

УДК 532.517.4 : 532.542.4

ТУРБУЛЕНТНОЕ ТРЕНИЕ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ И КАНАЛАХ

А. П. ИВАНОВ

(Ленинград)

Приводится расчетная зависимость для турбулентного трения, единая по всему сечению потока. Связь между турбулентным трением и профилем осредненной скорости получена на основании уравнения для максимального турбулентного трения, которое следует непосредственно из уравнения движения. Коэффициент в этой связи определен с учетом 12 граничных условий для турбулентного трения, осредненной скорости в их производных. Полученные профили турбулентного трения согласуются с опытными данными Лауфера. Оказалось возможным связать параметры профиля с числом Рейнольдса.

1. Постановка задачи. Рассматривается стационарный турбулентный поток несжимаемой жидкости в круглой трубе и плоском канале постоянного поперечного сечения размером $2r_0$. Течение симметричное и однородное относительно продольной оси x . Осредненные значения скоростей и одноточечных корреляций турбулентных пульсаций зависят только от r . Для такого потока уравнение движения имеет вид [1-3]

$$-\frac{r}{r_0} \tau_0 = \mu \frac{dU}{dr} - \rho \langle uv \rangle \quad (1.1)$$

Турбулентное трение $\tau_m = -\rho \langle uv \rangle$ имеет локальный максимум. Исследуя на экстремум уравнение (1.1) относительно $\rho \langle uv \rangle$, можно получить максимальное значение этой величины для точки $r = r_*$ в виде [1]

$$-\rho \langle uv \rangle_* = \mu r_*^2 \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) \right]_{r=r_*} \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) устанавливает связь между турбулентным трением и профилем осредненной скорости U в одной точке потока, полученную непосредственно из уравнения движения без привлечения каких-либо гипотез или соображений подобия и размерности. Примем в соответствии с [1] аналогичную по структуре связь между τ_m и профилем U для остальных точек потока, т. е. запишем уравнение для τ_m в виде

$$\tau_m = \mu r^2 \left[\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{rU}{dr} \right) \right] k \quad (1.3)$$

где $k = f(r, r_0, r_*)$ — безразмерный коэффициент, подлежащий определению.

2. Коэффициент k и граничные условия. Вид коэффициента k определим из удовлетворения граничным условиям для τ_m , U и их производных. Используя уравнение неразрывности для пульсационных скоростей, условие прилипания жидкости к стенке, симметричность и однородность течения относительно продольной оси, наличие максимума $\tau_* = -\rho \langle uv \rangle_*$ и уравнение (1.1), запишем следующие 12 очевидных граничных условий:

$$\begin{aligned} \tau_m &= 0, & \frac{dU}{dr} &= 0 & (r=0) \\ \tau_m &= \tau_*, & \frac{d\tau_m}{dr} &= 0, & \frac{d^2U}{dr^2} = -\frac{\tau_0}{\mu r_0} & (r=r_*) \\ \tau_m &= 0, & \frac{d\tau_m}{dr} &= 0, & \frac{d^2\tau_m}{dr^2} = 0, & U = 0 \\ \frac{dU}{dr} &= -\frac{\tau_0}{\mu}, & \frac{d^2U}{dr^2} &= -\frac{\tau_0}{\mu r_0}, & \frac{d^3U}{dr^3} = 0 & (r=r_0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для определения требований, которым должен удовлетворять коэффициент k при выполнении граничных условий (2.1), составим ряд дополнительных уравнений. Используя уравнения (1.1) и (1.3), получим

$$k \frac{d^2U}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{r} \right) \frac{dU}{dr} + \frac{\tau_0}{\mu r_0} = 0$$

$$\frac{d^3 U}{dr^3} + \left(\frac{1}{k} \frac{dk}{dr} + \frac{1}{rk} - \frac{1}{r} \right) \frac{d^2 U}{dr^2} + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 k} - \frac{1}{rk} \frac{dk}{dr} \right) \frac{dU}{dr} = 0$$

$$\frac{d\tau_m}{dr} = -\mu \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{\tau_0}{r_0}, \quad \frac{d^2 \tau_m}{dr^2} = -\mu \frac{d^3 U}{dr^3} \quad (2.2)$$

Все последующие производные от τ_m и U по r связаны зависимостью, аналогичной последней зависимости (2.2). Кроме того, из уравнений (1.1) и (1.3) можно составить дифференциальное уравнение для τ_m , в которое в явном виде не будет входить U и ее производные. Для этого, разделив уравнение (1.1) на r и взяв производную по r , получим

$$\mu \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) = - \frac{d}{dr} \left(\frac{\tau_m}{r} \right) \quad (2.3)$$

Из уравнения (1.3) имеем

$$\mu \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \right) = \frac{\tau_m}{r^2 k} \quad (2.4)$$

Приравнявая правые части уравнений (2.3) и (2.4), получим

$$\frac{d\tau_m}{dr} + \tau_m \left(\frac{1}{rk} - \frac{1}{r} \right) = 0 \quad (2.5)$$

Решением уравнения (2.5) будет

$$\tau_m = Cr \exp \left[- \int \frac{dr}{rk} \right] \quad (2.6)$$

где C — постоянная, которую можно определить в явном виде, используя только граничное условие $\tau_m = \tau_*$ при $r = r_*$. Тогда получим

$$C = \frac{\tau_*}{r_*} \exp \left[\int \frac{dr}{rk} \right]_{r=r_*} \quad (2.7)$$

Анализ уравнений (2.2) — (2.7) приводит к выводу, что все 12 граничных условий (2.1) будут выполнены, если коэффициент k удовлетворяет следующим требованиям:

$$k \neq 0 \quad (r = 0), \quad \int \frac{dr}{rk} = \infty, \quad k = 0 \quad (r = r_0), \quad \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\tau_m}{k} = 0 \quad (r \rightarrow r_0)$$

Из уравнений (1.2) и (1.3) следует, что должно выполняться и условие $k = 1$ при $r = r_*$. Этим требованиям будет удовлетворять коэффициент вида

$$k = \frac{r_*}{r} \left(\frac{r_0 - r}{r_0 - r_*} \right)^2 \quad (2.8)$$

Обозначая расстояние от стенки потока $y = r_0 - r$, $y_* = r_0 - r_*$ и вводя безразмерные величины $\eta = y / r_0$, $\eta_* = y_* / r_0$, получим вместо (2.8)

$$k = \frac{1 - \eta_*}{1 - \eta} \left(\frac{\eta}{\eta_*} \right)^2 \quad (2.9)$$

3. Профиль турбулентного трения. Из уравнений (2.6) и (2.8) получаем

$$\tau_m = Cr \exp \left[- \frac{(r_0 - r_*)^2}{r_*(r_0 - r)} \right] \quad (3.1)$$

а с учетом (2.7)

$$\frac{\tau_m}{\tau_*} = \frac{r}{r_*} \exp \left[\frac{(r_0 - r_*)(r_* - r)}{r_*(r_0 - r)} \right] \quad (3.2)$$

В безразмерных переменных уравнение (3.2) принимает вид

$$\frac{\tau_m}{\tau_*} = \frac{1 - \eta}{1 - \eta_*} \exp \left[\frac{\eta_*(\eta - \eta_*)}{\eta(1 - \eta_*)} \right] \quad (3.3)$$

Экспериментальные профили [4-6] обычно представляются отношением $\tau_m / \rho v_*^2$, где $v_*^2 = \tau_0 / \rho$.

Рассматривая течение жидкости в центре трубы или канала, где обычно пренебрегают величиной $\mu \, dU/dr$ по сравнению с τ_m , из уравнения (1.1) получим

$$(r/r_0)\rho v_*^2 = \tau_m \quad (r \rightarrow 0)$$

и можно принять, что

$$\frac{d\tau_m}{dr} = -\frac{1}{r_0} \rho v_*^2 \quad (r = 0) \quad (3.4)$$

Условие (3.4) соответствует линейному закону изменения τ_m при $r \rightarrow 0$ и подтверждается экспериментальными данными [4-6]. Тогда, определяя из уравнения (3.1) $d\tau_m/dr$ при $r = 0$, с учетом (3.4) получим

$$C = -\frac{1}{r_0} \rho v_*^2 \exp \left[-\frac{(r_0 - r_*)^2}{r_0 r_*} \right] \quad (3.5)$$

Из уравнений (3.1) и (3.5) получаем

$$\frac{\tau_m}{\rho v_*^2} = -\frac{r}{r_0} \exp \left[-\frac{r(r_0 - r_*)^2}{r_0 r_* (r_0 - r)} \right] \quad (3.6)$$

а в безразмерных расстояниях от стенки окончательно имеем

$$\frac{\tau_m}{\rho v_*^2} = -(1 - \eta) \exp \left[-\frac{\eta_*^2 (1 - \eta)}{\eta (1 - \eta_*)} \right] \quad (3.7)$$

Значение τ_* получается из уравнений (3.6) и (3.7) при $r = r_*$ или $\eta = \eta_*$ в виде

$$\frac{\tau_*}{\rho v_*^2} = -\frac{r_*}{r_0} \exp \left(\frac{r_*}{r_0} - 1 \right) = -(1 - \eta_*) \exp(-\eta_*)$$

Граничные условия на стенке для τ_m и ее производных свидетельствуют о наличии точки перегиба профиля τ_m в диапазоне $0 < \eta_n < \eta_*$. Выполняя условия для точки перегиба при $\eta = \eta_n$, из уравнений (3.3) и (3.7) получаем

$$\eta_n = \eta_*^2 [1 + (\eta_* - 1)^2]^{-1}$$

Уравнения для τ_m можно упростить, если $\eta \ll 1$ или $\eta_* \ll 1$. Например, для случая $\eta \ll 1$ уравнение (3.7) приводится к виду

$$\frac{\tau_m}{\rho v_*^2} = -\exp \left[-\frac{\eta_*^2}{\eta (1 - \eta_*)} \right] \quad (3.8)$$

Полученные уравнения для τ_m/τ_* , $\tau_m/\rho v_*^2$ и $\tau_*/\rho v_*^2$ и выражены через неизвестную величину η_* , которая может быть определена из опыта или дополнительных соображений. Для определения η_* запишем уравнения (3.7) и (3.8) через параметр yv_*/v . Тогда, соответственно, получим

$$-\frac{\tau_m}{\rho v_*^2} = \left(1 - \frac{y v_*}{v R_*} \right) \exp \left[-\frac{R_{**}^2}{R_* - R_{**}} \left(\frac{v}{y v_*} - \frac{1}{R_*} \right) \right]$$

$$\frac{\tau_m}{\rho v_*^2} = -\exp \left[-\frac{\eta_*^2}{(1 - \eta_*)} \frac{R_* v}{y v_*} \right], \quad R_* = \frac{r_0 v_*}{v}, \quad R_{**} = \frac{y_* v_*}{v} \quad (3.9)$$

Принято считать [2-4, 7], что вблизи стенки, т. е. при $\eta \ll 1$, когда выполняется условие $0 < y v_*/v < 30$, многие параметры турбулентного потока, в том числе и $\tau_m/\rho v_*^2$, зависят только от $y v_*/v$. С учетом этого в уравнении (3.9) можно принять

$$\eta_*^2 R_* (1 - \eta_*)^{-1} = C_1 \quad (3.10)$$

где C_1 — постоянная величина. Тогда уравнение (3.9) принимает вид

$$\frac{\tau_m}{\rho v_*^2} = -\exp \left[-\frac{C_1 v}{y v_*} \right]$$

При известных значениях C_1 и $R_* \eta_*$ определяется из уравнения (3.10) по формуле

$$\eta_* = \frac{C_1}{2R_*} \left[-1 + \left(1 + \frac{4R_*}{C_1} \right)^{1/2} \right]$$

а если $4R_*/C_1 \gg 1$ и $\sqrt{4R_*/C_1} \gg 1$, что справедливо для развитого турбулентного потока, то получим приближенную формулу

$$\eta_* = \left(\frac{C_1}{R_*} \right)^{1/2} = \left(\frac{C_1 v}{r_0 v_*} \right)^{1/2} \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) позволяет установить зависимость η_* от обычного числа Рейнольдса $Re = U_c 2r_0 / v$, где U_c — средняя по сечению потока скорость, так как

$$R_* = Re v_* (2U_c)^{-1} \quad (3.12)$$

а величину v_*/U_c можно определить по любой из имеющихся формул. Например, согласно эмпирическому соотношению Никурадзе [7] для круглых труб имеем

$$U_c / v_* = 2.44 \ln R_* + 2$$

Тогда связь между Re и R_* запишется в виде

$$Re = 2R_* (2.44 \ln R_* + 2)$$

Чтобы показать в явном виде наиболее простую, хотя и ограниченную связь величин η_* и Re , воспользуемся следующими формулами. Выразим отношение v_*/U_c через коэффициент трения λ по формуле [2, 6]

$$v_*/U_c = \sqrt{\lambda/8}$$

а для определения λ воспользуемся степенным законом Блазиуса [2]

$$\lambda = 0.3164 (Re)^{-1/4} \approx 0.32 (Re)^{-1/4}$$

Тогда из уравнения (3.12) получаем

$$R_* = 0.1 (Re)^{0.875}$$

а из уравнения (3.11) имеем

$$\eta_* = \sqrt{10 C_1} (Re)^{-0.44} = C_2 (Re)^{-0.44} \quad (3.13)$$

Таким образом, из уравнения (3.13) следует, что η_* зависит от числа Re и что с увеличением числа Re точка, в которой $\tau_m = \tau_*$, приближается к стенке.

Постоянную C_1 можно определить на основании опытных данных. Тогда для построения профилей и вычисления τ_m нужно знать только один параметр (v_* или число Re). Полученные зависимости для τ_m удовлетворяют граничным условиям (2.1).

4. Сравнение расчетных и экспериментальных результатов. Определение величины C_1 . На фиг. 1 и фиг. 2 представлены профили $\langle uv \rangle / \langle uv \rangle_* = f_1(\eta)$ и $\langle uv \rangle / v_*^2 = f_2(\eta)$, построенные по уравнениям (3.3) и (3.7) при некоторых значениях η_* для всего диапазона изменения η . Прямая на фиг. 2 соответствует уравнению для суммарного трения $\tau/\tau_0 = r/r_0 = 1 - \eta$. Дефицит между этой прямой и указанными профилями характеризует величину вязкого трения $\mu dU/dr$. На этих же фигурах представлены опытные данные Лауфера для круглых труб [4] при числах Рейнольдса $Re_0 = U_0 2r_0 / v = 5 \cdot 10^5$ и $5 \cdot 10^4$ и для канала [5] при $Re_0 = 1.23 \cdot 10^4$, где U_0 — максимальная скорость в сечении потока. Условные точки и пунктирные кривые на фиг. 1 и фиг. 2, снятые с графиков [4, 5], соответственно относятся к непосредственно измеренным значениям $\langle uv \rangle$ и к их значениям, вычисленным по измеренному профилю скорости U . Значения $\langle uv \rangle_*$ при указанных числах Re_0 соответствуют расстояниям от стенки $\eta_* \approx 0.022, 0.06$ и 0.1 [4, 5].

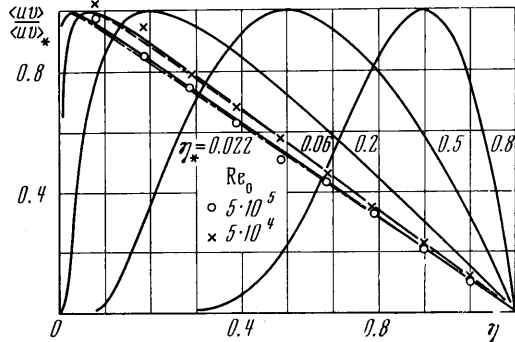
Из фиг. 1 и фиг. 2 следует, что опытные кривые практически совпадают с расчетными профилями, построенными по уравнениям (3.3) и (3.7) при соответствующих η_* .

Представленные на фиг. 1 и фиг. 2 данные характеризуют влияние числа Re_0 на составляющие трения в общем балансе напряжений. С уменьшением числа Re_0 происходит вырождение турбулентного трения и увеличение доли вязкого трения. При числах $Re_0 > 10^4$ распределение $\langle uv \rangle$ близко к линейному почти по всему сечению потока, за исключением области около стенки.

На основании опытных данных [4] связь между η и uv_*/v имеет вид

$$uv_*/v = 8750\eta, \quad R_* = 8750 \quad (Re_0 = 5 \cdot 10^5, Re = 4.2 \cdot 10^5)$$

$$uv_*/v = 1150\eta, \quad R_* = 1150 \quad (Re_0 = 5 \cdot 10^4, Re = 4.4 \cdot 10^4).$$



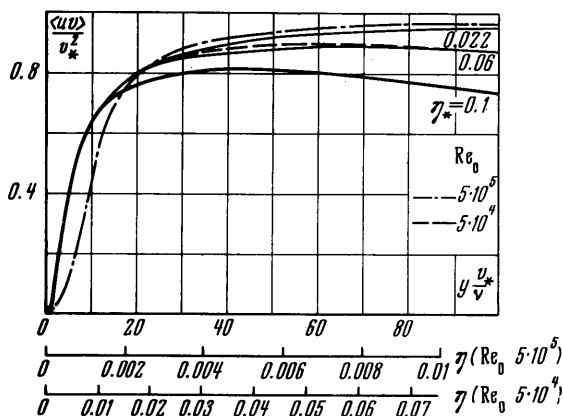
Фиг. 1

Тогда при $\eta_* = 0.022$ и 0.06 получаем $uv_* / \nu = 193$ и 69 , что существенно выше обычно принимаемой границы вязкого подслоя.

Профили $\langle uv \rangle / \nu_*^2 = f(yv_* / \nu) = f_1(\eta)$ в непосредственной близости от стенки представлены на фиг. 3 для трех значений η_* . Опытные данные [4] этой области потока, полученные Лауфером из измеренного профиля U , представлены пунктирными кривыми. Профили, построенные по уравнению (3.7), представлены сплошными кривыми. Из приведенных графиков следует, что совпадение расчетных и опытных профилей вполне удовлетворительное. Некоторое расхождение наблюдается только при $uv_* / \nu < 15$ или при $\eta < 0.002$ для $Re_0 = 5 \cdot 10^5$ и $\eta < 0.015$ для $Re_0 = 5 \cdot 10^4$. При этом следует иметь в виду, что опытные значения около самой стенки, полученные при помощи термоанемометра, могут содержать существенную погрешность [4, 6], связанную с дополнительным охлаждением нити термоанемометра. Эта погрешность увеличивается с уменьшением числа Re .

Фиг. 2

Приведенные на фиг. 3 данные соответствуют принимаемому предположению о зависимости $\langle uv \rangle / \nu_*^2$ только от параметра yv_* / ν при $0 < yv_* / \nu < 30$. Однако верхнее значение в этом неравенстве должно зависеть от числа Re или значения η_* . При малых Re или больших η_* связанных с вырождением τ_m , верхнее значение неравенства будет меньше 30. При $Re > 10^5$ верхнее значение можно принимать больше 30, так как в этом случае вблизи стенки разница между $\langle uv \rangle$ и ν_*^2 становится несущественной. Например, профили $\langle uv \rangle / \nu_*^2$ при $Re = 4.2 \cdot 10^5$ ($\eta_* = 0.022$) и $Re = 2.8 \cdot 10^6$ ($\eta_* = 0.01$) практически совпадают до $uv_* / \nu = 100$ и больше.



Фиг. 3

Характер сопряжения профилей $\langle uv \rangle$ со стенкой и наличие точки перегиба соответствуют граничным условиям на стенке. Графики, приведенные на фиг. 1—3, указывают, что широко распространенное предположение о слое постоянного напряжения трения оправдывается только в связи с масштабами рассматриваемых областей потока.

Пользуясь опытными данными [4, 5] для развитого турбулентного режима и уравнением (3.11), определяем величину постоянной $C_1 = 4.4$. Это значение C_1 соответствует и опытным данным [6]. Тогда для определения точки в сечении потока с τ_* или $\langle uv \rangle_*$ из уравнения (3.11) имеем

$$\eta_* = 2.1(R_*)^{-1/2} = 2.1(\tau_0 \nu_* / \nu)^{-1/2}$$

или из уравнения (3.13), соответствующего закону Блазиуса, имеем

$$\eta_* = 6.6(Re)^{-0.44}$$

Таким образом, профиль турбулентного трения при развитом турбулентном течении определяется, согласно рассмотренной модели, только динамической скоростью v_* или числом Рейнольдса. Точка с максимальным турбулентным трением расположена выше обычно принимаемой границы вязкого подслоя и ее положение зависит от числа Рейнольдса.

Известно [7], что в диапазоне $0 < yv^*/\nu < 100$ наблюдается удовлетворительное совпадение значений $\langle uv \rangle$ в трубе и в пограничном слое на пластине. Поэтому полученные зависимости можно использовать и при расчете течения жидкости вблизи пластины.

Автор благодарен А. И. Зараеву и А. Н. Патрашеву за ценные обсуждения.

Поступило 22 III 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Патрашев А. Н. Гидромеханика. М., Военмориздат, 1953.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
3. Townsend A. A. The structure of turbulent shear flow. Cambr., cup, 1956. (Рус. перев.: Таунсенд А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, М., Изд-во иностр. лит., 1959.)
4. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NACA T. Rept, 1954, No. 1174.
5. Laufer J. Investigation of turbulent flow in a two-dimensional channel. NACA Rept, 1951, No. 1053.
6. Comte-Bellot G. Ecoulement turbulent entre deux parois paralleles. Paris, 1965. (Рус. перев.: Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., «Мир», 1968).
7. Hinze J. O. Turbulence. An introduction to its mechanism and theory. New York MC Graw — Hill, 1959. (Рус. перев.: Хинце И. Турбулентность. Ее механизм и теория М., Физматгиз, 1963.)

УДК 532.526.5 : 532.555.2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ЗОНАХ ОТРЫВА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПЕРЕД ДВУХМЕРНЫМ УСТУПОМ

Б. Е. ЛУЖАНСКИЙ, В. П. СОЛНЦЕВ

(Москва)

Приведены результаты экспериментального исследования течения в зонах отрыва турбулентного пограничного слоя перед двухмерным прямоугольным уступом при дозвуковой скорости потока. Исследовалась картина течения, распределение статического давления на поверхности пластины и уступа, определялись характерные размеры отрывных зон и параметры пограничного слоя в отрывном сечении.

Течение и теплообмен перед уступом при дозвуковой скорости потока изучены недостаточно. В работах [1-3] имеются лишь отрывочные данные, которые не дают возможности определить схему течения, размеры отрывной зоны и распределение статического давления в зависимости от параметров потока и пограничного слоя перед уступом.

1. Эксперименты проводились в дозвуковой аэродинамической трубе с открытой рабочей частью, описание которой имеется в работе [4]. Число Маха достигало 0.85, число Рейнольдса $R = 2 \cdot 10^4 - 3.7 \cdot 10^5$. Экспериментальный участок, схема которого показана на фиг. 1, представлял собой открытый сверху прямоугольный канал шириной 260 или 80 мм, на дно 1 которого устанавливались уступы 2 высотой h_0 от 5 до 45 мм. Для уменьшения концевых эффектов пограничный слой с боковых стенок канала сливался через щели, расположенные на некотором расстоянии перед отрывной зоной. Размер и расположение щелей, а также ширина канала подбирались из условия обеспечения независимости картины течения, размеров зоны и распределения статического давления в отрывной зоне (исключая небольшие участки у боковых стенок канала), от отношения ширины канала к высоте уступа.

За счет слива пограничного слоя со дна канала или установки на дно канала сменных проставок с различной шероховатостью было получено изменение толщины