad z_\nu = k_\nu y_+ \frac{\partial z_\nu}{\partial y}, \quad \nu = 1, 2 \quad (1.13)$$

$$z_1 = \rho u^2, \quad z_2 = \rho u (H - H_w), \quad k_1 = \beta \alpha^2, \quad k_2 = k_1 \text{Pr}$$

Тепловой поток и трение у поверхности ($y = 0, u = 0$) согласно определениям (1.7), (1.9), (1.10) выразим в виде

$$q_w = \frac{z_{2+}}{\alpha^2 \text{Pr}}, \quad \tau_w = \frac{z_{1+}}{\alpha^2} \quad (1.14)$$

Принимая степенную зависимость вязкости от температуры

$$\mu = \mu_0 (T/T_0)^n \quad \text{при} \quad \rho T = \rho_0 T_0$$

из условия (1.13) находим в общем виде закон трения

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 x}{\mu_0} = \alpha^2 \theta^{-(n+1/2)} \frac{x}{y_+} \left(\frac{\rho_0 u_0^2}{\rho_+ u_+^2} \right)^{1/2}, \quad \theta = \frac{T_0}{T_w} \quad (1.15)$$

причем число Рейнольдса определяется по параметрам на краю пограничного слоя, отмеченным здесь и далее индексом 0.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя зависят от характера внешнего течения и рассматриваются далее.

2. Применим изложенный подход к решению задач об изобарических турбулентных пограничных слоях в различных условиях обтекания. Рассмотрим класс автомодельных решений вида

$$z_\nu = B_\nu x^{-m_\nu} F_\nu(\varphi), \quad \varphi = y/\beta x \quad (2.1)$$

где m_ν, B_ν — некоторые постоянные, а функция $F_\nu(\varphi)$ дает профиль скоростного напора или потока избыточного теплосодержания. Так как

$$\partial/\partial x = -\varphi x^{-1} \partial/\partial \varphi, \quad \partial/\partial y = \beta^{-1} x^{-1} \partial/\partial \varphi \quad (2.2)$$

то из (1.6) получаем дифференциальное уравнение

$$\varphi F_\nu'' + (1 + \varphi) F_\nu' + m_\nu F_\nu = 0 \quad (2.3)$$

Граничные условия для этого уравнения должны быть заданы при некоторых значениях обобщенной переменной φ на границах подслоя и пограничного слоя. Известное свойство консервативности профилей скорости и касательного напряжения в турбулентном слое по отношению к изменениям в вязком подслое [7-9] может быть истолковано как свидетельство слабого влияния изменения обобщенной координаты подслоя φ_+ и координаты края пограничного слоя φ_0 на профиль параметров в пограничном

слое. Другими словами, профили $F_v(\varphi)$ будем полагать слабыми функциями φ_0, φ_+ , вид которых может быть определен в связи с установлением закона трения после решения уравнения (2.3). При такой постановке профили $F_v(\varphi)$, автомодельные в приближенном смысле, будем определять как квазиавтомодельные.

Согласно (1.13) граничное условие у стенки в общем виде следует записать так:

$$\varphi = \varphi_+, \quad F_v = k_v \varphi_+ F_v' \quad (2.4)$$

Рассмотрим прежде всего решение для изотермического слоя у пластины, что позволит проследить применение метода и определить опытные постоянные. В этом случае $m_v = 0$, и решение для ρu^2 имеет вид

$$F_1 = a \operatorname{Ei}(-\varphi) + b$$

где $\operatorname{Ei}(-\varphi)$ — интегральная показательная функция, a, b — постоянные интегрирования. Исключая последние с учетом малости φ_+ ($\exp \varphi_+ \approx 1$), при асимптотическом граничном условии на краю пограничного слоя

$$\varphi \rightarrow \infty, \quad F_1 = 1$$

получаем

$$F_1 = 1 - \operatorname{Ei}(-\varphi) [\operatorname{Ei}(-\varphi_+) - \beta \alpha^2]^{-1} \quad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что на границе подслоя ($\varphi = \varphi_+$), когда

$$\varphi_+ \rightarrow 0, \quad \operatorname{Ei}(-\varphi_+) = \ln \gamma \varphi_+ \quad (2.6)$$

($\gamma = 1.78$ — постоянная Эйлера) относительный скоростной напор

$$F_{1+} = \left(1 - \frac{1}{\beta \alpha^2} \ln \gamma \varphi_+ \right)^{-1} \quad (2.7)$$

Коэффициент трения c_f выражается через F_{1+} соотношением

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_0 u_0^2} = \frac{2F_{1+}}{\alpha^2} \quad (2.8)$$

При этом из соотношения (1.15) находим

$$\operatorname{Re} = \frac{\alpha^2}{\beta \varphi_+ \sqrt{F_{1+}}} = \frac{\alpha \sqrt{2}}{\beta \varphi_+ \sqrt{c_f}} \quad (2.9)$$

Поскольку из (2.7) и (2.8) следует, что

$$\varphi_+ = \gamma^{-1} \exp(\alpha^2 \beta - 2\beta/c_f)$$

то закон трения для пластины имеет вид ($\operatorname{Re} = \operatorname{Re}_0$ при $\theta = 1$)

$$\operatorname{Re}_0 = \beta^{-1} \gamma \alpha \sqrt{2/c_f} \exp(2\beta/c_f - \alpha^2 \beta) \quad (2.10)$$

При условии (2.6) профиль скоростного напора из (2.5) получаем в виде

$$F_1 = 1 + \frac{1}{2} \beta^{-1} c_f \operatorname{Ei}(-\varphi) \quad (2.11)$$

Если учесть, что $\varphi = y \varphi_+ / y_+$ и ввести динамическую скорость u_* так, что $y_+ = \mu \alpha / \rho u_*$, то (2.11) с учетом (2.8) преобразуется к виду

$$\frac{u^2}{u_*^2} = \frac{2}{c_f} + \beta^{-1} \operatorname{Ei} \left[-\frac{y \rho u_*}{\gamma \mu \alpha} \exp \left(\alpha^2 \beta - \frac{2\beta}{c_f} \right) \right] \quad (2.12)$$

Отсюда при $\varphi \rightarrow 0$ получаем

$$\frac{u^2}{u_*^2} = \left[\frac{1}{\beta} \left(2,3 \lg \frac{\gamma \rho u_*}{\mu} - 2,3 \lg \alpha + \alpha^2 \beta \right) \right] \quad (2.13)$$

Согласно опытным данным для течения в трубе (фиг. 1) координата непрерывного перехода вязкого подслоя в турбулентное ядро соответствует изгибу профиля скорости при $\alpha = 10$. Это значение α приводит к полному совпадению зависимости (2.13) с опытными данными фиг. 1 при $\beta = 0.01$. При этом формула (2.13) переходит точно в (1.3). На фиг. 1 также показана зависимость для скорости, рассчитанная по (2.13) (пунктирная кривая).

Закон сопротивления пластины (2.10) при $\alpha = 10$, $\beta = 0.007$ сопоставлен с опытными данными Кемпфа, Шульц — Грунова, Джавана на фиг. 2. Некоторое отличие константы турбулентности в турбулентном пограничном слое пластины от аналогичной константы течения в трубе соответствует известным опытным фактам о различии профилей в указанных случаях [7].

Для сжимаемого пограничного слоя необходимо ввести в рассмотрение также уравнение теплопереноса для z_2 .

Заметим, что согласно определениям

$$z_1 = \rho_0 u_0^2 F_1, \quad (2.14)$$

$$z_2 = \rho_0 u_0 (H_0 - H_w) F_2$$

При условии изобаричности ($\rho_0 T_0 = \rho T$) имеет место соотношение $T/T_0 = (u/u_0)^2 F_1^{-1}$

и для скорости течения в пограничном слое с учетом (1.14) — уравнение

$$\left(s + \frac{\theta}{F_1} \right) \left(\frac{u}{u_0} \right)^2 + \frac{F_2}{F_1} (\theta + s - 1) \frac{u}{u_0} - 1 = 0, \quad s = \frac{\kappa - 1}{2} M^2 \theta \quad (2.15)$$

где M — число Маха на границе подслоя, κ — показатель адиабаты потока. Решение этого уравнения

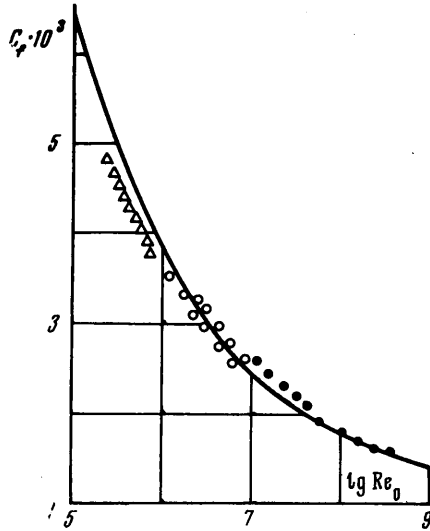
$$\frac{u}{u_0} = \left\{ \left[\left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 (\theta + s - 1)^2 + 4 \left(s + \frac{\theta}{F_1} \right) \right]^{1/2} - \frac{F_2}{F_1} (\theta + s - 1) \right\} \left[2 \left(s + \frac{\theta}{F_1} \right) \right]^{-1}. \quad (2.16)$$

В качестве примера рассмотрим пограничный слой у теплоизолированной стенки. В этом случае $\theta = [1 + 1/2(\kappa - 1)M^2]^{-1}$. Из (1.15) путем сравнения чисел Рейнольдса при одинаковых коэффициентах трения c_f в изотермическом (соотношение (2.10)) и сверхзвуковом пограничном слоях пластины находим

$$Re = [1 + 1/2(\kappa - 1)M^2]^{-1} Re_0.$$

Из (2.11) можно получить профиль скоростного напора в пограничном слое пластины

$$F_1 = \frac{\alpha^2 c_f}{2} - \frac{c_f}{2\beta} \ln \alpha + \frac{c_f}{2\beta} \ln \frac{\gamma \rho u_*}{\mu}$$



Фиг. 2

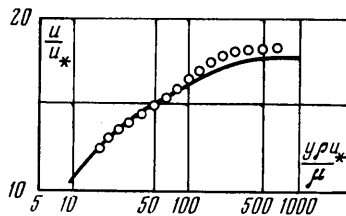
так что при $\alpha = 10$, $\beta = 0.007$

$$F_1 = c_f \left(164 \lg \frac{y \rho u_*}{\mu} - 114 \right)$$

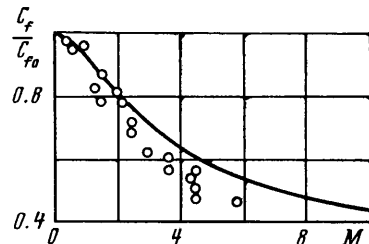
На фиг. 3 дано сравнение профиля скорости, рассчитанного по (2.16) с учетом последней формулы (кривая), с опытными данными Лобба, Винклера и Перша [8] теплоизолированной пластины при $M = 5$,

$$c_f = 0.0011 \quad (F_1 = F_2, u/u_* = \alpha[(s + 2\theta/\alpha^2 c_f)(s + \theta/F_1)^{-1}]^{1/2})$$

Сравнение зависимости (2.17) при $n = 1$ с опытными данными [8] для отношений c_f/c_{f_0} в сжимаемом и изотермическом пограничных слоях при одинаковых числах Рейнольдса $Re \sim 10^7$ показано на фиг. 4, где опытные данные различных авторов указаны кружками. В расчете приняты значения опытных постоянных α , β такие же, как и в изотермическом пограничном слое пластины. Расчетная за-



Фиг. 3



Фиг. 4

висимость близка к аналогичной зависимости Ван Дрифта и несколько превышает опытные данные при $M > 5$. В целом применимость метода подтверждается и в сверхзвуковом потоке.

3. Можно видеть, что случай $m_v > 0$ соответствует условиям обтекания, когда внешний поток имеет характер полуограниченной турбулентной струи. В такой струе изменение максимального значения плотности потока импульса или избыточного теплосодержания весьма несущественно [10, 11] отличается от закономерностей для свободных струй и может быть определено на основе универсальных по отношению к температурному фактору зависимостей для ρu^2 , $\rho u(H - H_\infty)$, исходя из представлений индуктивной теории свободной турбулентности. Эти зависимости типа $z_v \sim x^{-m_v}$ формально отвечают автомодельной области струйного течения. Так, $m_v = 1$ соответствует плоской полуограниченной струе, $m_v = 2$ — веерной полуограниченной струе. При нарушении подобия профилей импульса и потока теплосодержания в струе, например в случае ее догорания, m_2 отличается от указанных здесь значений. Такое отличие можно установить из расчета факела или опытных данных. Общее решение вырожденного гипергеометрического уравнения (2.3) при $m_v \neq 0$ выразим в виде

$$F_v = e^{-\varphi} [a\Phi(1 - m_v, 1, \varphi) + b\Psi(1 - m_v, 1, \varphi)] \quad (3.4)$$

где a , b — постоянные интегрирования. Здесь первая из функций есть ряд Похгаммера

$$\Phi(1 - m_v, 1, \varphi) = 1 + (1 - m_v)\varphi + \frac{1}{4}(2 - m_v)(1 - m_v)\varphi^2 + \dots$$

а второе линейно-независимое решение имеет вид [12]

$$\Psi(1 - m_v, 1, \varphi) = \Phi(1 - m_v, 1, \varphi) \ln \varphi + \frac{1 - m_v}{1!1!} \left(\frac{1}{1 - m_v} - \frac{2}{1} \right) \varphi + \dots$$

$$\dots + \frac{(1-m_v)}{k!k!} \left[\frac{1}{1-m_v} + \dots + \frac{1}{1-m_v+k-1} - \frac{2}{1} - \dots - \frac{2}{k} \right] \varphi^k$$

$$(1-m_v)_k = (1-m_v)(2-m_v)\dots(k-m_v)$$

В приближении пограничного слоя ($\varphi < 1$) и с точностью до первых членов разложений можно записать

$$F_v = \{a[1 + (1-m_v)\varphi] + b[1 + (1-m_v)\varphi] \ln \varphi - b(1-2m_v)\varphi\} e^{-\varphi} \quad (3.2)$$

Граничное условие у стенки представляется в виде (2.4). Относительно условия на краю пограничного слоя из опытных данных известно, что в месте перехода последнего в свободный струйный турбулентный поток профили импульса и потока тепла имеют максимум, т. е.

$$\partial z_v / \partial y = 0, \quad y = y_0, \quad z_v = z_{v0} \quad (3.3)$$

Этого достаточно для определения как профиля параметров в пограничном слое при струйном обтекании, так и ширины слоя при условии (2.4). Согласно условию (3.3) на краю пристенного пограничного слоя полограниченной струи $\rho u v - \tau = 0$, т. е. турбулентное трение отлично от нуля в соответствии с известными представлениями [13, 14] и равно поперечному переносу продольной составляющей импульса (формулы Прандтля в этом случае оказываются недостаточными [13, 14]).

Согласно (3.3) условия на краю пограничного слоя можно представить в виде

$$\varphi = \varphi_{0v}, \quad F_v' = 0, \quad F_v = 1 \quad (3.4)$$

Исключая постоянные a, b в (3.2) при помощи (3.3) (2.4), получаем профиль плотности потока импульса ($v = 1$) или избыточного теплосодержания ($v = 2$).

$$F_v = \frac{[1 + (1-m_v)\varphi] \ln(\varphi/\varphi_+) + [2m_v - 1 - k_v(m_v - 1)]\varphi + k_v}{[1 + (1-m_v)\varphi_0] \ln(\varphi_{0v}/\varphi_+) + [2m_v - 1 - k_v(m_v - 1)]\varphi_{0v} + k_v} e^{-\varphi + \varphi_{0v}} \quad (3.5)$$

и следующее соотношение между обобщенными координатами границ вязкого подслоя и пограничного слоя:

$$\varphi_+ = \varphi_{0v} \exp(k_v - 1 - 1/m_v \varphi_{0v}) \quad (3.6)$$

Соотношение (3.6) указывает на то, что толщины теплового и динамического пограничных слоев могут быть различны в соответствии с различиями в профилях потоков импульса и тепла. Упрощая (3.5) с учетом малости членов порядка φ^2 и имея в виду (3.6), можно записать

$$F_v = 1 + m_v \varphi_{0v} \ln(\varphi/\varphi_{0v}) + m_v(\varphi_{0v} - \varphi) \quad (3.7)$$

Из (3.5), (3.7) следует формула для потоков на границе подслоя

$$\varphi = \varphi_+, \quad F_{v+} = k_v m_v \varphi_{0v} \quad (3.8)$$

Последнее соотношение совместно с зависимостью $c_f = 2F_{1+}/\alpha^2$ определяет

$$\varphi_{01} = c_f / 2m_1 \beta \quad (3.9)$$

Выразив согласно (3.6) величину φ_+ через обобщенную координату φ_{01} динамического пограничного слоя и обобщенную координату φ_{02} теплового слоя из условия совпадения φ_+ в этих двух случаях и с учетом (3.9) при

$k_1 = \beta \alpha^2$, $k_2 = k_1 \text{Pr}$ получаем для отношения толщин слоев $\eta = \varphi_{02} / \varphi_{01}$ зависимость

$$c_f = 2\beta \left(\frac{m_1}{m_2 \eta} - 1 \right) [\ln \eta - \alpha^2 \beta (1 - \text{Pr})]^{-1} \quad (3.10)$$

При изотермическом струйном течении, когда $\theta = 1$, из (1.15), (3.9) и соотношения $\varphi_+ = \varphi_{01} \exp(1 - \alpha^2 \beta - 1/m_1 \varphi_0)$ находим закон трения в виде

$$\text{Re}_0 = 2m_1 \alpha \sqrt{2} c_f^{-3/2} \exp(2\beta/c_f + 1 - \alpha^2 \beta) \quad (3.11)$$

Сравним этот закон с законом сопротивления пластины в однородном потоке путем приведения к степенному закону, справедливому в некотором интервале чисел Рейнольдса. Так, если для сопротивления пластины принять аппроксимацию

$$c_f = D \text{Re}_0^{-\varepsilon} \quad (3.12)$$

(D , ε — постоянные), то из сравнения (3.12) с (2.10) следует приближенное соотношение

$$\exp \frac{2\beta}{c_f} = \frac{D^{1/\varepsilon} \beta}{\sqrt{2} \alpha \gamma} \exp(\alpha^2 \beta) c_f^{(\varepsilon-1)/2}$$

используя которое в (3.11), находим

$$c_f = \left(\frac{2m_1 \beta e}{\gamma \text{Re}_0} \right)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)} D^{1/(1+\varepsilon)} \quad (e = 2.7) \quad (3.13)$$

При $\text{Re} \sim 10^7 \div 10^6$ $D = 0.059$, $\varepsilon = 0.2$, что соответствует закону $^{1/7}$ для профиля скорости. В этом случае из (3.13) находим приближенный закон сопротивления при струйном обтекании

$$c_f = 0.05 (\text{Re}_0 / m_1)^{-1/6} \quad (3.14)$$

С учетом (3.6), (3.9) путем сравнения с законом сопротивления в изотермическом струйном потоке (3.11) при одинаковых коэффициентах сопротивления c_f получаем из (1.15) соотношение между числами Рейнольдса в изотермическом и не-изотермическом пограничном слоях

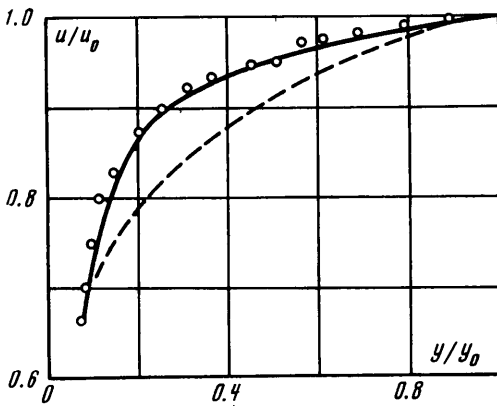
$$\text{Re} = \theta^{n+1/2} \text{Re}_0 \quad (3.15)$$

Здесь значение Re определяется формулой (3.11). Соответствующий степенной закон трения согласно (3.14), (3.13) при $n = 0.75$ будет иметь вид

$$c_f = 0,05 \theta^{0,21} (\text{Re} / m_1)^{-1/6} \quad (3.16)$$

При $z_{2+} = F_{2+} z_{20}$ закон теплопередачи в (1.14) можно записать в следующей общей форме:

$$\text{St} = \frac{q_w}{z_{20}} = \frac{F_{2+}}{F_{1+}} \frac{c_f}{2} \quad (3.17)$$



Фиг. 5

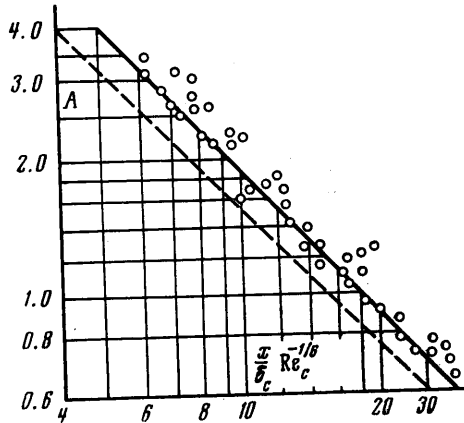
Здесь St — число Стантона. Из (3.17) для условий струйного обтекания в соответствии с (3.8), (3.9) находим

$$St = \frac{m_2}{m_1} \eta \frac{c_f}{2} \tag{3.18}$$

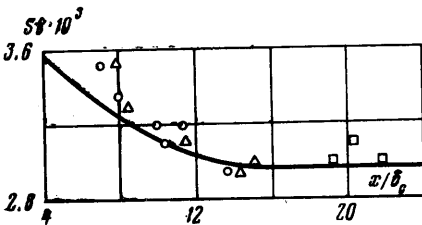
где η определяется соотношением (3.10). Отметим, что в случае совпадения профилей потоков импульса и тепла в струе ($m_1 = m_2$) фактор η несоответствия толщины динамического и теплового пограничного слоев согласно (3.10) зависит только от числа Pr .

4. Согласно соотношению (3.9) и определению $\varphi = y/\beta x$ ширина пограничного слоя при струйном обтекании определяется зависимостью $y_0 = xc_f/2m_1$, следовательно, $\varphi = \varphi_{01}y/y_0 = c_f y/2m_1\beta y_0$. Это определение совместно с (3.6) можно использовать в (3.5), что позволяет представить профиль скоростного напора непосредственно в зависимости от расстояния до стенки и коэффициента сопротивления c_f . Выше предполагалось, что поскольку зависимость c_f от числа Re_0 слабая, то и профили параметров консервативны по отношению к изменениям чисел Re_0 . Это свойство, характерное для обтекания пластины равномерным потоком, при струйном обтекании еще более выражено: согласно, например, зависимости (3.14) $c_f \sim Re_0^{-0.16}$ тогда как для пластины $c_f \sim Re_0^{-0.2}$. Поскольку в заданном интервале чисел Re_0 по соотношениям (3.6), (3.13) $c_f \sim \varphi_+^{2\varepsilon/(2+\varepsilon)}$ (при $\varepsilon = 0.2$, $c_f \sim \varphi_+^{0.18}$), то указанное свойство по существу означает слабое влияние изменения обобщенной координаты подслоя на профиль параметров в пограничном слое. Таким образом, подтверждается предположка, на основе которой введены квазиавтомодельные решения уравнения (2.3).

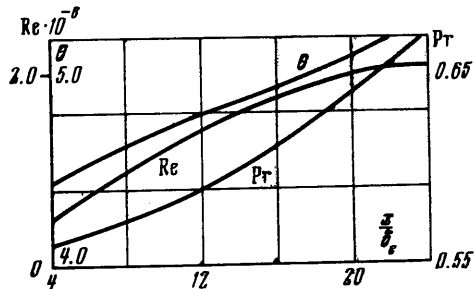
На фиг. 5 показан расчетный профиль u/u_0 скорости в пристенном пограничном слое плоской турбулентной струи ($m_1 = 1$, $u/u_0 = \sqrt{F_1}$), рассчитанный при $\beta = 0.007$, $c_f = 0.005$, $\alpha = 10$. Там же кружками показаны экспериментальные данные [11, 15], полученные при $Re_* = u_*\delta_*\rho/\mu = 7 \cdot 10^3$ (здесь и далее звездочкой отмечены параметры на выходе из сопла, ширина которого δ_*). Заметно отличие расчетного и опытного профилей от профиля скорости степени $1/7$, показанного пунктиром. Результаты расчета коэффициента трения $c_{f*} = 2\tau_w/\rho u_*^2$ с использованием формулы (3.16) при $Re_* = 7 \cdot 10^3 \div 6 \cdot 10^4$ показаны сплошной линией на фиг. 6 (принято $u_0/u_* = 3.6(x/\delta_*)^{-0.5}$ [10], $A = c_f R_*^{1/4} \cdot 10^2$). Соответствующие опытные данные [11] полностью согласуются с расчетной зависимостью. Там же для сравнения показаны пунктиром результаты расчета, исходя из профиля скорости, удовлетворяющего закону $1/7$, и интегрального соотношения Кармана [15] ($\delta_c = \delta_*$).



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

На фиг. 7 дано сравнение расчетных и опытных данных о теплообмене в сложных условиях неизотермического струйного обтекания с догоранием струи. Соответствующее изменение чисел Re , θ по длине струи на краю пограничного слоя показано на фиг. 8. В рассматриваемом примере $m_1 = 1.0$, $m_2 = 0.6$. Тепловой слой оказывается более чем в полтора раза шире динамического.

Во всех рассмотренных случаях значения постоянных α , β , установленные для изотермического обтекания пластины, оказываются неизменными, что позволяет рассматривать их как достаточно универсальные характеристики изложенной полуэмпирической теории пристенной турбулентности. Эта теория, основанная на некоторых «итоговых» свойствах механизма пристенной турбулентности, не предназначена для отображения деталей структуры турбулентности. Существенно, что линейный характер уравнений переноса расширяет возможности разработки эффективных приближенных методов, в том числе основанных непосредственно на решениях дифференциальных уравнений.

Поступило 6 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Reichardt H. Über eine neue theorie der freien turbulenz. ZAMM, 1941, Bd. 21, Nr 5.
2. Reichardt H. Laws of free turbulence. Dusseldorf, Deut. Ing. Verlag, 1951, VDI. Forschungsheft, No. 414.
3. Бай Ши-и. Теория струй. М., Физматгиз, 1960.
4. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
5. Вулис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. М., «Наука», 1965.
6. Вулис Л. А., Карелин В. Е., Устименко Б. П. Распространение турбулентной газовой струи в спутном потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.
8. Лапин Ю. В. Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. М., «Наука», 1970.
9. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Турбулентный пограничный слой сжимаемого газа. Изд-во СО АН СССР, 1962.
10. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
11. Майер Г. Е., Шауэр И. И., Юстис Р. Н. Развитие течения и коэффициент трения в полуограниченной плоской турбулентной струе. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., Техн. механ., Сер. 9, 1963, № 1.
12. Слейтер Л. Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. М., ВЦ АН СССР, 1966.
13. Tailand A., Mathien J. Yet partiel. J. Mecanique, 1967, vol. 6, No. 1.
14. Гиневский А. С., Колесников А. В., Подольный И. Н. Метод расчета пристенных турбулентных струй при наличии продольного градиента давления. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 4.
15. Савин В. К. Исследование гидродинамики в пристенном пограничном слое полуограниченной струи. Инж.-физ. ж., 1969, т. 17, № 4