

УДК 534.28

ДИФРАКЦИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА НЕПОДВИЖНОЙ ПЛАСТИНКЕ

Е. А. КРАСИЛЬЩИКОВА

(Москва)

Задача об определении поля скоростей, возбужденного акустической волной, набегающей на неподвижную пластинку, рассматривается, как начально-краевая задача с подвижной границей для двумерного волнового уравнения. Эта задача решается построением и обращением интегральных уравнений типа Вольтерра. Решение получено в замкнутом виде для произвольного угла наклона фронта набегающей волны к поверхности пластинки и представлено в виде рекуррентных формул, учитывающих влияние любого числа дифракционных волн, последовательно возникающих на границе пластинки.

1. В безграничном объеме идеального газа распространяется слабая ударная волна. Фронт ударной волны представляет собой плоскость, перемещающуюся со скоростью звука c . Ударная волна набегаёт на неподвижную плоскую пластинку ширины d . Вектор скорости e образует с плоскостью пластинки произвольный угол β [1-3].

Возьмем неподвижную систему осей координат Oxz , как указано на фиг. 1. Потенциал скорости Φ возмущенного движения газа удовлетворяет уравнению

$$c^2(\Phi_{xx} + \Phi_{zz}) - \Phi_{tt} = 0 \quad (1.1)$$

На поверхности пластинки выполняется условие обтекания $\Phi_z = 0$.

Представим потенциал скорости в виде

$$\Phi = \varphi_\omega(x, z, t) + \varphi(x, z, t) \quad (1.2)$$

где φ_ω — заданный потенциал скорости в набегающей волне. Функция φ определяет параметры газа в набегающей волне [4, 5].

Искомая функция φ есть решение волнового уравнения, удовлетворяющее условиям на оси x :

на поверхности пластинки за фронтом волны

$$\varphi_z = -[\varphi_{oz}(x, z, t)]_{z=0} = A_\omega(x, t) \quad (1.3)$$

всюду на оси x вне пластинки

$$\varphi = 0 \quad (1.4)$$

Кроме того, имеет место условие

$$\varphi(x, -z, t) = -\varphi(x, z, t) \quad (1.5)$$

Итак, задача о дифракции акустической волны на неподвижной пластинке есть следующая начально-краевая задача с подвижной границей для двумерного волнового уравнения: найти в полуплоскости, определенной неравенством $z \geq 0$, функцию $\varphi(x, z, t)$, которая удовлетворяет уравнению (1.1) и граничным условиям (1.3) и (1.4).

К решению задачи применим метод интегральных уравнений, предложенный ранее в теории тонкого крыла [6, 7].

2. Обратимся к пространству переменных x, z, t (см. [4, 8]). В плоскости xt определим область Σ , в которой задано условие (1.3), и области Σ_1 и Σ_1' , в которых задано условие (1.4). Область Σ представляет собой поло-

Характеристические конусы с вершинами, расположенными в точках $O, A_2, A_4, \dots, A_{2n}, \dots, B_1, B_3, \dots, B_{2n+1}, \dots$, разделяют пространство xzt на области с различным аналитическим видом решения задачи, определяющим функцию φ и ее производные. В частности, в плоскости xt область Σ_1 разделяется на области $\sigma_0, \sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2n}, \dots$, область Σ_1' — на области $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \dots, \sigma_{2n+1}, \dots$, область Σ разделяется на области $s, s_0, s_1, s_{01}, s_2, s_3, s_{23}, \dots, s_{2n}, s_{2n+1}, s_{2n, 2n+1}, \dots$ (фиг. 2).

Функция φ представляет собой искомую функцию внутри области, ограниченной огибающей поверхностью семейства характеристических конусов с вершинами, расположенными на отрезке OB_1 (при этом имеются в виду ветви конусов, простирающиеся в сторону возрастающих значений времени). Вне этой огибающей поверхность функция φ тождественно равна нулю.

Решение уравнения (1.1) возьмем в виде формулы, связывающей функцию φ в произвольной точке плоскости xz с производной φ_z на оси Ox для любого момента времени [4]

$$\varphi(x, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{S'} [\varphi_{z'}^*(\xi', z', \tau')]_{z'=0} \frac{d\xi' d\tau'}{\sqrt{(x' - \xi')(t' - \tau') - z'^2}} \quad (2.1)$$

где область S' есть часть плоскости xt , расположенная внутри характеристического конуса с вершиной в точке, определенной координатами x, z и t (при этом имеется в виду ветвь конуса, простирающаяся в сторону убывающих значений времени). Характеристические координаты x', z', t' связаны с координатами x, z, t соотношениями $c(x' - t') = 2x, x' + t' = 2t, cz' = z$ через φ^* обозначен потенциал скорости φ в новых переменных.

Функция φ^* может быть вычислена по формуле (2.1) для таких совокупностей переменных x', z', t' , для которых производная $\varphi_{z'}^*$ в области S' известна. Производная $\varphi_{z'}^*$ в области Σ задана согласно условию (1.3).

Найдем производную $\varphi_{z'}^*$ в областях Σ_1 и Σ_1' из интегральных уравнений. Обозначим производную $\varphi_{z'}^*$ в областях $\sigma_0, \sigma_2, \sigma_4, \dots, \sigma_{2n}, \dots$ соответственно через $\theta_0, \theta_2, \theta_4, \dots, \theta_{2n}, \dots$, а в областях $\sigma_1, \sigma_3, \sigma_5, \dots, \sigma_{2n+1}, \dots$ — соответственно через $\theta_1, \theta_3, \theta_5, \dots, \theta_{2n+1}, \dots$.

Используя формулу (2.1) и условие (1.4), получим интегральные уравнения для функции θ_{2n} и θ_{2n+1} ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) [6]

$$\int_{t'}^{x'} \frac{\theta_{2n}(\xi', t')}{\sqrt{x' - \xi'}} d\xi' = f_{2n}(x', t') \quad (2.2)$$

$$\int_{x'+2d/c}^{t'} \frac{\theta_{2n+1}(x', \tau')}{\sqrt{t' - \tau'}} d\tau' = f_{2n+1}(x', t') \quad (2.3)$$

Правая часть уравнения (2.2) при $n = 0$ есть

$$f_0(x', t') = - \int_{\omega(t')}^{t'} A_{\omega}^*(\xi', t') \frac{d\xi'}{\sqrt{x' - \xi'}} \quad (2.4)$$

где через A_{ω}^* обозначена заданная функция A_{ω} в переменных x', t' . Функция $\xi' = \omega(\tau')$ представляет собой уравнение кривой W .

Правая часть уравнения (2.2) при $n \geq 1$ определена в виде

$$f_{2n}(x', t') = - \int_{t'-2d/c}^{t'} \frac{A_{\omega^*}(\xi', t')}{\sqrt{x' - \xi'}} d\xi' - \\ - \sum_{i=0}^{n-2} \int_{x'}^{x'+2i+3} \frac{\theta_{2i+1}(\xi', t')}{\sqrt{x' - \xi'}} d\xi' - \int_{x'}^{t'-2d/c} \frac{\theta_{2n-1}(\xi', t')}{\sqrt{x' - \xi'}} d\xi' \quad (2.5)$$

где пределы интегрирования $x'_1, x'_3, \dots, x'_{2n-1}$ представляют собой координаты точек $B_1, B_2, \dots, B_{2n-1}$.

Правая часть уравнения (2.3) при $n = 0$ определена в виде

$$f_1(x', t') = - \int_{\omega^0(x')}^{x'+2d/c} A_{\omega^*}(x', \tau') \frac{d\tau'}{\sqrt{t' - \tau'}} \quad (2.6)$$

(ω^0 — есть обращение функции ω), а при $n \geq 1$ — в виде

$$f_{2n+1}(x', t') = - \int_{x'}^{x'+2d/c} A_{\omega^*}(x', \tau') \frac{d\tau'}{\sqrt{t' - \tau'}} - \\ - \sum_{i=0}^{n-2} \int_{t'}^{t'+2i+2} \frac{\theta_{2n}(x', \tau')}{\sqrt{t' - \tau'}} d\tau' - \int_{t'}^{x'} \frac{\theta_{2n-2}(x', \tau')}{\sqrt{t' - \tau'}} d\tau' \quad (2.7)$$

где пределы интегрирования $t'_0, t'_2, t'_4, \dots, t'_{2n-2}$ представляют собой координаты точек $A_0, A_2, A_4, \dots, A_{2n-2}$.

В выражениях (2.5) и (2.7) сумма определена для $n \geq 2$.

Применяя формулу обращения интегрального уравнения Абеля, получим решения уравнений (2.2) и (2.3) относительно функций θ_{2n} и θ_{2n+1} для $n \geq 1$ в виде формул

$$\theta_{2n}(x', t') = - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x' - t'}} \left\{ \int_{t'-2d/c}^{t'} A_{\omega^*}(\xi', t') \frac{\sqrt{t' - \xi'}}{x' - \xi'} d\xi' + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{n-2} \int_{x'}^{x'+2i+3} \theta_{2i+1}(\xi', t') \frac{\sqrt{t' - \xi'}}{x' - \xi'} d\xi' + \int_{x'}^{t'-2d/c} \theta_{2n-1}(\xi', t') \frac{\sqrt{t' - \xi'}}{x' - \xi'} d\xi' \right\} \quad (2.8)$$

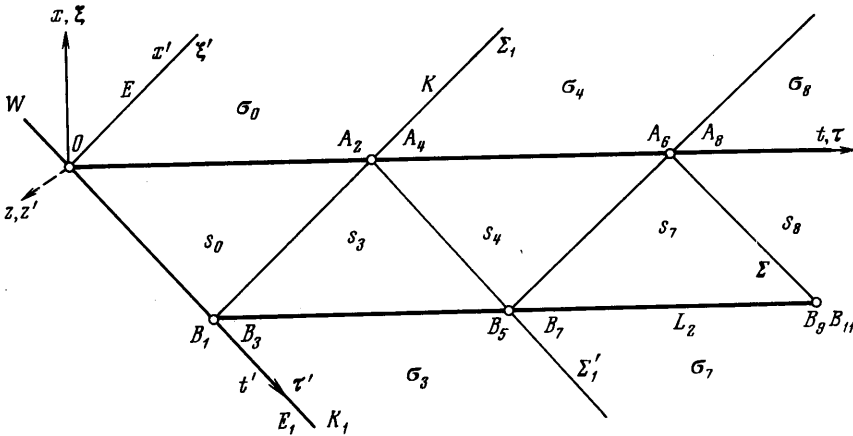
$$\theta_{2n+1}(x', t') = - \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t' - x' - 2d/c}} \left\{ \int_{x'}^{x'+2d/c} A_{\omega^*}(x', \tau') \frac{\sqrt{x' + 2d/c - \tau'}}{t' - \tau'} d\tau' + \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{n-2} \int_{t'}^{t'+2i+2} \theta_{2i}(x', \tau') \frac{\sqrt{x' + 2d/c - \tau'}}{t' - \tau'} d\tau' + \right. \\ \left. + \int_{t'}^{x'} \theta_{2n-2}(x', \tau') \frac{\sqrt{x' + 2d/c - \tau'}}{t' - \tau'} d\tau' \right\} \quad (2.9)$$

Функции f_{2n} и f_{2n+1} зависят от функций θ_{2k} и θ_{2k+1} для индексов $k \leq n - 1$. Функции f_{2n} и f_{2n+1} при $n = 0$ известны. Если уже найдены функции θ_{2k} и θ_{2k+1} для всех значений индекса $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n - 1$, то правые части уравнений (2.2) и (2.3) для номера n становятся известными, и по формулам (2.8) и (2.9) можно вычислить функции θ_{2n} и θ_{2n+1} . Решения уравнений (2.2) и (2.3) при $n = 0$ имеют вид

$$\theta_0(x', t') = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{x' - t'}} \int_{\omega(t')}^{\nu} A_{\omega^*}(\xi', t') \frac{\sqrt{t' - \xi'}}{x' - \xi'} d\xi' \quad (2.10)$$

$$\theta_1(x', t') = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{t' - x' - 2d/c}} \int_{\omega^0(x')}^{x'+2d/c} A_{\omega^*}(x', \tau') \frac{\sqrt{x' + 2d/c - \tau'}}{t' - \tau'} d\tau' \quad (2.11)$$

Итак, зная решения θ_0 и θ_1 , можно найти последовательно функции θ_2 и θ_3 , θ_4 и $\theta_5, \dots, \theta_{2n}$ и θ_{2n+1} для любого номера n .



Фиг. 3

В исследуемом случае движения фронта ударной волны с постоянной скоростью, равной скорости звука c , кривая W является прямой линией, заданной уравнением

$$\xi' = \omega(\tau') = -\tau' \operatorname{tg}^2(\beta/2), \quad (2.12)$$

где угол β удовлетворяет неравенству $0 \leq \beta \leq 1/2\pi$.

Рассмотрим предельный случай, когда угол $\beta = 0$. В этом случае прямые OE_1 и OB_1 совпадают. Следовательно, определенные выше точки отражения A_2 и A_4, A_6 и A_8, \dots, A_{2n} и A_{2n+2}, \dots , и точки B_1 и B_3, B_5 и B_7, \dots, B_{2n+1} и B_{2n+3}, \dots попарно совпадают. Плоские области Σ_1, Σ_1' и Σ разделяются соответственно на области $\sigma_0, \sigma_4, \sigma_8, \dots, \sigma_{4m}, \dots$, на области $\sigma_3, \sigma_7, \sigma_{11}, \dots, \sigma_{4m+3}, \dots$ и на области $s_0, s_3, s_4, s_7, s_8, \dots, s_{4m}, s_{4m+3}, \dots$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) с различным аналитическим видом решения задачи (фиг. 3). Функция θ_0 также определяется интегралом (2.10), в котором при $\beta = 0$ нижний предел интегрирования $\omega(t') = 0$. Функции θ_{4m} для $m \geq 1$ можно вычислить по формуле (2.8), если в ней вместо номера n положить $2m$, а под знаком суммы вместо индекса суммирования i положить $2j + 1$ и распространить суммирование по всем значениям индекса $j = 0, 1, 2, \dots, m - 2$. Функции θ_{4m+3} ($m = 1, 2, 3, \dots$) можно вычислить

по формуле (2.9), если в ней вместо номера n положить $2m + 1$, а под знаком суммы вместо индекса суммирования i положить $2j$ и суммирование распространить по всем значениям индекса $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$.

Таким образом, зная решение θ_0 , последовательно находятся функции $\theta_3, \theta_4, \theta_7, \theta_8, \dots, \theta_{4m}, \theta_{4m+3}$ для любого номера m .

В частности, задача о дифракции акустической волны на пластинке конечной ширины, когда волна перемещается в направлении нормали к пластинке и достигает всех точек поверхности пластинки одновременно (угол $\beta = 1/2\pi$), впервые была исследована в работе [9].

3. Зная потенциал скорости, можно определить поле давления, в частности найти распределение давления на поверхности пластинки.

Согласно интегралу Лагранжа для неустановившихся безвихревых течений газа и условию (1.5) разность давлений потока газа на пластинке связана с функцией φ^* соотношением

$$p(x', t') = p_+(x', t') - p_-(x', t') = 2\rho[\varphi^*_{,x'}(x', t') + \varphi^*_{,t'}(x', t')], \quad (3.1)$$

где ρ — плотность невозмущенного газа.

Используя формулу (2.1), решения (2.8), (2.9), соотношение (3.1) и представляя функцию ω согласно уравнению (2.12), получим формулы распределения давления в областях s, s_0, s_1 и s_{01} (фиг. 2).

В области s , где не сказывается влияние дифракционных волн, разность давлений выражается формулой

$$\begin{aligned} p(x', t') = & -\frac{\rho}{\pi} \int_{-x' \operatorname{ctg}^2 1/2\beta}^{t'} \int_{-\tau' \operatorname{tg}^2 1/2\beta}^{x'} K(\xi', \tau'; x', t') d\xi' d\tau' - \\ & -\frac{\rho}{\pi} \{1 + \operatorname{tg}^2 1/2\beta\} \int_{-x' \operatorname{ctg}^2 1/2\beta}^{t'} \frac{A_{\omega}^*(-\tau' \operatorname{tg}^2 1/2\beta, \tau')}{\sqrt{(x' + \tau' \operatorname{tg}^2 1/2\beta)(t' - \tau')}} d\tau' \quad (3.2) \\ K(\xi', \tau'; x', t') = & \frac{A_{\omega\xi'}^*(\xi', \tau') + A_{\omega\tau'}^*(\xi', \tau')}{\sqrt{(x' - \xi')(t' - \tau')}} \end{aligned}$$

В области s_0 , где сказывается влияние дифракционной волны, возникающей в момент $t_0 = 0$ на границе A пластинки, разность давлений выражается формулой

$$\begin{aligned} p(x', t') = & -\frac{\rho}{\pi} \int_{x'}^{t'} \int_{-\tau' \operatorname{tg}^2 1/2\beta}^{x'} K(\xi', \tau'; x', t') d\xi' d\tau' - \quad (3.3) \\ & -\frac{\rho}{\pi} \{1 + \operatorname{tg}^2 1/2\beta\} \int_{x'}^{t'} \frac{A_{\omega}^*(-\tau' \operatorname{tg}^2 1/2\beta, \tau')}{\sqrt{(x' + \tau' \operatorname{tg}^2 1/2\beta)(t' - \tau')}} d\tau' \end{aligned}$$

В области s_1 , где сказывается влияние дифракционной волны, возникающей в момент t_1 на границе B , разность давлений выражается формулой

$$\begin{aligned} p(x', t') = & -\frac{\rho}{\pi} \int_{t'-2d/c}^{x'} \int_{-\xi' \operatorname{ctg}^2 1/2\beta}^{t'} K(\xi', \tau'; x', t') d\tau' d\xi' + \quad (3.4) \\ & +\frac{\rho}{\pi} \{1 + \operatorname{ctg}^2 1/2\beta\} \int_{t'-2d/c}^{x'} \frac{A_{\omega}^*(\xi', -\xi' \operatorname{ctg}^2 1/2\beta)}{\sqrt{(x' - \xi')(t' + \xi' \operatorname{ctg}^2 1/2\beta)}} d\xi' \end{aligned}$$

В области s_{01} , где одновременно сказывается влияние двух дифракционных волн, возникающих в моменты времени t_0 и t_1 соответственно на границах A и B пластинки, в случае, когда прямые, определенные уравнениями $\tau' = x'$ и $\xi' = t' - 2d/c$ не пересекаются в области Σ (ξ' и τ' — текущие координаты), разность давлений выражается формулой

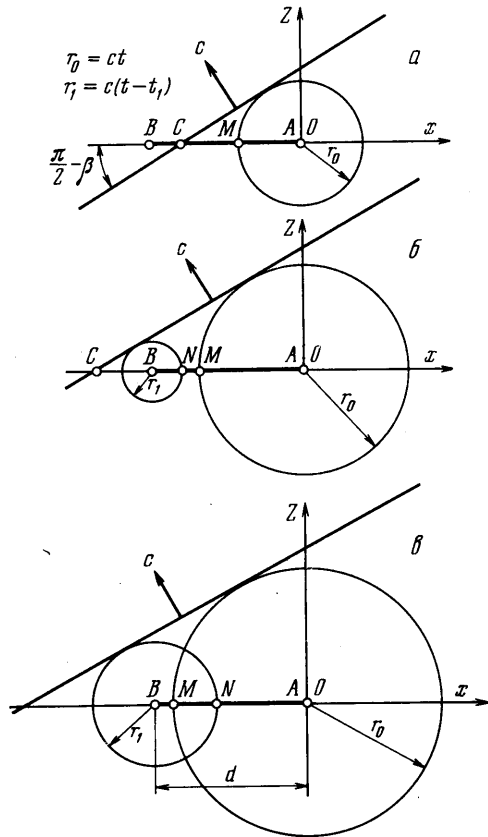
$$\begin{aligned}
 p(x', t') = & -\frac{\rho}{\pi} \int_{t'-2d/c}^{-x'tg^{2\frac{1}{2}}\beta} \int_{-\xi'ctg^{2\frac{1}{2}}\beta}^{t'} K(\xi', \tau'; x', t') d\tau' d\xi' - \\
 & -\frac{\rho}{\pi} \int_{-x'tg^{2\frac{1}{2}}\beta}^{x'} \int_{x'}^{t'} K(\xi', \tau'; x', t') d\tau' d\xi' + \\
 & +\frac{\rho}{\pi} \{1 + ctg^{2\frac{1}{2}}\beta\} \int_{t'-2d/c}^{-x'tg^{2\frac{1}{2}}\beta} \frac{A_{\omega}^*(\xi', -\xi'ctg^{2\frac{1}{2}}\beta)}{\sqrt{(t' + \xi'ctg^{2\frac{1}{2}}\beta)(x' - \xi')}} d\xi'
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Определим давление газа на поверхности пластинки для интервала времени $0 < t < t_3 = d/c$.

В момент времени t , принадлежащий интервалу $0 < t < d/c \cos \beta = t_1$ (фиг. 4, а), разность давлений на отрезке CM пластинки, где $-ct/\cos \beta \leq x \leq -ct$, вычисляется по формуле (3.2), а на отрезке MA , где $-ct \leq x \leq 0$, — по формуле (3.3).

В момент времени t , принадлежащий интервалу $(d/c) \cos \beta < t < (d/2c)(1 + \cos \beta) = t_k$ (фиг. 4, б), разность давлений на отрезках BN , где $-d \leq x \leq -d(1 + \cos \beta) + ct$, NM , где $-d(1 + \cos \beta) + ct \leq x \leq -ct$, и MA , где $-ct \leq x \leq 0$, соответственно вычисляется по формулам (3.4), (3.2) и (3.3). Величина t_k представляет собой координату точки пересечения прямых OE_1 и B_1K (фиг. 2).

В момент времени t , принадлежащий интервалу $(d/2c)(1 + \cos \beta) < t < d/c$ (фиг. 4, в), разность давлений на отрезках BM ($-d \leq x \leq -ct$), MN ($-ct \leq x \leq -d(1 + \cos \beta) + ct$) и на NA ($-d(1 + \cos \beta) + ct \leq x \leq 0$) соответственно вычисляется по формулам (3.4), (3.5) и (3.3).



Фиг. 4

Поступило 26 VIII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
 2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
 3. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 2, М., «Наука», 1970.
 4. Красильщикова Е. А. Неустановившиеся движения крыла бесконечного размаха. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 2.
 5. Красильщикова Е. А. Обтекание тонких тел потоком газа при наличии набегающей ударной волны. В кн. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды (к 60-летию академика Л. И. Седова)», М., «Наука», 1969.
 6. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
 7. Krasil'shchikova E. A. Finite span wings in compressible flow. NASA, No. 1383, Washington, 1956.
 8. Красильщикова Е. А. Неустановившиеся движения профиля в сжимаемой среде. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 3.
 9. Fox E. H. The diffraction of sound pulses by an infinitely long strip. Philos. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A, 1948, No. 828.
-