

УДК 533.6.011

ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА НЕСУЩИХ ТЕЛ ДЛЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Е. И. ФИЛАТОВ

(Казань)

Сделана попытка решить вариационную задачу о форме тела, обладающего максимальным аэродинамическим качеством, без использования некоторых упрощающих допущений, принимавшихся ранее [1-4], а также выяснить влияние заглушенных передних кромок на параметры оптимальных тел.

Рассмотрим прямоугольную декартову систему координат, связанную с телом, которое совершает горизонтальный полет с гиперзвуковой скоростью. Направим ось x противоположно направлению полета, ось z — вертикально вниз, ось y — так, чтобы дополнить систему до правой. Сделаем следующие предположения относительно формы искомого тела: 1) плоскость xz представляет собой плоскость симметрии, так что достаточно рассматривать только часть тела, лежащую в полупространстве $y \geq 0$;

2) рассматриваемое полутело ограничено сверху плоскостью $z = my$, снизу — искомой поверхностью $z = f(x, y)$, имеет прямолинейную переднюю кромку, образованную пересечением плоскостей $z = my$ и $x = ky$, причем донный срез тела расположен в плоскости $x = kl = l_1$, где l — полуразмах;

3) функция $f(x, y)$ настолько гладкая, что в любом сечении $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ может быть хорошо аппроксимирована полиномом невысокой степени;

4) толщина передней кромки пренебрежимо мала по сравнению с характерным размером искомого тела в направлении оси z , т. е. при $x = ky$, $f(x, y) = mz$;

5) объем полутела V задан.

Будем также предполагать, что давление на поверхности тела определяется по формуле Ньютона, коэффициент трения c_f постоянен, а влияние донного среза пренебрежимо мало.

Сопротивление и подъемная сила, отнесенные к удвоенному скоростному напору, а также объем полутела при указанных выше предположениях выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 X_i &= \iint (p^2 r^2 + 0.5c_f \sqrt{1+q^2}) dx dy + 0.25c_f l^2 k \sqrt{1+m^2} \\
 Y_i &= \iint (p^2 r^2 - 0.5c_f p \sqrt{1+q^2}) dx dy \\
 V &= \iint (z - my) dx dy \\
 p &= \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r^2 = \frac{1}{1+p^2+q^2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

¹ Это предположение основано на результатах работ [4] и [5].

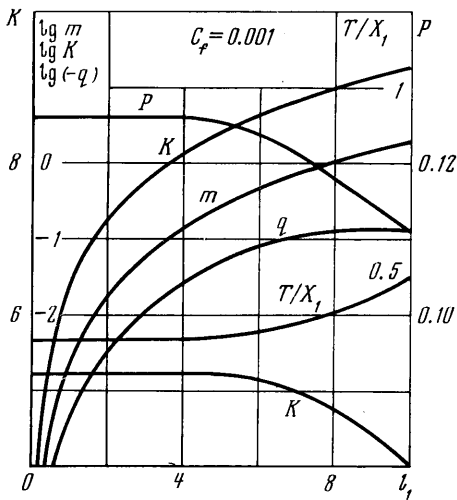
Удобно ввести новые координаты

$$\xi = (x - ky) / l, \quad \eta = y / l, \quad \zeta = (z - ty) / l$$

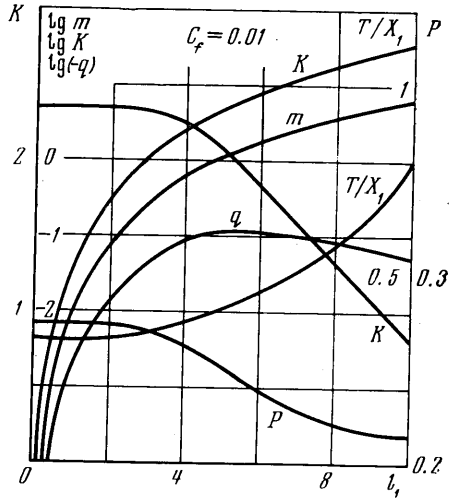
$$p = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \quad q = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - pk + m$$

Тогда уравнение верхней поверхности запишется в виде $\zeta = 0$, уравнение нижней поверхности — $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$, передняя кромка расположится на оси ξ , донный срез — в плоскости $\xi = k(1 - \eta)$.

Значительную часть общего сопротивления тела может составить сопротивление затупленной передней кромки. Толщина затупления определяется



Фиг. 1



Фиг. 2

ограничением на максимальную величину местного теплового потока q_w в каждой точке передней кромки. Будем предполагать, что затупление имеет форму эллиптического цилиндра. В работе [6] показано, что при заданной верхней границе Q_w для местного теплового потока минимальным сопротивлением обладает эллиптическое затупление с соотношением полуосей $b/a = 2.5$ и малой осью, направленной по нормальной к передней кромке составляющей скорости набегающего потока. Зависимость местного теплового потока от угла стреловидности передней кромки, полученная в работе [7], аппроксимировалась выражением

$$q_w = (0.75 + 0.27 \cos \alpha - 1.02 \cos^2 \alpha) q_w^\circ = \varphi(\alpha) q_w^\circ$$

где α — угол между направлением набегающего потока и передней кромкой, q_w° — тепловой поток в окрестности критической линии кругового цилиндра с радиусом $r_0 = b$ при нулевом угле скольжения. Известно, что местный тепловой поток в критической точке удовлетворяет соотношению $q_w^\circ = \kappa r_0^{-1/2}$, где κ — функция параметров набегающего потока. Следовательно, $q_w = \varphi(\alpha) \kappa b^{-1/2}$. Если считать, что тепловой поток на критической линии равен Q_w и ввести в качестве характерного размера радиус цилиндра R_0 , для которого $q_w^\circ = Q_w$, то получается следующее выражение для толщины затупления:

$$b = R_0 [\varphi(\alpha) / \varphi(\pi/2)]^2 \tag{2}$$

Сопротивление и подъемная сила передней кромки, отнесенные к удвоенному скоростному напору, записываются в виде

$$X_2 = {}^{16}/_9 c_x R_0 l [\varphi(\alpha)]^2 \sin^2 \alpha \sqrt{1 + m^2} \quad (3)$$

$$Y_2 = {}^{16}/_9 c_x R_0 l [\varphi(\alpha)]^2 m \sin \alpha \cos \alpha \quad (4)$$

где c_x — коэффициент сопротивления эллиптического цилиндра, а

$$\sin \alpha = \left(\frac{1 + m^2}{1 + k^2 + m^2} \right)^{1/2}$$

Вариационная задача ставится следующим образом: в классе поверхностей $\zeta = \zeta(\xi, \eta)$, удовлетворяющих условию $\zeta(0, \eta) = 0$, найти такую, которая обеспечивает максимальное значение функционалу

$$K = (Y_1 + Y_2) (X_1 + X_2)^{-1}$$

при изопериметрическом условии $V = \text{const}$. При этом m , l и k считаются свободными и варьируются вместе с формой поверхности.

Задача решалась методом Ритца, в качестве минимизирующей использовалась последовательность полиномов вида

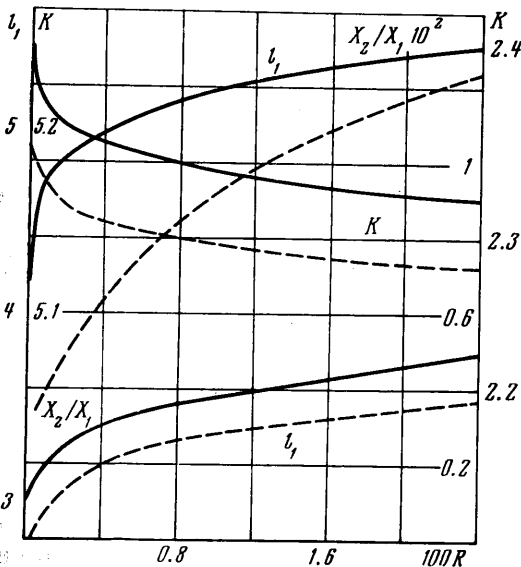
$$\zeta = \sum_{i=0}^{\nu} \sum_{j=0}^{\pi} a_{ij} \xi^i \eta^j \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \nu, j = 0, 1, 2, \dots, \pi) \quad (5)$$

Из условия $\zeta(0, \eta) = 0$ следует, что $a_{0j} = 0$. Коэффициент a_{10} выражался через остальные коэффициенты с помощью изопериметрического условия $V = \text{const}$. Естественное граничное условие на задней границе оптимальной поверхности ввиду его сложности непосредственно не использовалось и применялось только для контроля результатов. Уравнение искомой оптимальной поверхности записывалось в виде

$$\zeta = \xi \{ 6 / k^2 l^3 + a_{11} (\eta - 0.25) + a_{12} (\eta - 0.1) + a_{20} (\xi - k/2) + a_{21} (\xi \eta - k/10) + a_{22} (\xi \eta^2 - k/30) + \dots \} \quad (6)$$

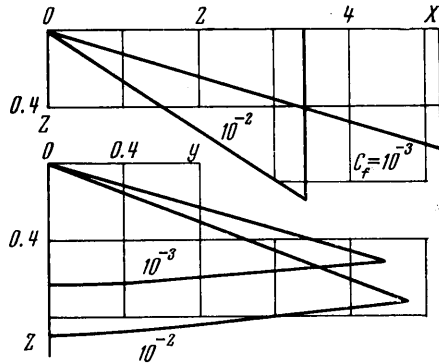
Здесь и ниже все линейные размеры отнесены к $V^{1/3}$. Сформулированная задача содержит два параметра: коэффициент трения c_f и относительный радиус закругления передней кромки $R = R_0 V^{1/3}$.

Определение неизвестных коэффициентов в выражении (6) для искомой поверхности производилось численно с помощью различных модификаций метода спуска. Отметим, что исследованные гиперповерхности $K = F(R, c_f, m, l, k, a_{ij})$ очень пологие в близкой окрестности экстремумов, что сильно затрудняет достижение необходимой точности значений координат экстремальных точек.



Фиг. 3

В качестве нулевого приближения были исследованы пирамиды, которые описываются общим выражением (6), если положить в нем все a_{ij} равными нулю. Для коэффициента трения c_f были взяты значения $c_f = 10^2$ и 10^{-3} , толщина передней кромки изменялась в диапазоне $10^{-4} \leq R \leq 0.04$. Отдельно был рассмотрен предельный случай пирамид с острой передней кромкой ($R = 0$). В последнем случае расчеты показали, что качество пирамид с острой передней кромкой тем выше, чем больше их размах $2l$, т. е. чем ближе они по форме к двумерным поверхностям. При этом тангенс угла наклона нижней поверхности к оси x и качество стремится к максимальным значениям p_1 и K_1 , полученным при решении плоской задачи [2]. На фиг. 1 и фиг. 2 приведены значения параметров пирамид с острыми передними кромками, обладающих максимальным аэродинамическим качеством при соответствующем удлинении. Видно, что при умеренных удлинениях l_1 качество пирамид K и тангенс угла наклона p нижней поверхности к оси x слабо зависят от l_1 и близки к K_1 и p_1 . Видно также, что все оптимальные пирамиды имеют нижнюю поверхность, близкую к плоской, т. е. наклон в направлении оси y мал, а верхнюю поверхность — со значительным наклоном к оси y , тем большим, чем больше l_1 . Высокое качество сохраняется, пока влияние объемности не очень существенно, причем для разных коэффициентов трения характер изменения параметров оптимальных пирамид с увеличением l_1 одинаков, но при большем c_f раньше начинает проявляться трехмерность исследуемых тел и, соответственно, раньше убывает качество. Трение T составляет одну треть общего сопротивления при умеренных значениях l_1 , с ростом удлинения вклад трения в общее сопротивление пирамид значительно возрастает.



Фиг. 4

Отмеченные закономерности сохраняются и для пирамид с затупленной передней кромкой. Влияние затупления передней кромки на параметры оптимальных пирамид проявляется прежде всего в изменении удлинения l_1 , причем, как это видно из фиг. 3 (сплошные кривые соответствуют значению $c_f = 10^{-3}$, пунктирные — $c_f = 10^{-2}$), весьма широкому диапазону исследованных значений толщины затуплений R соответствуют значения l_1 , заключенные в сравнительно небольшом промежутке; при дальнейшем росте R этот промежуток почти не увеличивается. Остальные параметры оптимальных пирамид с затупленной передней кромкой близки к параметрам пирамид соответствующего удлинения с острой передней кромкой, так что в масштабе фиг. 1 и фиг. 2 кривые изменения m , k , q и K в зависимости от l_1 для пирамид с острой и затупленной передней кромкой совпадают. Заметное отличие наблюдается только в поведении величины p , которая для пирамид с затупленной кромкой остается постоянной и равной p_1 во всем диапазоне изменения R . Собственное сопротивление передних кромок для оптимальных пирамид составляет величину порядка 1% сопротивления тела при больших значениях R и убывает с уменьшением R . Следует отметить, что наличие затупления передних кромок не приводит к значительному снижению аэродинамического качества и даже при весьма больших затуплениях пирамиды могут обладать качеством всего на несколько процентов меньшим, чем при $R = 0$.

В первом приближении дополнительно к m , l и k в выражении (6) отыскивались неизвестные коэффициенты a_{11} и a_{12} , во втором приближении определялись также a_{20} , a_{21} и a_{22} . Полученные во втором приближении результаты представлены в таблице. На фиг. 4 изображены сечения оптимальных тел с $R = 0.01$ плоскостями $y = 0$ (сверху) и $x = l_1$ (снизу). Отметим, что во всех случаях оптимальные тела как в

c_f	$R \cdot 10^3$	K	m	l	k	$a_{11} \cdot 10^2$	$-a_{12} \cdot 10^2$	$a_{20} \cdot 10^3$	$-a_{21} \cdot 10^3$	$-a_{22} \cdot 10^3$
10^{-3}	1	5.1779	0.3012	1.7568	2.9653	2.795	2.156	1.19	1.77	2.25
10^{-3}	0.464	5.1895	0.2659	1.9070	2.6280	2.651	2.050	1.37	1.93	1.89
10^{-2}	1	2.2996	0.3844	1.9202	1.7635	8.153	5.946	6.90	12.3	2.31

первом, так и во втором приближениях мало отличаются от соответствующих пирамид. Поперечные сечения (плоскостями $x = \text{const}$) оптимальных тел, полученных во втором приближении, несколько выпуклы, а продольные сечения (плоскостями $y = \text{const}$) вогнуты, но и те, и другие близки к прямолинейным. Аэродинамическое качество оптимальных тел отличается от качества соответствующих пирамид менее чем на 0.1%.

Изложенные результаты согласуются как качественно, так и количественно с результатами работы [3], полученными в приближенной постановке для конических тел с острой передней кромкой. Найденные выше оптимальные формы очень близки к форме соответствующих оптимальных конических тел, а их аэродинамическое качество, вычисленное без учета вклада затупленной передней кромки, очень незначительно превышает величины качества, приведенные в работе [3].

Результаты позволяют сделать вывод, что форма тел, относящихся к рассмотренному классу, имеющих заданный объем и обладающих максимальным аэродинамическим качеством, близка к пирамидальной, что хорошо согласуется с предположением, сделанным в работе [1]. Наличие затупленной передней кромки не приводит к значительному уменьшению качества оптимальных несущих тел.

Поступило 13 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Майкапар Г. И. О наиболее выгодной форме несущих тел при гиперзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 2, стр. 38—47.
2. Miele A. The extremization of products of powers of functionals and its application to aerodynamics. Astron. Acta, 1966, vol. 12, No. 1, pp. 47—51.
3. Huang Ho-Yi. Conical bodies of given length and volume having maximum lift-to-drag ratio at hypersonic speeds. Part 2 — Variational methods. J. Astron. Sci., 1968, vol. 15, No. 3, pp. 118—123.
4. Перминов В. Д. Крылья с оптимальными характеристиками в гиперзвуковом потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 6, стр. 67—73.
5. Филатов Е. И. К задаче о выборе формы крыла для гиперзвуковых скоростей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4, стр. 149—152.
6. Hooks L. E., Hankey W. L. Jr. Leading surface optimization criteria for orbital lifting re-entry craft. J. Space. and Rockets, 1965, vol. 2, No. 4, pp. 516—519.
7. Башкин В. А. Ламинарный пограничный слой на бесконечно длинных эллиптических цилиндрах при произвольном угле скольжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5, стр. 76—82.