

УДК 532.59 : 539.3

## О ВЛИЯНИИ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ НА ДВИЖЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Е. БУКАТОВ, Л. В. ЧЕРКЕСОВ

(Севастополь)

Исследуется влияние тонкой упругой изотропной пластинки на волновые движения неоднородной жидкости, возникающие под действием внешних периодических возмущений. Плотность жидкости непрерывно возрастает с глубиной. Аналогичные задачи при отсутствии пластины рассмотрены для неоднородной жидкости в работах [1, 2], а при наличии пластины на поверхности однородной жидкости — в работах [3-5].

1. На поверхности идеальной несжимаемой жидкости, плотность которой в невозмущенном состоянии непрерывно возрастает с глубиной, плавает тонкая упругая изотропная пластинка. В горизонтальных направлениях жидкость неограничена, глубина ее конечна.

Поставим своей задачей исследовать влияние пластинки на движение жидкости, возникающее под действием периодических поверхностных давлений вида

$$p_0(x, y, t) = af(x, y)e^{-iat} \quad (1.1)$$

В линейной постановке с учетом действия силы Кориолиса имеем следующую систему уравнений движения [6]:

$$u_t - 2\omega v = -\rho^{-1}p'_x, \quad v_t + 2\omega u = -\rho^{-1}p'_y \quad (1.2)$$

$$w_t + g\rho^{-1}\rho' = -\rho^{-1}p'_z, \quad \rho'_t + \rho_2 w = 0, \quad u_x + v_y + w_z = 0$$

с граничными условиями

$$d\nabla^2\zeta + \kappa\zeta_u + \rho g\zeta - p'(x, y, 0, t) = -p_0(x, y, t) \quad (1.3)$$

$$w(x, y, -H, t) = 0, \quad w(x, y, 0, t) = \zeta_t$$

Здесь  $\rho = \rho(z)$  — плотность жидкости в невозмущенном состоянии,  $p'(x, y, z, t)$  и  $\rho'(x, y, z, t)$  — динамические добавки давления и плотности,  $H$  — глубина жидкости  $d = Eh^3[12(1 - \nu^2)]^{-1}$  — цилиндрическая жесткость,  $h$  — толщина пластины,  $E$  и  $\nu$  — модуль нормальной упругости и коэффициент Пуассона пластины,  $\kappa = \rho_1 h$ ,  $\rho_1$  — плотность пластины,  $\zeta$  — прогиб пластины, ось  $z$  направлена вертикально вверх, начало координат выбрано на невозмущенной поверхности пластины — жидкость, индексы  $x, y, z, t$  означают дифференцирование по соответствующей переменной.

Считая все искомые функции периодическими по времени  $t$  и применяя к системе (1.2) и граничным условиям (1.3) преобразование Фурье по переменным  $x$  и  $y$ , получим для определения трансформанты Фурье  $W(z)$  функции  $w$  обыкновенное дифференциальное уравнение

$$W'' - \Phi W' + \eta^2(g\sigma^{-2}\Phi - 1)W = 0 \quad (1.4)$$

с граничными условиями

$$W' - g\sigma^{-2}\eta^2(1 - \kappa_1 + d_1 r^4)W = -ia(\rho\sigma)^{-1}\eta^2 f^*(m, n) \quad (z=0),$$

$$W(x, y, -H, t) = 0 \quad (1.5)$$

$$\eta = r\delta, \quad \delta = \sigma(\sigma^2 - 4\omega^2)^{-1/2}, \quad r = (m^2 + n^2)^{1/2}$$

$$\varphi = -\rho^{-1}\rho', \quad \kappa_1 = \sigma^2\kappa(\rho g)^{-1}, \quad d_1 = d(\rho g)^{-1}$$

$$f^*(m, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i(mx+ny)} dx dy$$

причем штрих означает производную по  $z$ .

2. Пусть плотность жидкости в невозмущенном состоянии изменяется с глубиной по закону

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-kz}, \quad -H \leq z \leq 0, \quad \rho_0 = \text{const} \quad (2.1)$$

Из уравнения (1.4) и условий (1.5) при данной зависимости  $\rho(z)$  найдем после применения формулы обращения такое выражение для вертикальной составляющей скорости жидкости

$$w = \frac{a\sigma i}{2\pi\rho_0 g} \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta_1 \Delta^{-1} \eta^2 f^*(m, n) e^{i(mx+ny-\sigma t)} dm dn \quad (2.2)$$

где

$$\Delta_1 = e^{1/2 kz} \frac{\text{sh } \gamma(z+H)}{ch \gamma H}, \quad \gamma = \left[ \left( 1 - \frac{kg}{\sigma^2} \right) \eta^2 + \frac{k^2}{4} \right]^{1/2}$$

$$\Delta = \left[ (1 - \kappa_1 + d_1 r^4) \eta^2 - \frac{k}{2} \frac{\sigma^2}{g} \right] \text{th } \gamma H - \gamma \frac{\sigma^2}{g}$$

В осесимметричном ( $f(x, y) = f(R)$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) случае  $w$  принимает вид

$$w = \frac{a\sigma i}{\rho_0 g} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_1}{\Delta} \eta^2 r J_0(rR) f_1^*(r) dr e^{-i\sigma t}, \quad f_1^*(r) = \int_0^{\infty} R f(R) J_0(rR) dR \quad (2.3)$$

Для больших значений  $R$  выражение (2.3) с ошибкой порядка  $R^{-3/2}$  будет таким:

$$w = \frac{a\sigma_i}{\rho_0 g} \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_1}{\Delta} \eta^2 r^{1/2} f_1^*(r) \cos\left(rR - \frac{\pi}{4}\right) dr e^{-i\sigma t} \quad (2.4)$$

Если давления имеют вид

$$p_0 = af(x) e^{-i\sigma t} \quad (2.5)$$

то

$$w = \frac{a\sigma i}{\sqrt{2\pi} \rho_0 g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1}{\Delta} \eta^2 f^*(r) e^{i(rx-\sigma t)} dr, \quad f^*(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-irx} dx \quad (2.6)$$

Подынтегральные функции в выражениях (2.3), (2.4) и (2.6) имеют особенности при значениях  $r$ , удовлетворяющих уравнению  $\Delta(r) = 0$ . Прежде всего интерес представляют вещественные корни этого уравнения, так как их вклад представляет собой на некотором удалении от области давлений основные возмущения, амплитуда которых либо не затухает с расстоянием (плоский случай), либо затухает как  $R^{-1/2}$  (осесимметричный случай), в то время как вклад комплексных корней — экспоненциально затухающие с ростом  $R$  возмущения.

Деформируем исходный путь интегрирования в контур, идущий вдоль действительной оси и обходящий расположенные на ней полюсы (действительные корни уравнения  $\Delta(r) = 0$ ) по малым полуокружностям так, чтобы выполнялось естественное условие излучения, требующее, чтобы волны вели себя в бесконечности как уходящие прогрессивные волны. Распределение вещественных корней уравнения  $\Delta(r) = 0$  существенно зависит от знака выражений  $\sigma^2 - kg$  и  $\sigma^2 - 4\omega^2$ . Поэтому проведем исследование в каждом случае отдельно.

3. Пусть

$$\sigma > 2\omega, \quad \sigma > \sqrt{kg} \quad (3.1)$$

Уравнение  $\Delta(r) = 0$  имеет при этом только два вещественных корня  $\pm r_0$  ( $r_0 > 0$ ). Вычисляя интеграл (2.4), получим для больших  $R$

$$w = -\sigma A(r_0, z) \cos \alpha_0, \quad \zeta = A(r_0, 0) \sin \alpha_0 \quad (3.2)$$

$$A = \frac{a}{\rho_0 g} \left( \frac{2\pi}{R} \right)^{1/2} \frac{\Delta_1(r, z)}{\Delta'(r)} \eta^2 r^{1/2} f_1^*(r), \quad \alpha_n = r_n R - \sigma t - \frac{\pi}{4} \quad (3.3)$$

где штрих означает дифференцирование по  $r$ . Отсюда следует, что вертикальная составляющая скорости кольцевых волн убывает с глубиной, принимая максимальное значение на поверхности пластина — жидкость.

Это справедливо и для плоских волн, имеющих вид (3.2) с той, однако, разницей, что

$$A = \frac{\sqrt{2\pi} a \Delta_1(r, z)}{\rho_0 g \Delta'(r)} \eta^2 f^*(r), \quad \alpha_n = r_n x - \sigma t \quad (3.4)$$

Скорость и длина волны в плоском и в пространственном случаях определяются соответственно формулами  $v = \sigma/r_0$ ,  $\lambda = 2\pi/r_0$ . Если пластина абсолютно гибкая ( $E = 0$ ), то при  $\kappa_1 < 1$  для корня  $r_0$  верна оценка  $r_0 > \sigma k^{1/2} (2g(1 - \kappa_1))^{-1/2}$ , а при  $\kappa_1 > 1$  уравнение  $\Delta(r) = 0$  действительных корней не имеет. Следовательно, при  $E = 0$  и  $\kappa_1 > 1$  незатухающие волны не образуются, что подтверждается наблюдениями [7].

При малых значениях  $\varepsilon$ ,  $d_2$  и  $\kappa_1$  с точностью до величин второго порядка малости находим

$$r_0 = m_0 [1 + \sigma^2 \omega_1^{-1} (\kappa_1 - d_2)] + \varepsilon m_1$$

$$v = \frac{\sigma}{m_0} \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{\omega_1} (d_2 - \kappa_1) - \varepsilon \frac{m_1}{m_0} \right], \quad \lambda = \frac{2\pi}{m_0} \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{\omega_1} (d_2 - \kappa_1) - \varepsilon \frac{m_1}{m_0} \right] \quad (3.5)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \omega_2 [\sigma^{-2} (m_0 \delta c)^2 - 1] [H^2 \delta^2 m_0 \omega_2 + m_0 (\sigma \delta c)^2]^{-1}$$

$$\omega_1 = \sigma^2 + \omega_2 H g^{-1}, \quad \omega_2 = (m_0 \delta g)^2 - \sigma^4, \quad c = \sqrt{gH}, \quad d_2 = d_1 m_0^4, \quad \varepsilon = kH$$

Здесь  $m_0$  — единственный положительный корень уравнения

$$\text{th } m \delta H = \sigma^2 (m g \delta)^{-1}$$

Из (3.5) видно, что экспоненциальное (почти линейное для  $\varepsilon \ll 1$ ) увеличение плотности с глубиной жидкости при выполнении условий (3.1) уменьшает скорость и длину волны. При этом рост модуля упругости пластины увеличивает, а рост толщины абсолютно гибкой пластины уменьшает значения  $v$  и  $\lambda$ .

Для выяснения влияния неоднородности жидкости и характеристик пластины на элементы плоских и цилиндрических волн при условиях (3.1) были проведены численные расчеты для ряда значений параметров  $\varepsilon$ ,  $H$  (м),  $h$  (м),  $\sigma$  (сек<sup>-1</sup>), изменяющихся в пределах

$$0 \leq \varepsilon \leq 10^{-2}, \quad 10^2 \leq H \leq 10^3, \quad 0 \leq h \leq 3, \quad 4 \cdot 10^{-2} \leq \sigma \leq 6 \cdot 10^{-1} \quad (3.6)$$

Модуль упругости  $E$ , плотность  $\rho_1$  и коэффициент Пуассона пластины принимались соответственно равными

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ н/м}^2, \quad \rho_1 = 870 \text{ кг/см}^3, \quad \nu = 0.34 \quad (3.7)$$

что соответствует ледяной пластине.

Расчеты показали, что неоднородность жидкости при наличии плавающей пластины мало влияет (изменение меньше 1%) на параметры волнового движения. При этом упругая пластина для  $\sigma > \sigma_1$  ( $\sigma_1 = [12(1 - \nu^2)\rho_0 g^4]^{1/6} (Eh^2)^{-1/6}$ ) увеличивает скорость и длину волны по сравнению с соответствующими величинами в случае свободной поверхности жидкости. Для  $\sigma < \sigma_1$  массовые силы преобладают над упругими и влияние пластины сказывается в уменьшении  $\nu$  и  $\lambda$ . Абсолютно гибкая пластина уменьшает  $\nu$  и  $\lambda$  при любых  $\sigma$ . Однако при  $\lambda/H > 5$  влияние характеристик пластины на элементы волн меньше 1%.

Таблица 1

$E$	$\times$	$\varepsilon$	$\nu$ , м/сек	$\lambda$ , м
$\neq 0$	$\neq 0$	0	21.774	227.90
		$10^{-2}$	21.768	227.85
0	0	0	16.313	170.74
		$10^{-2}$	16.312	170.73
0	$\neq 0$	0	14.755	154.45
		$10^{-2}$	14.754	154.44

В табл. 1 для иллюстрации приведены значения  $\nu$  и  $\lambda$  для  $\sigma = 0.6$ ,  $H = 10^2$  м при наличии пластины ( $h = 3$  м) и при ее отсутствии.

4. Пусть

$$2\omega < \sigma < \sqrt{kg} \quad (4.1)$$

При этом условии уравнение  $\Delta(r) = 0$  имеет бесконечное число действительных корней  $\pm r_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), для которых справедлива оценка

$$\pi n < r_n b < \pi(n + 1/2), \quad b = \delta H(kg\sigma^{-2} - 1)^{1/2}$$

Вычисляя интегралы (2.4) и (2.6), получим

$$w = -\sigma \sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n \quad (4.2)$$

$$w_n = A(r_n, z) \cos \alpha_n, \quad \zeta_n = A(r_n, 0) \sin \alpha_n$$

где  $A_n$  и  $\alpha_n$  определяются в пространственном случае формулами (3.3), в плоском случае — формулами (3.4),  $\Delta$  и  $\Delta_1$  — формулами (2.2) с заменой  $\gamma$  на

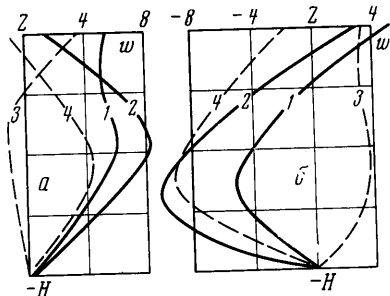
$$\gamma_1 = \left[ \left( \frac{kg}{\sigma^2} - 1 \right) \eta^2 - \frac{k^2}{4} \right]^{1/2}$$

и гиперболических функций, содержащих в аргументе множитель  $\gamma$ , соответствующими тригонометрическими функциями.

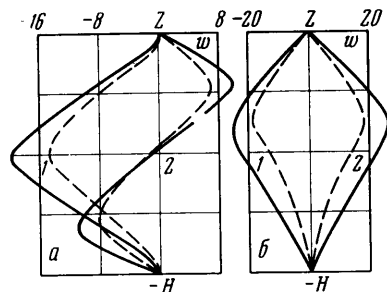
Отсюда видно, что как плоские, так и цилиндрические возмущения поверхности пластины — жидкость на некотором удалении от области давлений представляют собой при условии (4.1) бесконечную сумму прогрессивных волн. Так как функция  $f^*(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  по крайней мере как  $r^{-1}$ , то ряды (4.2) абсолютно сходятся.

Гармоника  $w_0$ , соответствующая корню  $r_0$ , представляет собой обычную поверхностную волну, затухающую с глубиной. Гармоники  $w_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) обусловлены исключительно неоднородностью жидкости и представляют собой внутренние волны. При  $-H \leq z \leq 0$  каждая гармоника  $w_n$

( $n = 1, 2, \dots$ ) имеет  $n + 1$  нуль и  $n$  примерно равных по модулю экстремумов. Для малых  $\epsilon$  зависимость  $w_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) от  $z$ , как и при отсутствии пластины [2], фактически синусоидальная, а значения  $|w_n|$  на поверхности пластина — жидкость много меньше  $\max |w_n|$  внутри жидкости. Численные расчеты, приведенные для ряда значений  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ,  $H$  и  $0 \leq h \leq 3$  показали, что упругая и абсолютно гибкая пластина при фиксированном  $\epsilon$  практически не влияет на значения фазовых скоростей  $v_n = \sigma / r_n$  и длин  $\lambda_n = 2\pi / r_n$  внутренних волн ( $n = 1, 2, \dots$ ), а влияние



Фиг. 1



Фиг. 2

изменения  $\epsilon$  на  $v_n$  и  $\lambda_n$  при фиксированном  $h$  примерно такое же, как и при отсутствии пластины [2]. Скорость и длина поверхностной волны несколько уменьшаются с ростом толщины пластины. Это изменение обусловлено в основном массовыми силами.

В табл. 2 для иллюстрации приведены численные значения  $v_n$  и  $\lambda_n$  ( $n = 0, 1, 2$ ) при отсутствии пластины для

$$H = 2 \cdot 10^2 \text{ м} \quad \sigma = 5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \quad \varphi = 70^\circ \quad (4.3)$$

и для значений параметров из (3.6).

Поскольку  $w$  — бесконечная сумма движущихся волн, то в общем случае нельзя проанализировать зависимость вертикальной составляющей скорости от глубины жидкости. Для выяснения этой зависимости были проведены численные расчеты плоских волн для ряда значений параметров задачи и функции  $f(x)$  вида

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x / 2l & (|x| \leq l) \\ 0 & (|x| > l) \end{cases} \quad (4.4)$$

Расчеты проводились за период колебаний  $\tau$  с ошибкой, не превышающей 1% в определении экстремальных значений  $w(z)$ . На фиг. 1 приведена с точностью до множителя  $10^{-4}$  ( $a / \rho_0 g$ ) зависимость  $w(z)$  для значений параметров (3.6), (4.3),  $l = 10^3$  м и двух значений  $\epsilon$  ( $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  фиг. 1, а,  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$  фиг. 1, б) при толщине упругой пластины  $h = 3$  м (линии 1, 2) и  $h = 0$  (линии 3, 4). Кривые 1, 3 соответствуют моментам времени, при которых достигается  $\max |w(0)|$  за период колебаний, а кривые 2, 4 — моментам времени, соответствующим максимальному значению  $|w(z)|$  внутри жидкости за период  $\tau$ .

Отсюда видно, что  $\max |w(0)|$  с увеличением толщины пластины от 0 до 3 м увеличивается примерно в полтора раза. При этом  $\max |w(z)|$  внутри жидкости увеличивается для  $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  примерно в 1,9 раза, а для  $\epsilon = 4 \cdot 10^{-3}$  — в 1,2 раза. С увеличением  $\epsilon$  от  $2 \cdot 10^{-3}$  до  $4 \cdot 10^{-3}$  при  $h = 0$   $\max |w(z)|$  внутри жидкости увеличивается примерно в два раза, а при  $h = 3$  м — в 1,2 раза. Положение максимального значения  $|w(z)|$  при фиксированном  $h$  с ростом  $\epsilon$  от  $2 \cdot 10^{-3}$  до  $4 \cdot 10^{-3}$  смещается от  $z_1 = -0.35 H$  до  $z_2 = -0.55 H$ . Влияние изменения  $\epsilon$  на  $\max |w(0)|$  при фиксированном  $h$  меньше 1%.

Таблица 2

$n$	$\epsilon$	$v_n, \text{ м/сек}$	$\lambda, \text{ м}$
0	$2 \cdot 10^{-3}$	44.2	55606
	$4 \cdot 10^{-3}$	44.1	55411
1	$2 \cdot 10^{-3}$	0.544	683.7
	$4 \cdot 10^{-3}$	0.832	1046
2	$2 \cdot 10^{-3}$	0.272	341.9
	$4 \cdot 10^{-3}$	0.416	523.2

Зависимость вертикальной составляющей скорости от глубины жидкости для  $H = 2 \cdot 10^3$  м,  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\tau = 6$  час,  $l = 10^4$  м и двух значений  $\varphi$  изображено с точностью до множителя  $10^{-5}$  ( $a/\rho_0 g$ ) на фиг. 2 ( $a - \varphi = 70^\circ$ ,  $b - \varphi = 0$ ).

Кривая 1 отвечает моменту времени, соответствующему максимальному значению  $|w(0)|$  за период  $\tau$ , а кривая 2 — моменту времени, при котором достигается максимальное значение  $|w(z)|$  внутри жидкости за период колебаний. Сплошные линии соответствуют толщине упругой пластины  $h = 3$  м, пунктирные —  $h = 0$ . Из фиг. 2 видно, что учет силы Кориолиса приводит не только к уменьшению величины  $\max |w(z)|$  внутри жидкости, но и принципиально меняет распределение  $w$  по глубине. При этом влияние пластины на длиннопериодные ( $\tau = 6$  час) колебания поверхности пластины — жидкости несущественно, а амплитуда  $w(z)$  внутри жидкости увеличивается примерно в 1.4 раза с ростом  $h$  от 0 до 3 м.

Проводились также численные расчеты максимально возможного значения амплитуды вертикальной составляющей скорости ( $A^*$ ) на заданной глубине. Зависимость  $A^*(z)$  для  $\tau = 6$  час (кривые 3, 4),  $\tau = 12$  час (кривые 1, 2),  $H = 2 \cdot 10^3$  м,  $\varphi = 70^\circ$ ,  $l = 10^4$  м,  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$  и значений параметров (3.6) изображена с точностью до множителя  $10^{-5}$  ( $a/\rho_0 g$ ) на фиг. 3. Здесь кривые 1, 3 соответствуют толщине упругой пластины  $h = 3$  м, а кривые 2, 4 — случаю свободной поверхности жидкости. Из этой фигуры видно, что рост толщины пластины от 0 до 3 м приводит к увеличению амплитуды  $A^*(z)$  в 1.4 раза при  $\tau = 6$  час и в 1.5 раза при  $\tau = 12$  час. Отметим, что при  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$  зависимость  $A^*(z)$  остается примерно такой же, как и при  $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ .

Расчеты показали, что в случае абсолютно гибкой пластины зависимость  $w$  от  $z$  примерно такая же, как и для упругой пластины (фиг. 1, 2, 3).

Представляет интерес рассмотреть еще два случая: а)  $\sqrt{kg} < \sigma < 2\omega$ , б)  $\sigma < \sqrt{kg}$ ,  $\sigma < 2\omega$ . Пусть выполняется условие

$$\sqrt{kg} < \sigma < 2\omega \tag{4.5}$$

Тогда при  $\kappa_1 < 1$  для  $w$  и  $\zeta$  получим выражение (4.2), где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -e^{1/2 k z} \sin \gamma_2 (z + H) \cos^{-1} \gamma_2 H, \quad \gamma_2 = [(1 - kg\sigma^{-2})\eta_1^2 - 1/4 k^2]^{1/2}, \quad \eta_1 = r\delta_1 \\ \Delta &= [(1 - \kappa_1 + d_1 r^4)\eta_1^2 + 1/2 k\sigma^2 g^{-1}] \operatorname{tg} \gamma_2 H + \gamma_2 \sigma^2 g^{-1}, \quad \delta_1 = \sigma(4\omega^2 - \sigma^2)^{-1/2}, \\ &n = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{4.6}$$

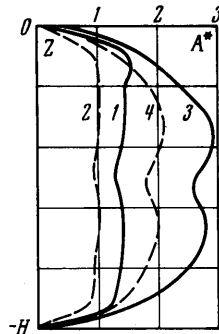
а  $r_n$  могут быть определены по приближенной формуле

$$r_n = \frac{\pi n}{\delta_1 H} \left(1 - \frac{kg}{\sigma^2}\right)^{-1/2} \tag{4.7}$$

В случае абсолютно гибкой пластины ( $d_1 = 0$ ) и однородной жидкости ( $k = 0$ )  $w$  и  $\zeta$  определяются из (4.2), (4.6), (4.7), где  $n = 1, 2, \dots$  при  $\kappa_1 < 1$ , а если  $\kappa_1 > 1$ , то  $n = 0, 1, 2, \dots$  и

$$r_0 = \frac{\sigma}{\delta_1} [gH(\kappa_1 - 1)]^{-1/2} \tag{4.8}$$

Из формул (4.2), (4.6) — (4.8) видно, что волновое движение при выполнении условия (4.5) представляет собой бесконечную сумму прогрессивных волн (гармоник  $w_n$ ). Причем эти волны обусловлены исключительно вращением, а не стратификацией, так как при  $\sigma > \sqrt{kg}$  и  $\sigma > 2\omega$  возникает только одна классическая волна  $w_0$ . Поведение гармоник  $w_n$  с глубиной качественно такое же, как и в случае (4.1). Кроме того, из этих формул следует, что даже в однородной жидкости принципиально возможно явление, аналогичное явлению внутренних волн. Оно может иметь место как при наличии пластины, так и при ее отсутствии.



Фиг. 3

Пусть

$$\sigma < \sqrt{kg}, \quad \sigma < 2\omega \quad (4.9)$$

Тогда при наличии упругой или абсолютно гибкой пластины и  $\kappa_1 < 1$  в неоднородной жидкости под действием давлений вида (1.1) возникают только экспоненциально затухающие с расстоянием волны, в то время как при  $\sigma < \sqrt{kg}$  и  $\sigma > 2\omega$  возникает бесконечный спектр прогрессивных волн, незатухающих с расстоянием в плоском и затухающих как  $R^{-1/2}$  в осесимметричном случаях. Если пластина абсолютно гибкая и  $\kappa_1 > 1$ , то в неоднородной жидкости при условии (4.9) возникает классическая волна (нулевая гармоника). Для  $w$  и  $\zeta$  этой волны получим в осесимметричном случае формулы (3.2), (3.3), а в плоском случае — формулы (3.2), (3.4), где

$$\Delta_1 = -e^{1/2 k z} \operatorname{sh} \gamma_3 (z + H) \operatorname{ch}^{-1} \gamma_3 H, \quad \gamma_3 = [1/4 k^2 + (kg\delta^{-2} - 1)\eta_1^2]^{1/2}$$

$$\Delta = \left[ (1 - \kappa_1)\eta_1^2 + \frac{k\sigma^2}{2g} \right] \operatorname{th} \gamma_3 H + \gamma_3 \frac{\sigma^2}{g}, \quad r_0 = \frac{\sigma}{\delta_1 \sqrt{gH}} \left[ \frac{1 - \varepsilon/2}{\kappa_1 - 1} \right]^{1/2}$$

5. Предположим теперь, что по поверхности пластины перемещается периодическая система давлений вида

$$p_0 = af(x) e^{i(\alpha y - \sigma t)} \quad (5.1)$$

Для вертикальной составляющей скорости жидкости при этом получим

$$w = \frac{a\sigma i}{\sqrt{2\pi\rho_0 g}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1}{\Delta} \eta^2 f^*(m) e^{i(mx + \alpha y - \sigma t)} dm, \quad r = \sqrt{m^2 + \alpha^2} \quad (5.2)$$

где обозначения те же, что и в (2.2). Рассмотрим случай  $\sigma > 2\omega$ ,  $\sigma > \sqrt{kg}$ . Из (5.2) при  $r_0 > \alpha$  найдем

$$w = -\sigma A(m_0, z) \cos \beta_0, \quad \zeta = A(m_0, 0) \sin \beta_0, \quad m_0 = \sqrt{r_0^2 - \alpha^2},$$

$$\beta_0 = r_0 x_0 - \sigma t \quad (5.3)$$

Здесь  $r_0$  — единственный положительный корень уравнения  $\Delta(r) = 0$ , направление  $Ox_0$  составляет угол  $\theta_0$  ( $\operatorname{tg} \theta_0 = \alpha m_0^{-1}$ ) с осью  $x$ ,  $A$  определяется формулой (3.4) с той, однако, разницей, что вместо  $f^*(r)$  следует подставить  $rm^{-1}f^*(m)$ .

Вертикальная составляющая скорости при  $\sigma > 2\omega$ ,  $\sigma > \sqrt{kg}$  ведет себя с глубиной качественно так же, как и в однородной жидкости. При этом деформация  $w$  за счет неоднородности не превышает 1%. Влияние характеристик пластины на скорость и длину волны такое же, как и в случае давлений (1.1), (2.5).

При  $r_0 < \alpha$  и  $\sigma > 2\omega$ ,  $\sigma > \sqrt{kg}$  незатухающие с удалением от области давлений волны не возникают.

В случае  $2\omega < \sigma < \sqrt{kg}$

$$w = -\sigma \sum_{n=j}^{\infty} A(m_n, z) \cos \beta_n, \quad \zeta = \sum_{n=j}^{\infty} A(m_n, 0) \sin \beta_n \quad (5.4)$$

$$m_n = \sqrt{r_n^2 - \alpha^2}, \quad \beta_n = r_n x_n = \sigma t$$

Здесь  $r_n$  — вещественные корни уравнения  $\Delta(r) = 0$ ,  $j$  — номер наименьшего корня, удовлетворяющего условию  $r_j > \alpha$  ( $j \geq 0$ ), направление  $Ox_n$  составляет угол  $\theta_n$  ( $\operatorname{tg} \theta_n = \alpha m_n^{-1}$ ) с осью  $x$ , величина  $A$  та же, что и в выражении (5.3), где  $\Delta$  и  $\Delta_1$  определяются формулами (2.2) с заменой  $\gamma$  на  $\gamma_1$  и гиперболических функций, содержащих в аргументе множитель  $\gamma$ , соответствующими тригонометрическими функциями.

Из (5.4) видно, что при  $2\omega < \sigma < \sqrt{kg}$  поверхность пластины — жидкость представляет собой суперпозицию бесконечного числа волн, направление движения каждой из которых составляет угол  $\theta_n$  ( $n = j, j + 1, \dots$ ) с осью  $x$ . Углы  $\theta_n$  ( $n = j, j + 1, \dots$ ), длины и скорости волн не превышают соответственно величин  $\theta_j = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\alpha / m_j)$ ,  $\lambda_j = 2\pi / r_j$ ,  $v_j = \sigma / r_j$  и монотонно убывают до нуля с ростом номера  $n$ .

Скорости  $v_n$ , длины  $\lambda_n$ , величины углов  $\theta_n$ , верхние границы спектров длин  $\lambda_j$ , углов  $\theta_j$  и скоростей  $v_j$  внутренних волн фактически такие же, как и при отсутствии пластины. Что же касается  $v_0$  и  $\lambda_0$ , то их зависимость от  $h$  такая же, как и при условии (4.1) в случае давлений вида (1.1), (2.5).

При фиксированном  $h$  влияние неоднородности жидкости на  $v_n$ ,  $\lambda_n$ ,  $\theta_n$  ( $n \geq j, j = 1, 2, \dots$ ) примерно такое же, как и при отсутствии пластины.

Гармоники  $w_n$  ведут себя с глубиной качественно так же, как и гармоники в случае давлений (1.1) или (2.5).

Амплитуды гармоник  $w_n$  пропорциональны множителю  $[1 - (\lambda_0 / \lambda^*)^2]^{-1/2}$ , где  $\lambda^* = 2\pi / \alpha$  — длина волны давлений. Поэтому при  $\lambda^*$ , близкой к длине  $j$ -й гармоники  $\lambda_j$ , основной вклад в волновое движение будет давать гармоника  $w_j$ .

Поступило 24 IX 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В о й т С. С. Волны на поверхности раздела двух жидкостей, возникающие от перемецающейся периодической системы давлений. Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1959, № 17.
2. А б р а ш и н а Н. Н., Черкесов Л. В. Внутренние волны от периодических поверхностных возмущений в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью. Сб. «Морские гидрофизические исследования», 1970, № 2 (48).
3. Х е й с и н Д. Е. Нестационарная задача о колебаниях бесконечной пластинки, плавающей на поверхности идеальной жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
4. К р а с и л ь н и к о в В. Н. О возбуждении изгибно-гравитационных волн. Акуст. ж., 1962, т. 8, № 1.
5. Б у к а т о в А. Е., Черкесов Л. В. Неустановившиеся колебания упругой пластинки, плавающей на поверхности жидкости. Прикл. механ., 1970, т. 6, № 8.
6. F j e l d s t a d J. E. Interne wellen. Geofis. Publikasjoner, 1933, vol. 10, No. 6.
7. R o b i n G Ocean waves and pack ice. Polar records, 1963, vol. 11, No. 73.