УДК 533.72:532.529.2

О КОНЦЕНТРАЦИОННО-СТРЕССОВОЙ КОНВЕКЦИИ И НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ СМЕСЕЙ ГАЗОВ

В. С. ГАЛКИН, М. Н. КОГАН, О. Г. ФРИДЛЕНДЕР

(*Москва*)

Изменения температуры в газе вызывают в общем случае движение газа — термострессовую конвекцию [1, 2]. Ниже показано, что в смесях газов имеет место аналогичное явление — концентрационно-стрессовая конвекция, обусловленная градиентами концентраций, и приведены примеры последней. Обобщаются также некоторые результаты работ [1, 2].

В работах [1, 2] были исследованы основные свойства класса медленных течений «неразреженного» (число Кнудсена $K \to 0$) одноатомного газа при числах Рейнольдса $R \sim 1$ и относительных перепадах температуры в потоке $\theta = T_*^{-1}\Delta T \lesssim 1$, для описания которых уравнения Навье — Стокса с граничными условиями прилипания недействительны (T_* — характерная температура). При этом необходим учет некоторых из барнеттовских членов уравнения импульса, обусловленных градиентами температуры, и температурного скольжения. В случае медленных движений смеси газов имеют место аналогичные эффекты, вызванные градиентами концентраций, если относительные перепады концентраций $N_\alpha = y_{\alpha *}^{-1}\Delta y_\alpha$ порядка единицы [2]. Здесь $y_\alpha = n_\alpha / n$, n_α — число частиц α-й компоненты смеси в единице объема, $n = \Sigma n_\alpha$.

Впервые вопрос о напряжениях в разреженных газах, вызванных неоднородностью температуры, рассматривался Максвеллом [3]. При этом он пренебрегал членами тензора температурных напряжений, содержащими произведения первых производных от T по координатам. Тогда входящие в уравнение импульса барнеттовские температурные члены имеют «градиентный» вид и их можно объединить с давлением. Поэтому Максвелл сделал вывод, что температурные напряжения не вызывают движения и что движение может возникнуть только из-за температурного скольжения; его исследование свелось к рассмотрению перераспределения давления, обусловленного температурными напряжениями, в покоящемся газе. После этого указанный вопрос затрагивался в книге [4], где сделано следующее замечание: «для градиентов скоростей порядка 1 *сек*$^{-1}$ и значений $[\partial^2 T / \partial x_i \partial x_j]$ порядка 1 *град/см*^{2} нельзя полностью пренебречь температурными напряжениями по сравнению с обычными вязкими напряжениями даже при обычных давлениях и они могут играть роль в экспериментах по определению вязкости, в которых допускается неравенство температур». Насколько известно авторам, этим исчерпываются имевшиеся в литературе рассмотрения влияния барнеттовских напряжений (как температурных, так и концентрационных) на течения газа при $K \to 0$. В заключение обзора отметим еще одно явление, для описания которого при $K \ll 1$ нужно привлекать приближение Барнетта: в случае медленных течений смеси газов некоторые из барнеттовских (обусловленных градиентами скорости) членов выражения для диффузионной скорости имеют тот же порядок, что и обычный бародиффузионный член этого выражения [4, 5].

Ниже показана «симметрия» некоторых свойств течений однокомпонентного газа и смеси газов при наличии соответственно барнеттовских температурных и концентрационных напряжений. Рассмотрены условия отсутствия конвекции, вызванной соответствующими барнеттовскими напряжениями. Даны примеры концентрационно-стрессовых течений и рассмотрены свойства течений, вызванных слабыми температурным и диффузионным скольжениями.

1. Основное принципиальное отличие структуры напряжений в приближении Барнетта $p_{ij}^{(2)}$ для смеси газов от случая простого газа состоит в том, что в $p_{ij}^{(2)}$ входят еще вторые производные и произведения первых производных от концентраций, т. е. входят концентрационные напряжения. Так как коэффициенты при различных членах $p_{ij}^{(2)}$ имеют одинаковый порядок, то в случае медленных движений при $\theta \sim 1$, $N_\alpha \sim 1$ концентрационные напряжения порядка температурных и их необходимо

учитывать в уравнении импульса [1, 2]. Иначе говоря, концентрационные напряжения, как и температурные, вызывают скорости порядка «вязкой» скорости

$$u_* = \mu_* / \rho_* L \tag{1.1}$$

где μ_*, ρ_*, L — характерные значения коэффициента вязкости, плотности и размера течения.

При расчете обтекания тел ($R_\infty \lesssim 1$) указанные барнеттовские напряжения нужно учитывать, если скорость набегающего потока $u_\infty \lesssim u_*$. Внутренние течения относятся к рассматриваемому классу течений, если их скорости $u \sim u_*$. Условия, при которых можно пренебречь эффектами гравитационной конвекции, обусловленной неоднородностью поля концентраций, такие же, что и установленные в работе [2] при анализе термострессовой конвекции. Ниже внешние силы не учитываются.

Приближенное выражение для $p_{ij}^{(2)}$ в данных условиях можно найти из полученных в работе [5] методом Грэда соотношений. (Это выражение приводится здесь лишь для иллюстрации.)

$$p_{ij}^{(2)} \approx \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} a_{\alpha\beta}^{*} \left[\frac{\partial q_{\beta i}}{\partial x_j} \right] \tag{1.2}$$

$$\mathbf{q}_\alpha = -\eta_\alpha \nabla T + \frac{5}{2} kT \left\{ \frac{n^2}{\rho} \sum_\beta m_\beta \mathrm{D}_{\alpha\beta} \nabla y_\beta - \frac{\mathrm{D}_\alpha{}^T}{m_\alpha} \nabla \ln T \right\} + \mathbf{q}_{\alpha D} \tag{1.3}$$

$$[A_{ij}] = {}^1\!/_2 (A_{ij} + A_{ij}) - {}^1\!/_3 \delta_{ij} A_{kk}$$

Здесь коэффициенты $a_{\alpha\beta}^*$ пропорциональны μ и зависят от y_α, T и т. д., N — число компонентов смеси, η_α — парциальный коэффициент теплопроводности, k — постоянная Больцмана, m — масса молекулы, $D_{\alpha\beta}$, $D_\alpha{}^T$ — коэффициенты диффузии и термодиффузии многокомпонентных смесей, $\mathbf{q}_{\alpha D}$ — парциальный тепловой поток из-за эффекта Дюфура [6]. В рассматриваемых условиях бародиффузия пренебрежимо мала и не учитывается в (1.3) и ниже. Для бинарной смеси газов из максвелловских молекул при постоянных T, имеем с учетом опущенных в [5] квадратичных членов «моментов» операторов столкновений.

$$p_{ij}^{(2)} = \frac{2D_{12}}{m_1 - m_2} \left(\frac{m_2\mu_1}{y_1} - \frac{m_1\mu_2}{y_2} \right) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} \ln \left(y_1 + \frac{m_2}{m_1 - m_2} \right) \right] +$$
$$+ \frac{m_1 m_2 n^2}{\rho^2} D_{12} \left\{ D_{12} n \left(\frac{m_2\mu_1}{y_1\mu_{11}} + \frac{m_1\mu_2}{y_2\mu_{22}} \right) + \frac{2(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \left(\frac{\mu_2}{y_2} - \frac{\mu_1}{y_1} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{12}{5} A_{21}{}^* (m_1 + m_2)^{-1} \left(\frac{m_1\mu_2}{y_2} + \frac{m_2\mu_1}{y_1} \right) \right\} \left[\frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \right]$$

Очевидно, что, как и в [1, 2], для давления имеем оценку

$$p = p_* [1 + O(K^2)]$$

и переменной частью давления можно пренебречь в уравнении состояния $p = \rho\gamma kT = nkT$ и во всех уравнениях сохранения, за исключением уравнения импульса. Проводя аналогичные [1, 2] оценки и пренебрегая членами порядка K^2 по сравнению с единицей, будем иметь следующую систему уравнений, описывающую рассматриваемые течения.

$$\rho = p_* / \gamma kT, \qquad p_* = \sum_\alpha p_\alpha, \qquad p_\alpha = n_\alpha kT \tag{1.4}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\ln\gamma T = \nabla\mathbf{u} \qquad \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \tag{1.5}$$

$$\frac{\mathrm{D}n_\alpha}{\mathrm{D}t} + n_\alpha\nabla\mathbf{u} + \nabla n_\alpha\mathbf{V}_\alpha = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{p_*}{\gamma kT}\frac{\mathrm{D}u_i}{\mathrm{D}t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ij}^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{ij}^{(2)}}{\partial x_j} = 0 \tag{1.7}$$

$$\frac{p_*}{\gamma kT}\frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} + p_*\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = 0 \tag{1.8}$$

$$p_{ij}^{(1)} = -2\mu\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right], \quad \mathbf{q} = \sum_\alpha \mathbf{q}_\alpha, \quad E = \frac{3}{2}\gamma kT$$

$$\mathbf{V}_\alpha = \frac{n^2}{n_\alpha\rho}\sum_\beta m_\beta \mathrm{D}_{\alpha\beta}\nabla y_\beta - \frac{\mathrm{D}_\alpha{}^T}{n_\alpha m_\alpha}\nabla\ln T \tag{1.9}$$

Здесь диффузионная скорость $\mathbf{V}_\alpha$, напряжения $p_{ij}^{(1)}$ и тепловой поток $\mathbf{q}$ даются приближением Навье — Стокса [6] (см. также (1.3)), в $p_{ij}^{(2)}$ входят температурные и концентрационные напряжения [1].

Уравнения (1.4) — (1.9) получены, исходя из кинетической теории идеального (неплотного) газа. Однако аналогичные уравнения могут быть выписаны с использованием только феноменологических соображений, справедливых и для жидкостей. Поэтому можно предположить, что изучаемые здесь явления могут иметь место и в жидкостях.

Выше течения рассматриваемого класса названы медленными. Однако скорости в таких течениях вовсе не обязательно должны быть исчезающе малыми. Поясним это на примере. Пусть в покоящийся на бесконечности газ помещено тело с температурой $T_* \gg T_\infty$, причем такой, что вблизи тела число Кнудсена

$$K \sim K_\infty (T_* / T_\infty)^{s+1/2} \ll 1 \qquad (\mu \sim T^s)$$

Скорости термострессовой конвекции около тела порядка вязкой скорости (1.1) и

$$M_* = \frac{u_*}{a_*} = \frac{\mu_*}{a_*\rho_* L} \sim K \ll 1$$

В этом смысле рассматриваемое течение медленное. Однако число Маха, рассчитываемое по скорости звука на бесконечности

$$M = \frac{u_*}{a_\infty} = M_*\frac{a_*}{a_\infty} \sim K\left(\frac{T_*}{T_\infty}\right)^{1/2}$$

и при $T_* / T_\infty \gg 1$ оно может быть большим. Вместо тела можно рассмотреть объем газа, нагретый до высокой температуры внешним источником тепла. Если $K = 0.1$, $T_\infty = 300°$ K, а температура этого объема газа $T_* = 3\cdot 10^4$ °K, то $M = 1$ и скорости термострессовой конвекции порядка 10^2 *м/сек*.

Граничные условия для смеси газов в принципиальном отношении отличаются от условий для простого газа наличием диффузионного скольжения (скорости скольжения газа на стенке из-за градиента концентраций

[1] Для смесей нерелаксирующих многоатомных газов уравнения имеют такую же структуру, только вместо p в (1.7) входит «обобщенное» давление, включающее объемную вязкость и соответствующие барнеттовские скалярные члены, вместо $q_{\alpha i}$ в (1.2) входит парциальный тепловой поток за счет переноса только поступательной энергии молекул [7], в выражении для E учитывается еще внутренняя энергия молекул. Выражение для $p_{ij}^{(2)}$ в случае газа из молекул — шероховатых и нагруженных сфер получено в работе [8].

вдоль нее), которое может вызывать течения со скоростями $u \sim u_*$. Остальные граничные условия обычные [1]. При этом в выражениях для условий на стенке пренебрегается величинами $O(K)$ по сравнению с единицей, именно скоростью скольжения, обусловленной градиентом скорости по нормали к телу, температурным скачком и т. д. Так как уравнения справедливы с погрешностью $O(K^2)$, то эти эффекты можно учесть в рамках сформулированной теории (как это делается в теории пограничного слоя).

2. Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях около нагретых (или испаряющих) тел отсутствует движение, т. е. $\mathbf{u} \equiv 0$. Состояние газа должно быть стационарным, иначе не удовлетворится уравнение неразрывности. Далее аналогично [1] заключаем, что необходимым условием отсутствия движения будет постоянство температуры и концентраций вдоль ограничивающих объем газа стенок. Поэтому рассмотрим влияние барнеттовских напряжений, причем сначала на примере однокомпонентного газа. При $\mathbf{u} = 0$ уравнение энергии можно записать в двух формах

$$\nabla^2\Omega = 0, \qquad \Omega = \int \eta \, dT \tag{2.1}$$

$$\nabla^2 T = \varphi(T)(\nabla T \nabla T), \qquad \varphi(T) = -d \ln \eta \,/\, dT \tag{2.2}$$

Скалярную часть барнеттовских напряжений объединим с p, обозначая сумму через π, а оставшуюся часть напряжений — через τ_{ij}. Имеем

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_i} = -\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k}, \qquad \tau_{ik} = \alpha_1 \frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k} + \alpha_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} \tag{2.3}$$

где α_1, α_2 — некоторые функции T, пропорциональные μ^2. Важно отметить, что формулы (2.1) — (2.3), а также и формулы (2.7), (2.8) справедливы и в случае многоатомных газов, следовательно, получаемые ниже выводы носят общий характер (в работе [1] рассмотрен частный случай одноатомного газа с $\mu \sim T^s$). Из (2.3) имеем равенство

$$\frac{\partial^2 \tau_{ik}}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 \tau_{jk}}{\partial x_i \partial x_k} \tag{2.4}$$

Используя в (2.4) формулы (2.2), (2.3), при произвольных $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T)$, $\varphi(T)$ получим уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_i} = 0 \tag{2.5}$$

которое является необходимым условием отсутствия движения.

Таким образом, получено то же уравнение, что и в работе [1]. Поэтому дальнейший анализ и выводы те же, что и в этой работе (несущественное отличие будет в том, что здесь вместо уравнения Лапласа для T^{1+s} имеем уравнение Лапласа для величины Ω, которая по предположению есть однозначная функция T).

Рассмотрим другой «предельный» случай — бинарную смесь газов при равномерном распределении концентраций по стенкам. Пренебрегая эффектом Дюфура [1], полагаем, что $T = \text{const}$ и, следовательно, $n = \text{const}$. В этом случае из уравнения (1.6) имеем

$$\nabla n_\alpha \mathbf{V}_\alpha = 0 \tag{2.6}$$

[1] В противном случае изменения концентраций приводят к переменности T и n Этот эффект отсутствует, если молекулы — максвелловские.

В силу (2.6) и постоянства n, T уравнение энергии удовлетворяется тождественно. Так как $y_2 = 1 - y_1$, то уравнение (2.6) можно записать аналогично (2.1), (2.2)

$$\nabla^2 \Omega_i = 0, \qquad \nabla^2 y_1 = \varphi_1 (\nabla y_1 \nabla y_1), \tag{2.7}$$

а уравнение импульса — в виде (2.3), где теперь

$$\tau_{ik} = \beta_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \beta_2 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_k} \tag{2.8}$$

В формулах (2.7), (2.8) Ω_i, φ_1, β_1, β_2 — функции от y_1. Из (2.8), (2.7) следует уравнение, получающееся из (2.5) заменой T на y_1. Итак, для обоих случаев имеем одинаковые условия (2.5), уравнения Лапласа для Ω_i и краевые условия одного и того же типа.

Следовательно, сделанные ранее выводы [1, 2] справедливы и здесь. В рассмотренных двух случаях газ (или смесь газов) около тела, вообще говоря, движется, т. е. имеют место соответственно термострессовая конвекция и концентрационно-стрессовая конвекция. Первая вызывается температурными напряжениями, вторая — барнеттовскими напряжениями, обусловленными градиентами концентраций. Смесь газов покоится около сферы и между концентрическими сферами, соосными круговыми цилиндрами и параллельными плоскостями, при этом барнеттовские напряжения уравновешиваются давлением.

Отметим, что согласно уравнениям Навье — Стокса в обоих рассмотренных случаях движение отсутствует (если, конечно, существует [1] соответствующее решение уравнения Лапласа для Ω_i). В общем случае, когда существен эффект Дюфура, концентрационно-стрессовая конвекция «сопровождается» термострессовой.

3. Рассмотрим тот же случай бинарной смеси газов, что и в п. 2, т. е. при $n = \mathrm{const}$, $T = \mathrm{const}$. Будем предполагать, что перепады концентраций малы как в газе, так и вдоль тела, т. е. всюду $N_\alpha = \varepsilon \ll 1$. Цель состоит в выводе уравнений, описывающих при таких условиях (и при $u_\infty = 0$) концентрационно-стрессовые течения и течения, вызванные «слабым» диффузионным скольжением. Отнесем, как и в работе [2], все величины к их характерным значениям, в частности $\mathbf{u}$, y_1, $\mathbf{x}$ к u_*, $1/2$, L соответственно. При $\varepsilon \ll 1$ будем иметь $\mathbf{u} \leqslant O(\varepsilon)$, поэтому конвективными членами можно всюду пренебречь. Из уравнений (1.5), (1.6) получаем

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \qquad \nabla^2 y_1 = 0 \tag{3.1}$$

Используя при вычислении выражения $\partial \tau_{ij}^{(2)} / \partial x_j$, где $\tau_{ij}^{(2)}$ дается формулой (2.8), уравнения (1.6), объединяя получающиеся при этом «градиентные» члены с π (как это делалось в работе [2]), обозначая эту сумму через Π и удерживая только главные по ε члены, приведем уравнения импульса к виду, описывающему концентрационно-стрессовую конвекцию

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{F_K}{2} (\nabla y_1)^2 \nabla y_1 \tag{3.2}$$

$$F_k = \dot{\beta}_1 + \ddot{\beta}_2 + 2\varphi_1 (\beta_1 - \dot{\beta}_2), \qquad (\dot{\ }) = d(\quad) / dy_1 |_{y_1 = 1}$$

Здесь φ_1 — коэффициент из второго уравнения (2.7), все коэффициенты — безразмерные. В случае однокомпонентного газа при $\theta = \varepsilon \ll 1$ получаются такие же уравнения с заменой y_1, β_1, β_2, φ_1 на безразмерные величины T, α_1, α_2, φ соответственно. Отсюда получаем следующие выводы:

1) скорости концентрационно-стрессовой конвекции $\mathbf{u}_K$, как и скорости термострессовой конвекции $\mathbf{u}_T$, порядка ε^3 [2]. При одинаковых краевых условиях имеем

$$\mathbf{u}_K = \mathbf{u}_T F_K / F_T \tag{3.3}$$

$$F_T = \dot{\alpha}_1 - \ddot{\alpha}_2 + 2\varphi(\alpha_1 - \dot{\alpha}_2), \qquad \ddot{\alpha} = d\alpha / dT|_{T=1}$$

Из решений для $\mathbf{u}_T$, полученных в работе [2] при $\theta \leqslant 1$, получаем сразу же решения

$$\mathbf{u}_K = {}^1/_3 F_K \mathbf{u}_T$$

На одной стенке принято $y_1 = 1$, на другой — $y_1 = \tau$;

2) в течениях, вызванных слабой неоднородностью T или y_1 по телу, скорости $\mathbf{u} = O(\varepsilon)$. Барнеттовские члены в уравнении импульса (3.2) порядка ε (в П) по сравнению с остальными и ими можно пренебречь. Решения для обоих этих случаев отличаются только коэффициентами в формулах для температурного и диффузионного скольжений и получаются простым пересчетом одно из другого. Концентрационные напряжения на стенке порядка вязких, но вклад их в действующую на тело силу (и момент) равен нулю. Доказательство то же, что и в случае температурного скольжения (п.3 работы [1]). Это доказательство можно упростить: удается непосредственно, без использования теорем Остроградского — Гаусса, показать, что соответствующие интегралы по поверхности тела равны нулю. Тот факт, что при сформулированных условиях вклад местных температурных напряжений в силу равен нулю, отмечался Максвеллом [3].

Поступило 9 VII 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г. О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3, стр. 14—21.
2. Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г. О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3, стр. 98—107.
3. Maxwell J. C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Philos. Trans. Roy. Soc., 1879, vol. 170, p. 231.
4. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
5. Жданов В., Каган Ю., Сазыкин А. Влияние вязкого переноса импульса на диффузию в газовой смеси. ЖЭТФ, 1962, т. 42, вып. 3, стр. 857—867.
6. Гиршфельдер Дж., Кертисс У., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. Алиевский М. Я., Жданов В. М. Явления переноса и релаксация в многоатомных газовых смесях. ЖЭТФ, 1968, т. 55, вып. 1, стр. 221—232.
8. McCoy B. J., Dahler J. S. Second — order constitutive relations for polyatomic fluids. Phys. Fluids, 1969, No. 7, pp. 1392—1403.