

УДК 533.6.011

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

А. М. БИШАЕВ, В. А. РЫКОВ

(Москва)

Задача о теплопередаче между бесконечными параллельными пластинами в разреженном газе исследуется на основе уравнений, полученных осреднением кинетического уравнения Больцмана по поперечной скорости. Численное решение задачи осуществлено для отношения температур пластин $T_0/T_1 = 1/4$ и для различных чисел Кнудсена.

1. Пусть пространство между двумя бесконечными параллельными пластинами, расстояние между которыми L , заполнено одноатомным газом со средней плотностью

$$n^0 = \frac{1}{L} \int_0^L n(x) dx$$

Температуры пластин различны и поддерживаются постоянными. Горячая пластина имеет температуру T_1 , холодная T_0 . Принимается, что частицы газа взаимодействуют между собой как абсолютно жесткие упругие шары с диаметром σ и массой m .

Стационарный процесс теплопроводности в неподвижном газе рассматривается на основе осредненных кинетических уравнений (3.6) работы [1]

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} u \frac{df_0}{dx} = G_1(f_0, \varphi) - f_0 L_1(f_0, \varphi) \quad (1.1)$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} u \frac{dh}{dx} = G_2(f_0, \varphi) - h L_2(f_0, \varphi)$$

$$h = \varphi f_0$$

Здесь x — безразмерная координата, направленная перпендикулярно пластинам, u — безразмерная скорость частиц газа вдоль оси x , $f_0(x, u)$ — плотность распределения частиц по продольной скорости u , $\varphi(x, u)$ — их поперечная температура, G_1, G_2 — двойные интегралы, а L_1 и L_2 — однократные. Их выражения приведены в [1]. Множитель $\sqrt{\pi}/2$ в левой части уравнений (1.1) появился из-за различия определения безразмерной переменной x в данной работе и работе [1]. Переход к безразмерным величинам в (1.1) осуществлялся по формулам

$$x' = lx, \quad u' = U_0 u, \quad \varphi' = T_0 \varphi$$

$$f_0' = \frac{n^0}{U_0} f_0, \quad U_0 = \left(\frac{2kT_0}{m} \right)^{1/2}, \quad l = \frac{1}{\pi \sqrt{2n^0} \sigma^2}$$

Здесь l — средняя длина свободного пробега молекул. Безразмерные плотность n , температура T и поток тепла q определяются через f_0 и φ

$$n = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, u) du, \quad T = \frac{2}{3} \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 + \varphi) f_0 du$$

$$q = \int_{-\infty}^{+\infty} u(u^2 + \varphi) f_0 du$$

Задача состоит в том, чтобы определить стационарное состояние газа между плоскостями и прежде всего макропараметры — профили плотности и температуры, тепловой поток. Решение задачи зависит от двух безразмерных параметров — отношения температур $B = T_1/T_0$ и числа Кнудсена $K = l/L$.

Отражение молекул от стенок предполагается диффузионным с полной импульсной и тепловой аккомодацией, поэтому функции распределения частиц, отраженных от стенок, имеют вид

$$f(0, u, V) = n_0 (m/2\pi kT_0)^{3/2} \exp\{-m(u^2 + V^2)/2kT_0\} \quad (u > 0)$$

$$f(L, u, V) = n_1 (m/2\pi kT_1)^{3/2} \exp\{-m(u^2 + V^2)/2kT_1\} \quad (u < 0)$$
(1.2)

Величины n_0 и n_1 находятся из условий непротекания

$$n_0 = -4\pi^{3/2} (m/2kT_0)^{1/2} \int_{-\infty}^0 \int_0^{+\infty} u f(0, u, V) V dV du$$

$$n_1 = 4\pi^{3/2} (m/2kT_1)^{1/2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u f(L, u, V) V dV du$$

Умножая последовательно (1.2) на $2\pi V$, $2\pi V^3$ и интегрируя по V в пределах от 0 до ∞ , получим граничные условия системы уравнений (1.1). Запишем их в безразмерной форме

$$f_0(x=0, u) = a_0 \pi^{-1/2} \exp -u^2, \quad \varphi(x=0, u) = 1, \quad u > 0$$

$$f_0(x=K^{-1}, u) = a_1 (\pi B)^{-1/2} \exp(-u^2/B)$$

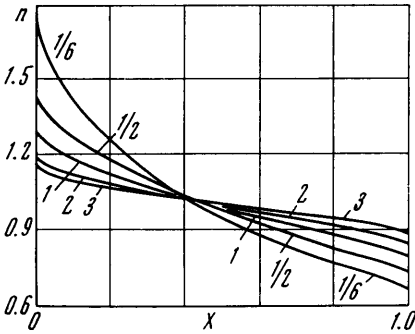
$$\varphi(x=K^{-1}, u) = B, \quad u < 0$$
(1.3)

$$a_0 = -2\pi^{1/2} \int_{-\infty}^0 u f_0(0, u) du, \quad a_1 = 2(\pi/B)^{1/2} \int_0^{\infty} u f_0(K^{-1}, u) du$$
(1.4)

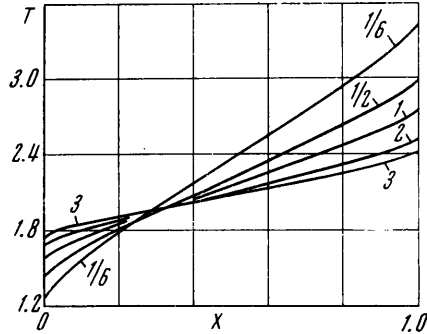
Таким образом, для $x \in [0, K^{-1}]$ требуется найти решение системы уравнений (1.1), удовлетворяющее крайевым условиям (1.3), (1.4) и условию (1.5), означающему равенство безразмерной средней плотности единице

$$K \int_0^{K^{-1}} n(x) dx = 1$$
(1.5)

Параметры B и K считаются заданными. Задача решалась методом итераций. Выбираются некоторые начальные распределения f_0 и φ , удовлетворяющие краевым условиям, и подставляются в L_1, L_2, G_1, G_2 . Затем решается система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) с начальным условием (1.3) для скоростей $u > 0$ и с начальным условием (1.4) для $u < 0$. Значения функций f_0 и φ , полученные для дискретного



Фиг. 1



Фиг. 2

множества равноотстоящих точек переменных x и u , заносятся в память электронной вычислительной машины. Функция f_0 перенормируется так, чтобы выполнялось условие (1.5). По f_0 и φ вычисляются макропараметры. Затем найденные функции подставляются в L_1, L_2, G_1, G_2 и процесс повторяется. Если обозначить индексом n номер приближения, то итерационная процедура имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} u \frac{df_0^n}{dx} &= G_1(f_0^{n-1}, \varphi^{n-1}) - f_0^n L_1(f_0^{n-1}, \varphi^{n-1}) \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} u \frac{dh^n}{dx} &= G_2(f_0^{n-1}, \varphi^{n-1}) - h^n L_2(f_0^{n-1}, \varphi^{n-1}) \\ h^n &= \varphi^n f_0^n \end{aligned} \tag{1.6}$$

Вычисление интегралов проводилось по методу Симпсона с шагом $\Delta u = 0.25$. Бесконечные пределы интегрирования по u заменялись конечными: $-5 \leq u \leq 5$.

Численное решение дифференциальных уравнений (1.6) проводилось по разностной схеме, впервые предложенной для интегрирования модельного кинетического уравнения в работе [2]

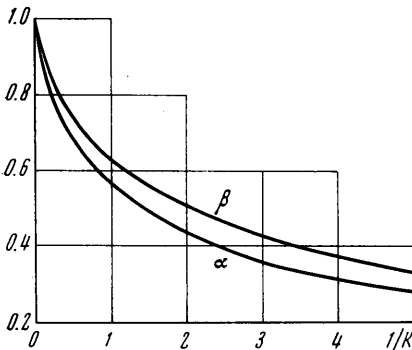
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{u}{\Delta x} (f_0^n(x_i) - f_0^n(x_{i-1})) &= \frac{1}{2} [G_1(f_0^{n-1}(x_i), \varphi^{n-1}(x_i)) - \\ - f_0^n(x_i) L_1(f_0^{n-1}(x_i), \varphi^{n-1}(x_i)) + G_1(f_0^{n-1}(x_{i-1}), \varphi^{n-1}(x_{i-1})) - \\ - f_0^n(x_{i-1}) L_1(f_0^{n-1}(x_{i-1}), \varphi^{n-1}(x_{i-1}))] \end{aligned} \tag{1.7}$$

Подобное уравнение имеет место и для функции h .

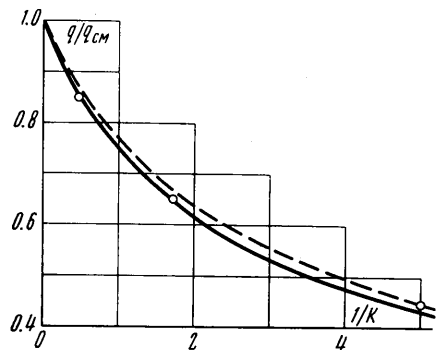
Здесь x_i — узлы разностной сетки по переменной x , отстоящие один от другого с шагом $\Delta x = 0,05 / K^{-1}$. Исключением в применении (1.7) являлись лишь интервалы Δx , непосредственно примыкающие к стенкам, где счет осуществлялся по несколько иной формуле

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{u}{\Delta x} (f_0^n(\Delta x) - f_0^n(0)) = \\ & = G_1(f_0^{n-1}(\Delta x), \varphi^{n-1}(\Delta x)) - f_0^n(\Delta x) L_1(f_0^{n-1}(\Delta x), \varphi^{n-1}(\Delta x)) \quad (1.8) \end{aligned}$$

Численную схему (1.7) в некотором смысле можно считать консервативной, так как выполнение законов сохранения не зависит от величины шага по координате x , а определяется лишь величиной шага по скорости



Фиг. 3



Фиг. 4

Δu . Действительно, если предположить, что итерации сошлись ($f_0^n = f_0^{n-1}$, $\varphi^n = \varphi^{n-1}$ в формуле (1.7)) и шаг Δu бесконечно мал, то, интегрируя уравнение (1.7) по скорости u в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим, что момент от интеграла столкновений строго равен нулю, а получившееся уравнение выражает сохранение потока частиц при переходе от сечения x_{i-1} к x_i . Подобным образом показывается сохранение потоков импульса и энергии.

Задача о теплопередаче рассчитывалась при $B = 4$ и различных значениях числа Кнудсена. Точность вычислений контролировалась по выполнению соотношения $q = \text{const}$, и относительная ошибка составила 1%.

На фиг. 1 и фиг. 2 представлены графики зависимости безразмерных величин плотности и температуры от безразмерной координаты x . На фиг. 3 приведены зависимости относительных скачков температуры α и β на холодной и горячей стенках от K^{-1}

$$\alpha = (T_0 - T(0)) / (T_0 - \sqrt{T_0 T_1}), \quad \beta = (T_1 - T(L)) / (T_1 - \sqrt{T_0 T_1})$$

Здесь $(T_0 - \sqrt{T_0 T_1})$ и $(T_1 - \sqrt{T_0 T_1})$ — скачки температуры соответственно на холодной и горячей стенках при свободномолекулярном режиме.

2. При решении ряда задач кинетической теории пользуются упрощенными уравнениями, аппроксимирующими уравнение Больцмана. Примерами могут служить модельное уравнение Крука и уравнения, предложенные в работах [3, 4]. К сожалению, точность их приближения к уравнению Больцмана не удается оценить теоретически.

Существующие прямые методы численного решения уравнения Больцмана [5] имеют пока столь низкую точность, что величина ошибки вычислений одного порядка с разницей между решением уравнения Больцмана и решениями аппроксимирующих уравнений. Поэтому затруднительно определить точность последних уравнений.

Задача о теплопередаче ранее рассматривалась как на основе модельного уравнения Крука (с частотой столкновений, выбранной по коэффициенту теплопроводности), так и на основе уравнений, предложенных в работах [3, 4]. Все три модели дают практически совпадающие решения задачи. Однако все они обладают одними и теми же недостатками, которые могут вызвать отличие их решений от решения уравнения Больцмана.

В уравнении Больцмана частота столкновений существенно зависит от величины скорости движения частиц газа, тогда как в модельных уравнениях частота столкновений — некоторая функция только макроскопических параметров n и T . Следует в частности, ожидать, что это различие особенно существенно для быстрых частиц. Этот недостаток, присущий уравнениям с частотой столкновений, независимой от скорости частиц, был подтвержден численным счетом в работе [6]. В уравнениях (1.1) частота столкновений есть функция скорости. Поэтому представляет интерес сравнение результатов по теплопередаче с результатами Е. М. Шахова [4], что позволит оценить влияние независимости частоты столкновений от скорости на решение рассматриваемой задачи.

На фиг. 4 приведена зависимость теплового потока, отнесенного к свободномолекулярному значению, от величины обратного числа Кнудсена. Сплошной кривой нанесены результаты по уравнениям (1.1); пунктирной кривой — результаты по уравнению Е. М. Шахова. Максимальное отличие составляет 4%. Кружками нанесены данные работы [7]. На фиг. 5 представлены профили температуры для $K = 1$. Отличие составляет $\sim 1\%$.

Столь малое расхождение в решениях, полученных существенно различными методами, подтверждает правдоподобность утверждения, что истинное решение также слабо отличается от только что рассмотренных.

Авторы благодарны Е. М. Шахову за предоставленные численные результаты решения его приближенных кинетических уравнений.

Поступило 7 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыков В. А. Об осреднении кинетического уравнения Больцмана по поперечной скорости для случая одномерных движений газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
2. Huang A. B., Hartley D. L. Nonlinear rarefied Couette flow with heat transfer. Phys. Fluids, 1968, vol. 11, No. 6, pp. 1321—1326.
3. Holway L. H. L. New statistical models for kinetic theory: methods of construction. Phys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 9, pp. 1658—1673. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1967, вып. 6.)
4. Шахов Е. М. Задача Куэтта для обобщенного уравнения Крука. Эффект максимума напряжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
5. Черемисин Ф. Г. Численное решение кинетического уравнения Больцмана для одномерных стационарных движений газа. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 3.
6. Рыков В. А. Релаксация газа, описываемого кинетическим уравнением Больцмана. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
7. Bird G. A. Direct simulation Monte-Carlo method-current status and prospects. Rarefied Gas Dynamics, vol. 1, New York — London, Acad. Press., 1969.