

УДК 532.685

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА О НЕПОРШНЕВОМ ВЫТЕСНЕНИИ ГАЗА ВОДОЙ С УЧЕТОМ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Г. А. ОСИПОВА, Г. В. РАССОХИН, Г. П. ЦЫБУЛЬСКИЙ

(Краснодар)

Описание процесса непоршневого вытеснения газа с учетом капиллярных сил сводится к решению краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с некоторыми начальными и граничными условиями. При определенных условиях задача оказывается автомодельной и сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого случая выполнены расчеты распределения давления и насыщенности по длине пласта при различных функциональных зависимостях фазовых проницаемостей для воды и газа, а также капиллярного давления от насыщенности. С целью сравнения приведены также расчеты вариантов без учета капиллярных сил и без учета сжимаемости. Полученные результаты позволяют сделать вывод о решающем влиянии на характер вытеснения указанных функциональных зависимостей, рассматриваемых в совокупности.

1. Задача о вытеснении газа водой рассматривалась ранее в приближенной постановке¹.

Сделаем некоторые предположения: фильтрация газо-водяной смеси происходит в горизонтальном однородном недеформируемом пласте; вода и газ взаимно нерастворимы, вязкости их постоянны; сжимаемостью воды по сравнению со сжимаемостью газа можно пренебречь; плотность газа является линейной функцией давления $\gamma_2 = c p_2$ ($c = \text{const}$); режим течения изотермический; для каждой из фаз справедлив обобщенный закон Дарси. Тогда распределение давлений и насыщенностей воды и газа в одномерном линейном потоке описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[k_1(\sigma) \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] &= \frac{m \mu_1}{k} \frac{\partial \sigma}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[p_2 k_2(\sigma) \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] &= \frac{m \mu_2}{k} \frac{\partial}{\partial t} [p_2(1 - \sigma)] \\ p_2 - p_1 &= p_c(\sigma) \quad (x_0 \leq x \leq L, t \geq t_0) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где p_1 , p_2 — давления в водяной и газовой фазах; σ — насыщенность порового пространства водой; $p_c(\sigma)$ — капиллярное давление; k — абсолютная проницаемость пористой среды; $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$ — относительные фазовые проницаемости для воды и газа; m — пористость; μ_1 и μ_2 — динамическую вязкости воды и газа; x — линейная координата; t — время.

Функциональные зависимости $k_1(\sigma)$, $k_2(\sigma)$, $p_c(\sigma)$ примем в виде

$$\begin{aligned} k_1(\sigma) &= (1.25\sigma - 0.25)^a \quad (0.2 \leq \sigma \leq 1), \quad k_1(\sigma) = 0 \quad (0 \leq \sigma \leq 0.2) \\ k_2(\sigma) &= (0.9 - \sigma)^d (0.9)^{-d} (1 + 3\sigma) \quad (0 \leq \sigma \leq 0.9), \\ k_2(\sigma) &= 0 \quad (0.9 \leq \sigma \leq 1) \\ p_c(\sigma) &= A_c [(\sigma - 0.2)^{-b} - (0.7)^{-b}] \end{aligned} \quad (1.2)$$

где A_c , a , b , d — некоторые константы.

¹ В. М. Рыжик. Некоторые задачи взаимного вытеснения несмешивающихся жидкостей из пористой среды. Автореферат дисс., М., 1962.

2. В качестве начальных условий должны быть заданы распределения давления и насыщенности по пласту в момент времени $t = t_0$

$$p_2 = p_0(x), \quad \sigma = \sigma_0(x) \quad (2.1)$$

При формулировке граничных условий будем исходить из схемы гидрофильного пласта. Считаем, что на входе в пласт насыщенность с самого начала вытеснения достигает предельного значения σ^0 , соответствующего остаточному газонасыщению. Согласно (1.2) $\sigma^0 = 0.9$.

На выходе из пласта в принципе должны выполняться те же условия, что и при вытеснении нефти водой [1]: до момента времени $t = t_*$, когда насыщенность газа не уменьшится до остаточной, из пласта будет выходить только газ, а в дальнейшем насыщенность остается неизменной. В отношении давления ограничимся первой краевой задачей.

Таким образом, граничные условия будут иметь вид

$$x = x_0: \quad p_2 = p^0(t) \quad \sigma = 0.9 \quad (2.2)$$

$$x = L: \quad p_2 = p_*(t) \quad (t > t_0) \quad (2.3)$$

$$v_1 = 0 \quad (t \leq t_*), \quad \sigma = 0.9 \quad (t > t_*) \quad (2.4)$$

3. В случае $\sigma_0(x) \leq 0.2$ следует учесть тот факт, что передний фронт насыщенности $\sigma = 0.2$ будет распространяться с конечной скоростью

$$v_1^* < \infty \quad (3.1)$$

как и при вытеснении нефти водой [2].

Используя соотношение для скорости перемещения точки с постоянной насыщенностью

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_\sigma = - \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^{-1}$$

и систему (1.1), условие (3.1) можно представить в виде

$$V_1^* = \lim_{\sigma \rightarrow 0.2} \frac{k}{m\mu_1} \left\{ (k_1' p_c' + k_1 p_c'') \frac{\partial \sigma}{\partial x} - k_1' \frac{\partial p_2}{\partial x} + \left[\left(k_1 p_c' \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} - k_1 \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^{-1} \right] \right\} < \infty \quad (3.2)$$

Допустим, что в окрестности переднего фронта насыщенности справедливо представление насыщенности в виде ряда

$$\sigma - 0.2 = s^a [\delta_0(t) + \delta_1(t)s + \dots] \quad (3.3)$$

где $s = x - l$, $l = l(t)$ — координата переднего фронта насыщенности $\sigma = 0.2$.

Тогда из (3.2) и (3.3) получаются соотношения для коэффициентов $\delta_i(t)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) и условия, которым должны удовлетворять показатели степеней a , b , α в выражениях (1.2) и (3.3). Последние имеют вид

$$a > 1, \quad a(a-1) > 1, \quad a(a-b-1) = 1$$

Величины a и b должны быть определены из экспериментов. Для a получаем формулу

$$\alpha = (a-b-1)^{-1} \quad (3.4)$$

При $x > l(t)$ ($l(t) < L$) фактически имеем область однофазного течения газа, распределение давления в которой описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[p_2 \frac{\partial p_2}{\partial x} \right] = \frac{m\mu_2(1 - \sigma_0)}{kk_2(\sigma_0)} \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad (3.5)$$

В результате можно считать, что рассматриваемая задача при $\sigma_0 \leq 0.2$ сводится к совместному решению системы (1.1) в области ($x_0 < x < l$, $t > t_0$) и уравнения (3.5) в области ($l < x < L$, $t_0 < t < t_1$) при начальных условиях (2.1), граничных условиях (2.2) — (2.4) и условиях сопряжения

$$x = l(t): \quad \sigma = \sigma_0 \quad (t_0 < t < t_1) \quad (3.6)$$

$$p_2(l+0, t) = p_2(l-0, t) \quad (3.7)$$

$$k_2[\sigma(l-0)] \frac{\partial p_2(l-0, t)}{\partial x} = k_2(\sigma_0) \frac{\partial p_2(l+0, t)}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$l(t) = l(t_0) + \int_{t_0}^t v_1^* dt, \quad l(t_1) = L \quad (3.9)$$

4. Рассмотрим частный случай, когда

$$x_0 = 0, \quad t_0 = 0, \quad p_* = p_0 = \text{const}, \quad \sigma_0 = 0.2, \quad p^\circ = \text{const}, \quad L = \infty$$

Введем безразмерные переменные

$$P = \frac{p}{p_0}, \quad P^\circ = \frac{p_0}{p_0}, \quad a_c = \frac{A_c}{p_0}, \quad \mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \xi = x \left(\frac{kp_0}{m\mu_1} t \right)^{-1/2}$$

При этом задача оказывается автомодельной [3] и сводится к совместному решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[k_1(\sigma) \frac{dP_1}{d\xi} \right] + \frac{\xi}{2} \frac{d\sigma}{d\xi} &= 0 \\ \frac{d}{d\xi} \left[P_2 k_2(\sigma) \frac{dP_2}{d\xi} \right] + \frac{\mu\xi}{2} \frac{d}{d\xi} [P_2(1 - \xi)] &= 0 \\ P_2 - P_1 &= P_c(\sigma) \quad (0 < \xi < \lambda) \end{aligned} \quad (4.1)$$

и уравнения

$$\frac{d}{d\xi} \left[P_2 \frac{dP_2}{d\xi} \right] + \frac{\mu\xi(1 - \sigma_0)}{2k_2(\sigma_0)} \frac{dP_2}{d\xi} = 0 \quad (\lambda < \xi < \infty) \quad (4.2)$$

при краевых условиях

$$\xi = 0: \quad P_2 = P^\circ, \quad \sigma = 0.9 \quad (4.3)$$

$$\xi = \infty: \quad P_2 = 1 \quad (4.4)$$

и условиях сопряжения

$$\xi = \lambda: \quad \sigma = 0.2 \quad (4.5)$$

$$P_2(\lambda+0) = P_2(\lambda-0) \quad (4.6)$$

$$\frac{dP_2(\lambda+0)}{d\xi} = \frac{dP_2(\lambda-0)}{d\xi} \quad (4.7)$$

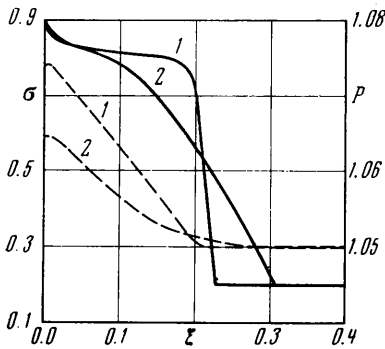
где $\lambda = l(kp_0t)^{-1/2}(m\mu_1)^{1/2}$ — автомодельная координата фронта насыщенности $\sigma = 0.2$

Разложение (3.3) в автомодельной задаче должно иметь вид

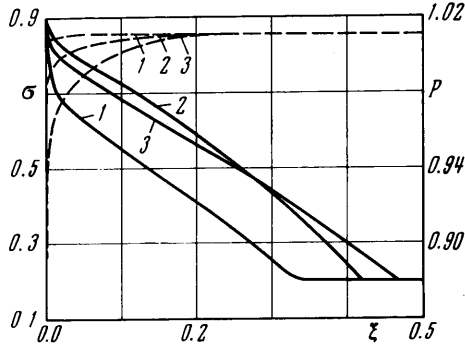
$$\sigma - 0.2 = \zeta^\alpha (\beta_0 + \beta_1 \zeta + \beta_2 \zeta^2 + \dots) \quad (4.8)$$

где $\zeta = \lambda - \xi$.

Подставляя (4.8) в (4.1) и приравнявая множители при одинаковых степенях ζ , получим соотношения, которым должны удовлетворять коэф-



Фиг. 1



Фиг. 2

фициенты $\beta_i (i = 0, 1, 2, \dots)$. Предполагая в дальнейшем ограничение одним членом в (4.8), для β_0 будем иметь

$$\frac{\lambda \alpha}{2} - \frac{\alpha^2 a b \beta_0^{\alpha-b-1} a_c}{0,8^\alpha} + \frac{\alpha^2 b (b+1) \beta_0^{\alpha-b-1} a_c}{0,8^\alpha} - \frac{\alpha (\alpha-1) b \beta_0^{\alpha-b-1} a_c}{0,8^\alpha} = 0 \quad (4.9)$$

5. Система (4.1) и уравнение (4.2) решались численным методом Рунге — Кутты; использовалась программа с автоматическим выбором шага интегрирования. Краевая задача для уравнения (4.2) заменялась задачей Коши с условиями

$$(5.1)$$

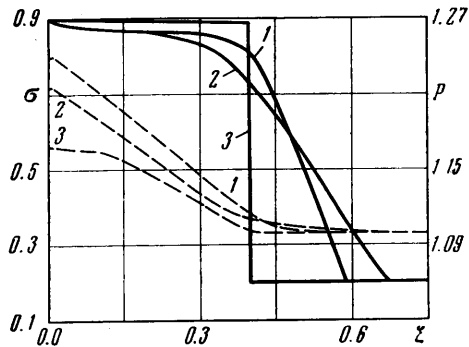
$$\xi = \lambda: P_2 = P_\lambda, \quad \frac{dP_2(\lambda + 0)}{d\xi} = u$$

При фиксированном P_λ величина u подбиралась таким образом, чтобы, начиная с некоторого $\xi = M$, выполнялись условия

$$|P_2 - 1| \leq 2^{-31}, \quad \left| \frac{dP_2}{d\xi} \right| \leq 2^{-31}$$

Расчеты выполнялись в следующей последовательности: задавались величины λ, P_λ ; подбиралась величина u (5.1); вычислялась величина β_0 из (4.9); исходя из (4.5) — (4.8) находились $P_2, dP_2/d\xi, \sigma$ и $d\sigma/d\xi$ в точке $\xi_* = \lambda - \Delta\xi$, где $\Delta\xi$ — достаточно малое число; численно интегрировалась система (4.1) до $\xi = 0$ (с отрицательным шагом интегрирования). Расчеты повторялись при различных λ и P_λ до тех пор, пока не выполнялись условия (4.3).

Для ускорения счета на участках с большим градиентом $d\sigma/d\xi$ вычисления проводились по системе, полученной из (4.1) преобразованием, при котором функция σ и аргумент ξ менялись ролями.

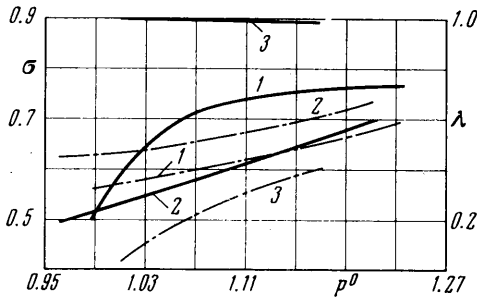


Фиг. 3

6. Из постановки задачи (4.1) — (4.9) с учетом вида функциональных зависимостей (1.2) следует, что параметрами, определяющими процесс вытеснения газа водой, будут P° , a_c , μ , a , b , d .

В зависимости от величины a и b касательная к кривой $\sigma(\xi)$ на фронте вытеснения $\xi = \lambda$ может составлять с линией $\sigma_0 = 0.2$ различный угол. При $a - b > 2$ этот угол будет прямым, при $a - b = 2$ — острым, при $1 < a - b < 2$ — нулевым.

Типичные графики функций $\sigma(\xi)$ (сплошные линии) и $P_2(\xi)$ (пунктирные линии) представлены на фиг. 1 для $\mu = 0.1$, $a = 2.5$, $b = 0.5$, $d = 3.5$ и на фиг. 2 для $\mu = 0.04$, $a = 3.5$, $d = 3$, $a_c = 0.045$.



Фиг. 4

На фиг. 4 изображены результирующие зависимости средней насыщенности в переходной зоне σ_a (сплошные линии) и автомодельной координаты фронта вытеснения λ (штрих-пунктирные линии) от давления закачки p° ($\mu = 0.1$, $a = 3.5$, $b = 1.5$, $d = 3$, нумерация кривых та же, что и на фиг. 3).

Величина σ_a рассчитывалась по формуле

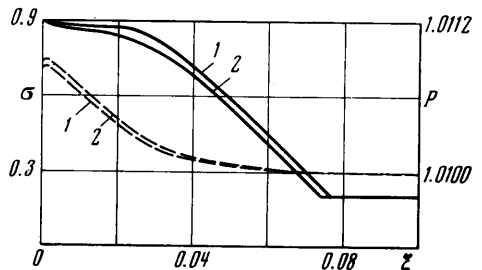
$$\sigma_a = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \sigma(\xi) d\xi$$

Влияние сжимаемости газа иллюстрируется на фиг. 5 ($\mu = 0.1$, $a = 3.5$, $b = 1.5$, $d = 3$, $a_c = 0.000703125$; цифра 1 соответствует $\rho_2 = \rho(P)$, цифра 2 — $\rho_2 = \text{const}$).

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы, справедливые для одномерных потоков в однородных пластах с учетом принятых в п. 1 предположений.

1. Увеличение параметра a_c приводит к уменьшению σ_a . Из этого следует, что капиллярные силы снижают эффективность вытеснения газа водой.

2. С ростом давления закачки p° влияние капиллярных сил на эффективность вытеснения падает. Пусть, например, $p^\circ = 100 \text{ ат}$, $a = 3.5$, $b = 1.5$, $d = 3$, $a_c = 0.045$, тогда при давлении закачки $p^\circ = 105 \text{ ат}$ уменьшение капиллярных сил в 2 раза приводит к увеличению σ_a от 0.58 до 0.61 (на 5%), а при $p^\circ = 120 \text{ ат}$ — с 0.65 до 0.66 (на 1.5%). Для $a = 2.5$, $b = 0.5$, $d = 3.5$ уменьшение a_c в 8 раз



Фиг. 5

при $p^\circ = 105 \text{ ат}$ изменяет σ_a от 0.61 до 0.76 (на 20%), а при $p^\circ = 120 \text{ ат}$ — от 0.76 до 0.81 (на 9%).

3. Существенное влияние на характер распределения насыщенности по длине переходной зоны, а значит, и на величину σ_a оказывает вид функциональных зависимостей $k_2(\sigma)$, $k_1(\sigma)$, $p_c(\sigma)$, т. е. значения показателей степени a , b , d . Так, при $a = 3.5$, $d = 3$ и различных значениях $b = 0.5, 1.5, 2$ кривые $\sigma(\xi)$ похожи на кривые пропитки [1], и в рассмотренных примерах $\sigma_a < 0.7$.

При $a = 2.5$, $d = 3.5$ и $b = 0.5$ характер кривых $\sigma(\xi)$ тот же, что и при вытеснении несжимаемых жидкостей.

4. Проявление эффекта сжимаемости газа зависит также от вида функций $k_2(\sigma)$, $k_1(\sigma)$, $p_c(\sigma)$.

При $a = 2.5$, $b = 0.5$, $d = 3.5$ в пределах рассмотренных перепадов давлений и значений a_c сжимаемость практически не влияет на вид кривых $\sigma(\xi)$.

При $a = 3.5$, $b = 1.5$, $d = 3$ кривые $\sigma(\xi)$ без учета сжимаемости газа лежат ниже кривых с учетом сжимаемости.

5. Для оценки величин газоотдачи конкретных пластов при режиме вытеснения водой необходимо экспериментально установить функциональные зависимости $k_2(\sigma)$, $k_1(\sigma)$, $p_c(\sigma)$, соответствующие этим пластам и реальным жидкостям.

Поступило 15 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы. М., «Мир», 1964.
2. Fayers F. J., Sheldon J. W. The effect of capillary pressure and gravity on two-phase fluid flow in a porous medium. Petrol. Trans. AIME, 1959, vol. 216.
3. Черный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.