

УДК 533.72+536.423.2

## О СКАЧКЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НА ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ В БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

М. Н. ГАЙДУКОВ, И. Н. ИВЧЕНКО, Ю. И. ЯЛАМОВ

(Москва)

Из решения линеаризованных уравнений Больцмана с операторами столкновений в форме Гросса и Крука получено выражение для скачка концентрации пара, испаряющегося с плоской поверхности жидкости в неподвижный газ, для которого поверхность жидкости непроницаема.

Ленгмюр [1] впервые указал, что на поверхности испаряющейся жидкости давление паров отличается от давления насыщенного пара, т. е. имеет место скачок концентрации пара. Выражение для скачка концентрации на плоской поверхности в бинарной газовой смеси с одинаковыми массами молекул компонентов было получено Брокком [2] путем использования газо-кинетического анализа. Решение задачи при различных массах молекул компонентов до сих пор не было получено.

1. Рассмотрим бинарную газовую смесь, находящуюся над плоской поверхностью жидкости и состоящую из паров жидкости (компонент 1) и газа (компонент 2). Предположим, что давление и температура одинаковы во всем пространстве, на большом расстоянии от поверхности имеются постоянные градиенты концентрации компонентов смеси, направленные по нормали к поверхности, и имеет место диффузия паров жидкости через неподвижный газ. Распределение концентрации пара может быть получено из решения кинетического уравнения Больцмана для функции распределения пара с использованием граничных условий на поверхности жидкости.

Введем систему координат с началом на поверхности жидкости и с осью  $x$ , направленной по нормали к поверхности. Уравнения Больцмана для функций распределения компонентов смеси со столкновительными операторами в форме Гросса и Крука [3] имеют вид

$$v_{ix} \frac{\partial f_i}{\partial x} = \left( \frac{\delta f_i}{\delta t} \right)_{ii} + \left( \frac{\delta f_i}{\delta t} \right)_{ij}, \quad (i, j = 1; 2, i \neq j) \quad (1.1)$$

$$(\delta f_i / \delta t)_{ii} = n_i K_{ii} (f_{ii}^{(0)} - f_i), \quad (\delta f_i / \delta t)_{ij} = n_j K_{ij} (f_{ij}^{(0)} - f_i)$$

$$f_{ii}^{(0)} = n_i(x) \left( \frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ \frac{-m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_i)^2}{2kT} \right]$$

$$f_{ij}^{(0)} = n_i(x) \left( \frac{m_i}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ \frac{-m_i (\mathbf{v}_i - \mathbf{u}_{ij})^2}{2kT} \right] \quad (1.2)$$

Здесь  $\mathbf{v}_i$ ,  $\mathbf{u}_i$  — молекулярные и средние скорости компонентов смеси,  $K_{ii}$ ,  $K_{ij}$ ,  $\mathbf{u}_{ij}$  — столкновительные параметры модели, которые для молекул, взаимодействующих как жесткие упругие сферы, даются формулами [4]

$$K_{ii} = \frac{8}{3} \sigma_i^2 \left( \frac{4\pi kT}{m_i} \right)^{1/2}, \quad K_{ij} = \frac{8}{3} \sigma_{ij}^2 \left[ \frac{2\pi kT (m_i + m_j)}{m_i m_j} \right]^{1/2} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i + \frac{m_j}{m_i + m_j}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i), \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_i + \sigma_j}{2},$$

где  $\sigma_i$  — диаметры молекул.

Задача может быть линеаризована, если предположить, что средняя скорость пара  $u_1$  мала по сравнению со скоростью теплового движения молекул. Линеаризованные уравнения Больцмана в данной постановке задачи ( $u_2 = 0$ ) могут быть решены для каждого компонента независимо.

Будем искать функцию распределения молекул пара в виде

$$f_1^\pm(v_1, x) = f_1^{(0)} \left[ 1 + \frac{gx}{n_{10}} + \frac{m_1}{kT} u_{1x}(\infty) v_{1x} + \Phi^\pm(v_1, x) \right] \quad (1.4)$$

$$f_1^{(0)} = n_{10} \left( \frac{m_1}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_1 v_1^2}{2kT} \right), \quad g = \left( \frac{dn_1}{dx} \right)_\infty$$

Здесь  $n_{10}$  — концентрация насыщенного пара на поверхности жидкости, верхние индексы плюс и минус обозначают величины для молекул, летящих от поверхности и к поверхности жидкости соответственно.

С помощью (1.4) легко вычислить  $n_1(x)$  и  $u_{1x}(x)$

$$n_1(x) = n_{10} [1 + gx/n_{10} + v_1(x)]$$

$$u_{1x}(x) = u_{1x}(\infty) + \left( \frac{2kT}{m_1} \right)^{1/2} G_1(x) \quad (1.5)$$

$$v_1(x) = \frac{1}{n_{10}} \int f_1^{(0)} \Phi_1(v_1, x) dv_1$$

$$G_1(x) = \frac{1}{n_{10}} \int f_1^{(0)} c_{1x} \Phi_1(v_1, x) dv_1, \quad c_1 = \left( \frac{m_1}{2kT} \right)^{1/2} v_1$$

Линеаризованные интегралы столкновений для молекул пара с учетом (1.4), (1.5) будут иметь вид

$$\left( \frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{11} = n_{10} K_{11} f_1^{(0)} [v_1(x) + 2c_{1x} G_1(x) - \Phi_1] \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta f_1}{\delta t} \right)_{12} &= n_{20} K_{12} f_1^{(0)} \left[ v_1(x) - \right. \\ &\left. - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left( \frac{m_2}{kT} u_{1x}(\infty) v_{1x} + 2c_{1x} G_1(x) \right) - \Phi_1 \right] \end{aligned}$$

Учитывая, что при  $x \rightarrow \infty$ ,  $G_1 \rightarrow 0$ , из уравнений (1.1), (1.4), (1.6) получим следующее выражение для скорости диффузии паров относительно газа:

$$u_{1x}(\infty) = -\frac{n_{10} + n_{20}}{n_{10} n_{20}} D_{12} g \quad (1.7)$$

$$D_{12} = \frac{3}{8\sigma_{12}^2 (n_{10} + n_{20})} \left[ \frac{(m_1 + m_2) kT}{2\pi m_1 m_2} \right]^{1/2}$$

Здесь  $D_{12}$  — коэффициент диффузии согласно [5].

Подставляя (1.4) в первое из уравнений (1.1), с учетом (1.6), (1.7) получим следующее интегро-дифференциальное уравнение для поправки  $\Phi_1(c_1, x)$ :

$$\xi c_{1x} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -\Phi_1 + v_1(x) + 2c_{1x} \xi G_1(x) \quad (1.8)$$

$$\xi = \left( \frac{2kT}{m_1} \right)^{1/2} (n_{10}K_{11} + n_{20}K_{12})^{-1},$$

$$\zeta = \left( n_{10}K_{11} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} n_{20}K_{12} \right) (n_{10}K_{11} + n_{20}K_{12})^{-1}$$

Решение уравнения (1.8) будем искать методом полупространственных моментов [6]. Поправку  $\Phi_1^\pm(c_1, x)$  ищем в виде

$$\Phi_1^\pm(c_1, x) = a_0^\pm(x) + a_1^\pm(x) c_{1x} \quad (1.9)$$

Функцию  $\Phi_1$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_1(c_1, x) = & 1/2(a_0^+ + a_0^-) + 1/2(a_0^+ - a_0^-) \operatorname{sign} c_{1x} + \\ & + 1/2(a_1^+ + a_1^-) c_{1x} + 1/2(a_1^+ - a_1^-) c_{1x} \operatorname{sign} c_{1x} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из (1.5) и (1.10) для  $v_1(x)$  и  $G_1(x)$  получим следующие выражения

$$\begin{aligned} v_1(x) &= 1/2(a_0^+ + a_0^-) + 1/2(a_1^+ - a_1^-) \pi^{-1/2} \\ G_1(x) &= 1/2(a_0^+ - a_0^-) \pi^{1/2} + 1/4(a_1^+ + a_1^-) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Умножая (1.8) последовательно на  $(1 \pm \operatorname{sign} c_{1x}) \exp(-c_1^2) dc_1$ ,  $c_{1x} (1 \pm \operatorname{sign} c_{1x}) \exp(-c_1^2) dc_1$  и интегрируя по всему пространству скоростей, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dx} A_0^+ = \gamma_1 A_0^- + \gamma_2 A_1^+, \quad \frac{d}{dx} A_0^- = \gamma_3 A_1^- \quad (1.12)$$

$$\frac{d}{dx} A_1^+ = -2\gamma_4 A_1^-, \quad \frac{d}{dx} A_1^- = 2\gamma_3 A_0^-$$

$$A_0 = a_0^+ \pm a_0^-, \quad A_1^\pm = a_1^+ \pm a_1^-$$

$$\gamma_1 = \frac{8\zeta\pi^{-1/2} - (1 + \zeta)\pi^{1/2}}{\xi(4 - \pi)}, \quad \gamma_2 = \frac{\zeta - 1}{\xi}, \quad \gamma_3 = \frac{\pi - 2}{\xi(4 - \pi)}$$

$$\gamma_4 = \pi^{-1/2} \gamma_3$$

Ограниченное при  $x \rightarrow \infty$  решение системы (1.12) дается формулами

$$\begin{aligned} A_0^+ &= C_1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} C_2 e^{-\alpha x}, & A_0^- &= C_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} C_2 e^{-\alpha x} \\ A_1^+ &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} C_2 e^{-\alpha x}, & A_1^- &= C_2 e^{-\alpha x}, \quad \alpha = \sqrt{2} \gamma_3 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Постоянные  $C_i$  определяются из следующего граничного условия на поверхности жидкости:

$$\alpha_{1m} = \frac{N_1^- - N_1^+}{N_1^- - N_{1eq}^+} \quad (1.14)$$

Здесь  $N_1^\mp$  — потоки молекул пара к поверхности и от поверхности жидкости соответственно,  $N_{1eq}^+$  — поток молекул с поверхности жидкости, если все молекулы покидают жидкость с равновесными условиями,  $\alpha_{1m}$  — коэффициент конденсации.

Согласно (1.4), (1.10) и (1.12) функция распределения молекул пара будет иметь вид

$$f_1(v_1, x) = f_1^{(0)} \left[ 1 + \frac{gx}{n_{10}} + \frac{m_1}{kT} u_1(\infty) v_{1x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} A_0^+ + \frac{1}{2} A_0^- \text{sign } c_{1x} + \frac{1}{2} A_1^+ c_{1x} + \frac{1}{2} A_1^- c_{1x} \text{sign } c_{1x} \right] \quad (1.15)$$

где  $A_0^\pm, A_1^\pm$  задаются (1.13).

Зная функцию распределения, легко получить выражение для численной концентрации молекул пара на большом расстоянии от поверхности

$$n_1(x) = n_{10} \left( 1 + \frac{gx}{n_{10}} + c_d \lambda_1 \frac{g}{n_{10}} \right) \quad (1.16)$$

$$c_d = \frac{3\sqrt{\pi}(2 - \alpha_{1m})}{8\alpha_{1m}} \left( 1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}(2 - \alpha_{1m}) + 2\sqrt{2}\alpha_{1m}}{2(2 - \alpha_{1m}) + \sqrt{2\pi}\alpha_{1m}} \quad (1.17)$$

При  $x = 0$  (1.16) можно записать в виде

$$n_1(0) - n_{10} = c_d \lambda_1 (dn_1 / dx)_\infty \quad (1.18)$$

Последнее равенство дает выражение для скачка концентрации пара.

Выражение (1.17) является более общим, чем в работе [2], так как оно справедливо при любых соотношениях масс компонентов смеси и произвольных коэффициентах конденсации.

Поступило 4 IV 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Langmuir I. The dissociation of hydrogen into atoms. J. Amer. Chem. Soc., 1915, vol. 37, No. 3, pp. 417—458.
2. Brock J. R. On the state of a binary gas mixture near a catalytic surface. J. Catalysis, 1963, vol. 2, pp. 248—250.
3. Gross E. P., Krook M. Model for collision processes in gases: small-amplitude oscillations of charged two-component systems. Phys. Rev., 1956, vol. 102, No. 3, pp. 593—604.
4. Ивченко И. Н., Яламов Ю. И. О диффузионном скольжении бинарной газовой смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, вып. 4.
5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960, стр. 292.
6. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S. Boundary value problems in kinetic theory of gases. Ann. Phys., 1957, vol. 1, No. 2, pp. 141—167. (Рус. перев.: Граничные задачи в кинетической теории газов. Механика. Период. сб. пер. иностр. статей, 1958, № 5.)