

УДК 532.5.011:532.522.2

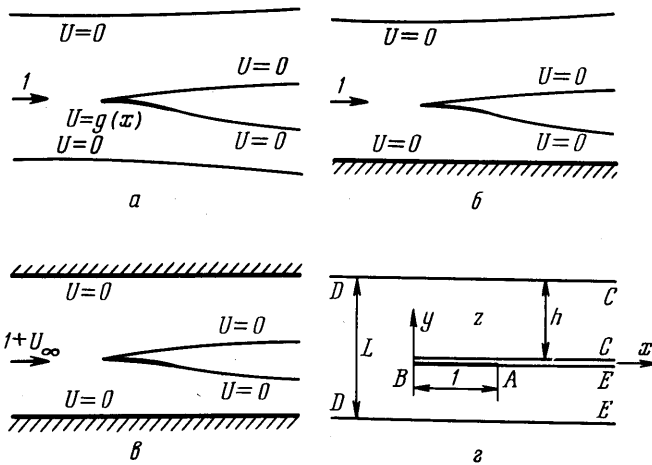
СТРУЙНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ ОГРАНИЧЕННЫМ ПОТОКОМ

А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

(Чебоксары)

Рассматриваются три случая струйного обтекания тонкого профиля: струей конечной ширины (фиг. 1, а), потоком жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью, снизу — твердой стенкой (фиг. 1, б), и в канале с прямолинейными стенками (фиг. 1, в). В нелинейной постановке указанные задачи были исследованы автором в работах [1, 2].

В работе Цяна [3] была рассмотрена линейная задача о струйном обтекании по схеме Кирхгофа криволинейной дуги потоком жидкости, ограниченной снизу твер-



Фиг. 1

дой прямолинейной стенкой, сверху — свободной поверхностью (фиг. 1, б). Однако автор получил фактически решение другой задачи — задачи об обтекании профиля струей конечной ширины (фиг. 1, а).

Обозначим через  $L$  и  $h$  соответственно ширину потока и углубление профиля, отнесенные к хорде профиля. Хорда профиля, величина скорости на струях и плотность жидкости принимаются равными единице.

Перейдем к отысканию функции возмущенной скорости  $\omega = u - iv$ . Линеаризованные краевые условия для функции  $\omega$  имеют следующий вид:  $u = 0$  на свободных поверхностях,  $v = 0$  на прямолинейных стенках,  $v = dy_n/dx = g(x)$  на нижней поверхности профиля ( $y_n$  — ордината профиля). Эти условия удовлетворяются на границах полосы с разрезом (фиг. 1, в).

Для нахождения функции  $\omega$  отобразим полосу с разрезом на первый квадрант вспомогательной плоскости  $\zeta$  (для течений 1а, в соответствие точек указано на фиг. 2, а, для течения 1в — на фиг. 2, б). Отражающие функции легко могут быть построены методом особенностей. Для течений 1а, б имеем

$$z = \frac{1}{\pi} \left[ (L - h) \ln \frac{b^2}{\zeta^2} - h \ln \frac{1 - \zeta^2}{1 - b^2} \right] \tag{1}$$

$$b^2 = 1 - \frac{h}{L}, \quad \frac{1}{\pi} \left[ (L - h) \ln \frac{b^2}{a^2} - h \ln \frac{1 - a^2}{1 - b^2} \right] = 1 \tag{2}$$

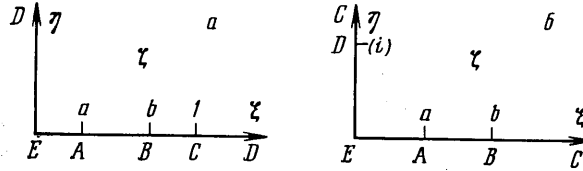
Для течения 1в имеем

$$z = \frac{1}{\pi} \left[ (L - h) \ln \frac{b^2}{\zeta^2} - L \ln \frac{b^2 + 1}{\zeta^2 + 1} \right] \tag{3}$$

$$b^2 = \frac{L}{h} - 1, \quad \frac{1}{\pi} \left[ (L - h) \ln \frac{b^2}{a^2} - L \ln \frac{b^2 + 1}{a^2 + 1} \right] = 1 \tag{4}$$

Первые соотношения (2) и (4) получены из условия  $dz(b)/d\zeta = 0$ , вторые определяют длину хорды профиля и служат для нахождения параметра  $a$ .

Продолжая функцию  $\omega(\zeta)$  в соответствии с граничными условиями на всю верхнюю полуплоскость  $\text{Im } \zeta \geq 0$ , приходим к смешанной краевой задаче с заданной мнимой частью на интервалах  $(-b, -a)$  и  $(a, b)$  и действительной частью  $u = 0$



Фиг. 2

на смежных интервалах. При этом для течения  $1a$   $v(-\xi) = v(\xi)$ , для течений  $1b, e$   $v(-\xi) = -v(\xi)$ . Кроме того, функция  $\omega(\zeta)$  в точках  $\zeta = \pm b$  имеет интегрируемую особенность, в точках  $\zeta = \pm a$  — ограничена.

Воспользовавшись формулой Келдыша — Седова [4], находим для течения  $1a$

$$\omega = -\frac{2i}{\pi} \left( \frac{\zeta^2 - a^2}{\zeta^2 - b^2} \right)^{1/2} \int_a^b \left( \frac{b^2 - t^2}{t^2 - a^2} \right)^{1/2} \frac{g(t) dt}{t^2 - \zeta^2} \quad (5)$$

для течений  $1b, e$

$$\omega = -\frac{2i\zeta}{\pi} \left( \frac{\zeta^2 - a^2}{\zeta^2 - b^2} \right)^{1/2} \int_a^b \left( \frac{b^2 - t^2}{t^2 - a^2} \right)^{1/2} \frac{g(t) dt}{t^2 - \zeta^2} \quad (6)$$

Заметим, что найденная в [3] зависимость  $u(\xi)$  получается из (5), хотя автор работы [3] рассматривал течение  $1b$ .

Коэффициенты подъемной силы  $C_y$  и сопротивления  $C_x$  могут быть определены по формулам

$$C_y = -2 \operatorname{Re} \int_L \omega dz, \quad C_x = -\operatorname{Im} \int_L \omega^2 dz \quad (7)$$

где  $L$  — контур, охватывающий отрезок  $AB$  в плоскости  $z$ . Деформируя контур  $L$  до границ течения, находим для течения  $1a$

$$C_y = -2[v_1 h + v_0(L - h)], \quad C_x = v_1^2 h + v_0^2(L - h) \quad (8)$$

для течения  $1b$

$$C_y = -2v_2 h - \frac{8}{\pi^2} \int_0^\infty I(\eta) \left( \frac{\eta^2 + a^2}{\eta^2 + b^2} \right)^{1/2} \left( L - h + \frac{h\eta^2}{1 + \eta^2} \right) d\eta, \quad C_x = v_2^2 h \quad (9)$$

для течения  $1e$

$$C_y = -\frac{8}{\pi^2} \int_0^\infty I(\eta) \left( \frac{\eta^2 + a^2}{\eta^2 + b^2} \right)^{1/2} \left( L - h + \frac{L\eta^2}{1 - \eta^2} \right) d\eta, \quad C_x = Lu_\infty^2 \quad (10)$$

Значения  $v_0, v_1, v_2, u_\infty$  и функция  $I(\eta)$  определяются по формулам

$$v_0 = \frac{2}{\pi} \frac{a}{b} \int_a^b \left( \frac{b^2 - t^2}{t^2 - a^2} \right)^{1/2} \frac{g(t) dt}{t}$$

$$v_1 = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - a^2}{1 - b^2} \right)^{1/2} \int_a^b \left( \frac{b^2 - t^2}{t^2 - a^2} \right)^{1/2} \frac{g(t) t dt}{t^2 - 1}$$

$$v_2 = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1 - a^2}{1 - b^2} \right)^{1/2} \int_a^b \left( \frac{b^2 - t^2}{t^2 - a^2} \right)^{1/2} \frac{g(t) dt}{t^2 - 1}$$

$$u_{\infty} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1+a^2}{1+b^2} \right)^{1/2} \int_a^b \left( \frac{b^2-t^2}{t^2-a^2} \right)^{1/2} \frac{g(t) dt}{t^2+1}$$

$$I(\eta) = \int_a^b \left( \frac{b^2-t^2}{t^2-a^2} \right)^{1/2} \frac{g(t) dt}{t^2+\eta^2}$$

Для плоской пластины ( $g(t) = -a$ ) коэффициенты принимают вид  
 Для течения 1а

$$\frac{C_y}{a} = \frac{C_x}{a^2} = 2h \left[ 1 - \left( \frac{1-a^2}{1-b^2} \right)^{1/2} \right] + 2(L-h) \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \quad (11)$$

Для течения 1б

$$\frac{C_y}{a} = \frac{C_x}{a^2} = \frac{4h}{\pi^2 b^2} \left( \frac{1-a^2}{1-b^2} \right) [K(k) - \Pi(n, k)]^2 \quad (12)$$

Для течения 1в

$$\frac{C_y}{a} = \frac{C_x}{a^2} = \frac{4L}{\pi^2 b^2} \left( \frac{1+a^2}{1+b^2} \right) [\Pi(m, k) - K(k)]^2 \quad (13)$$

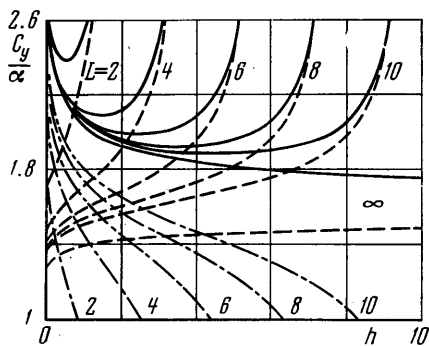
Здесь

$$k = (1 - a^2/b^2)^{1/2}, \quad n = (b^2 - a^2)/(1 - b^2), \quad m = -(b^2 - a^2)/(1 + b^2)$$

а  $K$  и  $\Pi$  — полные эллиптические интегралы первого и третьего рода.

На фиг. 3 для плоской пластины представлены кривые зависимости  $C_y/a$  от относительного погружения  $h$  при различных значениях  $L$ . Сплошная кривая соответствует течению 1б, пунктирная — течению 1в, штрих-пунктирная — течению 1а.

Сравнение с аналогичными расчетами по нелинейной теории [1, 2] показывает их качественную согласованность.



Фиг. 3

Поступило 1 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев А. Г. Обтекание наклонной пластины в канале по схеме с параллельными стенками. Изв. вузов, Математика, 1965, № 3 (46), стр. 155—168.
2. Терентьев А. Г., Лазарев А. В. Кавитационное обтекание пластины ограниченным потоком. В сб. «Физико-технические проблемы», Чебоксары, Тезисы и доклады научной конференции, 1969, стр. 89—101.
3. Tsen Li Fang. Effet de fond sur l'écoulement supercavitant avec surface libre. C. R. Acad. Sci. Paris, 1965, vol. 260, pp. 3843—3846.
4. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., «Наука», 1966.