

УДК 532.546:532.685

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ В СЛУЧАЕ НЕОДНОЛИСТНОСТИ ОТОБРАЖЕНИЯ

В. М. ЕНТОВ

(Москва)

При применении к уравнениям нелинейной фильтрации несжимаемой жидкости линеаризующего преобразования годографа возникают трудности, связанные с неодноточностью, вообще говоря, отображения. В рассмотренных ранее задачах удавалось выделить такой элемент симметрии течения, который допускал взаимно однозначное отображение на плоскость годографа. Поэтому создавалось впечатление, что этими случаями исчерпываются все те ситуации, когда применение преобразования годографа эффективно. Ниже показано, что даже в задачах, не допускающих однолистного отображения на плоскость годографа, преобразование годографа может оказаться полезным, позволяя свести задачу к решению связанных краевых задач одновременно на нескольких листах плоскости годографа  $w, \theta$ .

При этом используется то обстоятельство, что отображение области течения ( $w > 0$ ) на плоскость годографа квазиконформно (см., например, [1-3]) и топологически эквивалентно конформному отображению.

Приведем некоторые сведения, часто используемые в основном тексте (см. также [4]). После преобразования к переменным годографа ( $w, \theta$ ), где  $w$  — модуль скорости фильтрации,  $\theta$  — угол, составляемый вектором скорости фильтрации с осью  $x$ , функция тока  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial w} \frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\Phi(w)}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0.1)$$

В частности, если закон фильтрации имеет вид

$$\Phi(w) = w + \lambda \quad (w > 0) \quad (0.2)$$

(фильтрация с предельным градиентом), уравнение (0.1) переходит в уравнение

$$w(w + \lambda) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + (w - \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0.3)$$

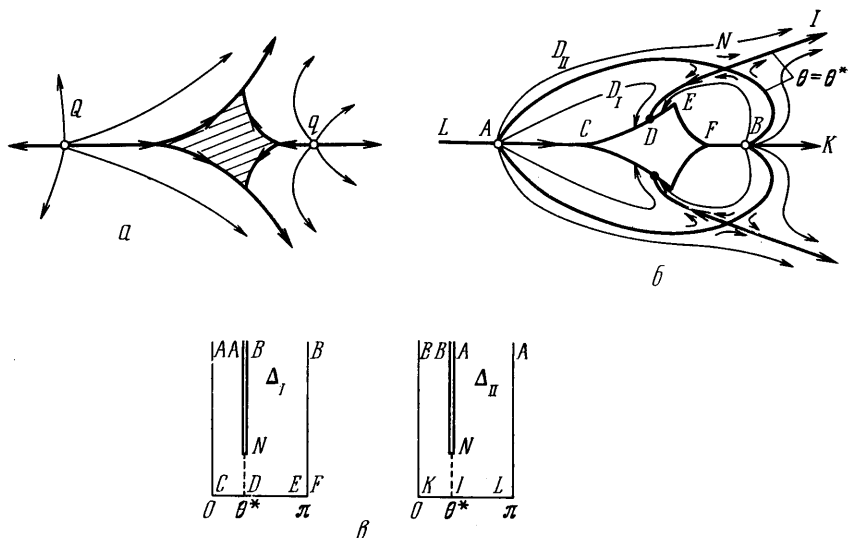
Возвращение на физическую плоскость  $x, y$  дается соотношениями

$$\begin{aligned} dz = dx + idy = & \left( \frac{\cos \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right) dw + \left( \frac{\cos \theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} - \right. \\ & \left. - \frac{\sin \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta + i \left( \frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} - \frac{\sin \theta}{w^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) dw + \\ & + i \left( \frac{\sin \theta}{w} \frac{\Phi(w)}{\Phi'(w)} \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\cos \theta}{w} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta \end{aligned} \quad (0.4)$$

В данной работе рассматривается фильтрация с предельным градиентом, однако подход п. 1 применим и к другим плоским задачам нелинейной механики. Метод решения задачи в плоскости годографа тесно связан с работой [5].

**1. Формулировка задачи. Отображение на многolistную поверхность.**  
 1°. Чтобы пояснить рассуждения, рассмотрим задачу о течении, создаваемом двумя источниками интенсивности  $Q$  и  $q$ , принимая при этом, что на бесконечности течение стремится к радиальному течению, соответствующему потоку  $Q + q$  (фиг. 1, а). Возникает вопрос: какова степень произвола в показанной на фиг. 1, а картине течения и что дает отображение ее на плоскость годографа скорости.

Рассмотрим векторное поле скоростей фильтрации  $w$ . Особые точки этого поля — источники и стоки, являющиеся в топологическом смысле



Фиг. 1

[<sup>2, 3</sup>] узлами, и, возможно, критические точки, которые превращаются при фильтрации с предельным градиентом в застойные области (зоны). Все эти особые точки и области сосредоточены в конечной части плоскости. Проводя окружность достаточно большого радиуса, легко подсчитать на ней вращение вектора скорости фильтрации, равное  $+1$ . Отсюда следует, что сумма топологических индексов особых точек и застойных зон, находящихся в конечной части плоскости, равна  $+1$ , суммарный индекс критических точек (застойных зон) равен  $-1$ . Границы застойной зоны образованы выпуклыми внутрь нее дугами линий тока, сопрягающимися в точках возврата. Отсюда следует, что при обходе застойной зоны против часовой стрелки вектор скорости фильтрации вращается по часовой стрелке, и при полном обходе совершает  $n$  оборотов, т. е. индекс застойной зоны равен  $-n$ . Величину  $n$  будем называть кратностью застойной зоны; при  $n = 1$  будем говорить о простой застойной зоне. В случае, если застойные зоны не образуются, соответствующие отрицательные индексы имеют критические точки (простые и кратные).

Теперь очевидно, что в приведенном примере образуется одна (и только одна) простая застойная зона (критическая точка, если предельный градиент отсутствует).

2°. Допустим теперь, что на фиг. 1, а проведены линии равных направлений скорости  $\theta = \text{const}$  (фиг. 1, б). Векторы направлений этих линий  $\omega$  ( $\theta_x, -\theta_y$ ) образуют новое векторное поле, которое будем называть производным по отношению к полю  $w$ . Если интерпретировать  $\omega$  как фиктивную скорость, то угол  $\theta$  представляет собой «функцию тока» этого фиктивного

ного потока. Отсюда сразу следует, что при обходе особых точек поля скоростей — источников и стоков, угол  $\theta$  получает конечное положительное приращение, а при обходе критических точек или застойных зон — конечное отрицательное приращение. Таким образом, источники и стоки фильтрационного потока играют роль источников фиктивного потока  $\omega$ , а критические точки и границы застойных зон — роль стоков (точечных или распределенных по линии). Обходу каждой из этих точек или застойной зоны соответствует положительное вращение вектора  $\omega$ , т. е. все указанные точки являются узлами и имеют, как и простая застойная зона, положительный индекс, равный 1 по отношению к полю  $\omega$ . Ввиду однозначности угла  $\theta$  во всех несобых точках поля  $w$  других узлов внутри области движения поле  $\omega$  иметь не может. Оно может иметь еще некоторое число критических (седловых) точек. Подсчитаем их число для рассмотренного примера. На той же удаленной окружности вращение поля  $\omega$  равно  $+1$ . Отсюда следует, что сумма индексов всех внутренних особых точек и застойной зоны равны  $+1$ , а это означает, согласно сказанному выше, что имеется либо два простых седла поля  $\omega$ , либо одно двукратное. В силу симметрии расположение седел соответствует фиг. 1, б, и в них  $\theta$  принимает значения  $\pm\theta^*$ . Согласно общей теории через седловую точку  $N$  проходит пара линий уровня  $\theta = \theta^*$ . Четыре ветви линии уровня  $\theta = \theta^*$ , выходящие из одного седла  $N$ , должны принадлежать к пучкам, сходящимся в различных узлах и на застойной зоне, так как иначе образовалась бы петля, окруженная линией  $\theta = \theta^*$ . Таким образом, из каждого источника выходит по одной ветви линии уровня  $\theta = \theta^*$ , одна ветвь уходит за границу застойной зоны и еще одна — на бесконечность, как показано на фиг. 1, б.

Далее, из основной системы уравнений (см., например, [6])

$$\begin{aligned} w_x \cos \theta + w_y \sin \theta - w\theta_x \sin \theta + w\theta_y \cos \theta &= 0 \\ \Phi'(w) (w_x \sin \theta - w_y \cos \theta) + \Phi(w) (\theta_x \cos \theta + \theta_y \sin \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

следует, что векторы  $\omega$  и  $\text{grad } w$  обращаются в нуль в области течения (при  $w > 0$ ) одновременно. Отсюда вытекает, что точка  $N$  является также седловой точкой линий уровня  $w$ . Далее, на каждой из выделенных ветвей линии уровня  $\theta = \theta^*$  производная от модуля скорости вдоль линии уровня  $\partial w / \partial s$  не обращается в нуль нигде, за исключением критической точки  $N$ . Действительно, если допустить, что в некоторой точке  $\partial w / \partial s = 0$ , и учесть, что  $\partial \theta / \partial s = 0$ , то из (1.1) (при  $w > 0$ )  $\partial w / \partial n = \partial \theta / \partial n = 0$ , т. е.  $\text{grad } w = \text{grad } \theta = 0$ , что соответствует критической точке. Поэтому вдоль каждой из ветвей линии уровня  $\theta = \theta^*$  и вдоль любой другой линии уровня угла модуль скорости изменяется монотонно, и можно на каждой линии уровня указать направление. Под положительным направлением далее понимается направление убывания модуля скорости. Соответственно, узлы поля линий постоянного угла и граничные линии могут быть поделены на отталкивающие (от которых линии уровня угла отходят) и притягивающие (к которым линии уровня угла подходят).

К каждому седлу подходят две ветви линии уровня  $\theta = \theta^*$  и от него отходят также две ветви линии уровня. Подходящие линии уровня вместе с границей застойной зоны разбивают область движения на две части  $D_I$  и  $D_{II}$  (фиг. 1, б). Имеет место следующее утверждение: любая область, целиком лежащая внутри одной из областей  $D_I$  или  $D_{II}$  и не охватывающая особых точек (источников) или застойной зоны, отображается на плоскость годографа взаимно однозначно. Это утверждение следует из того обстоятельства, что любая область указанного вида покрывается семейством линий  $\theta = \text{const}$ , относящихся к одному пучку, который сходится на застойной зоне или в бесконечно удаленной точке, и потому к различным значе-

ниям угла, а на каждой из этих линий модуль скорости изменяется монотонно.

Отметим еще, что можно было бы «разрезать» плоскость не по подходящим, а по отходящим от седла линиям уровня. При этом сделанное утверждение сохранилось бы полностью, только пришлось бы потребовать, чтобы рассматриваемые области не охватывали источников.

Область  $D_I$  разбивается осью симметрии на две симметричные части. Рассмотрим отображение на плоскость годографа верхней половины области  $D_I$  с выколотой точкой  $B$  (источником). Легко видеть, что образом указанной области служит полуплоска  $\Delta_I$  плоскости  $w\theta$  с разрезом вдоль отрезка  $\theta = \theta^*$ ,  $w^* \leq w < \infty$ , где  $\theta^*$  и  $w^*$  — значения угла и модуля скорости, соответствующие седловой точке  $N$  (фиг. 1, б). Берега разреза служат образом сепаратрисы седла  $\theta = \theta^*$ .

Аналогично верхняя половина области  $D_{II}$  отображается на такую же полуплоску  $\Delta_{II}$  с разрезом; соответствие точек показано на фиг. 1, в.

3°. В плоскости годографа функция тока  $\psi$  удовлетворяет линейному уравнению (0.1) во всех внутренних точках областей  $\Delta_I$  и  $\Delta_{II}$ . При этом должны выполняться очевидные граничные условия:

в области  $\Delta_I$

$$\psi = 0 \quad (\theta = 0, 0 \leq w < \infty; w = 0, 0 \leq \theta \leq \pi; \theta = \pi, 0 \leq w < \infty) \quad (1.2)$$

в области  $\Delta_{II}$

$$\begin{aligned} \psi = -\frac{1}{2}q \quad (\theta = 0, 0 \leq w < \infty), \quad \psi = \frac{1}{2}Q \quad (\theta = \pi, 0 \leq w < \infty) \\ \psi = -\frac{1}{2}q + (q + Q)(\theta/2\pi) \quad (w = 0, 0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Таким образом, остались невыясненными лишь условия на берегах разреза  $ANB$ . Именно эти условия определяют связь между решениями в областях  $\Delta_I$  и  $\Delta_{II}$ . Имеем, прежде всего, на линии  $ANB$  в физической плоскости

$$w_I = w_{II}, \quad \theta_I = \theta_{II}, \quad x_I = x_{II}, \quad y_I = y_{II}, \quad \psi_I = \psi_{II} \quad (1.4)$$

т. е. на границе между областями  $D_I$  и  $D_{II}$  ( $\Delta_I$  и  $\Delta_{II}$ ) непрерывны физические координаты, координаты в плоскости годографа и функция тока. В плоскости годографа, очевидно, левый берег разреза в области  $\Delta_I$  соответствует правому в области  $\Delta_{II}$  и наоборот. В результате получаем при  $w \geq w^*$

$$\psi_I(w, \theta^* \pm 0) = \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0) \quad (1.5)$$

$$x_I(w, \theta^* \pm 0) = x_{II}(w, \theta^* \mp 0), \quad y_I(w, \theta^* \pm 0) = y_{II}(w, \theta^* \mp 0) \quad (1.6)$$

Удобно несколько преобразовать последние условия, продифференцировав их по  $w$ . Имеем с учетом выражений для координат (0.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_I(w, \theta^* + 0)}{\partial w} &= \frac{\cos \theta^*}{w^2} \frac{\partial \psi_I(\theta^* + 0)}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta^*}{w} \frac{\partial \psi_I(\theta^* + 0)}{\partial w} = \\ &= \frac{\cos \theta^*}{w^2} \frac{\partial \psi_{II}(\theta^* - 0)}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta^*}{w} \frac{\partial \psi_{II}(\theta^* - 0)}{\partial w} = \frac{\partial x_{II}(w, \theta^* - 0)}{\partial w} \end{aligned} \quad (1.7)$$

С учетом равенства

$$\frac{\partial \psi_I(\theta^* \pm 0)}{\partial w} = \frac{\partial \psi_{II}(\theta^* \mp 0)}{\partial w}$$

следующего из условий (1.5), получаем из (1.7)

$$\frac{\partial \psi_I(\theta^* \pm 0)}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_{II}(\theta^* \mp 0)}{\partial \theta} \quad (1.8)$$

Таким образом, из условий (1.5) и (1.6)

$$\psi_I(w, \theta^* \pm 0) = \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0), \quad \frac{\partial \psi_I(w, \theta^* \pm 0)}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_{II}(w, \theta^* \mp 0)}{\partial \theta} \quad (1.9)$$

Будем рассматривать области  $\Delta_I$  и  $\Delta_{II}$  как два листа двулистной римановой поверхности и считать, что левый берег разреза на нижнем листе склеен с правым берегом разреза на верхнем листе, а левый берег разреза на верхнем листе склеен с правым берегом разреза на нижнем листе. Тогда условия (1.9) означают, что функция  $\psi(w, \theta)$ , равная  $\psi_I(w, \theta)$  на первом листе римановой поверхности и  $\psi_{II}(w, \theta)$  на втором листе римановой поверхности, гладко продолжается с листа на лист, то есть удовлетворяет уравнению (0.1) на всей двулистной римановой поверхности.

Отметим еще, что при переходе от задачи в физической плоскости к задаче в плоскости годографа величины  $\theta^*$  и  $w^*$  играют роль неопределенных параметров. Для их определения необходимы два условия; одно условие состоит в том, что расстояние между источниками должно принимать заданное значение  $L$ .

Чтобы получить второе условие, заметим, что при обратном переходе с плоскости годографа на физическую плоскость прообразы линий  $AC$  и  $FB$  будут обязательно параллельны, но не обязательно коллинеарны. Дополнительное условие коллинеарности имеет, как следует из формул (0.4), вид

$$\int_0 \sin \theta \lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w} \frac{\partial \psi_I}{\partial w} d\theta = 0 \quad (1.10)$$

Указанное условие (1.10) относится к случаю движения с предельным градиентом. Если предельного градиента нет, то нет и застойных зон, так что указанное выше дополнительное условие теряет смысл. Однако и в этом случае можно указать дополнительное условие, состоящее в том, что точка, в которую стягивается застойная зона и которая отображается в линию  $w = 0$  плоскости годографа, является критической точкой, т. е. кратной точкой линии уровня функции тока  $\psi$ . Отсюда следует, что в окрестности линии  $w = 0$ , на которой  $\psi$  постоянна, разность  $\psi(w^0, \theta) - \psi(0, \theta)$  ( $w^0$  — достаточно малое число) должна менять знак при изменении  $\theta$  от 0 до  $\pi$ . Это означает, что в разложении

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k(w) \sin k\theta \quad (1.11)$$

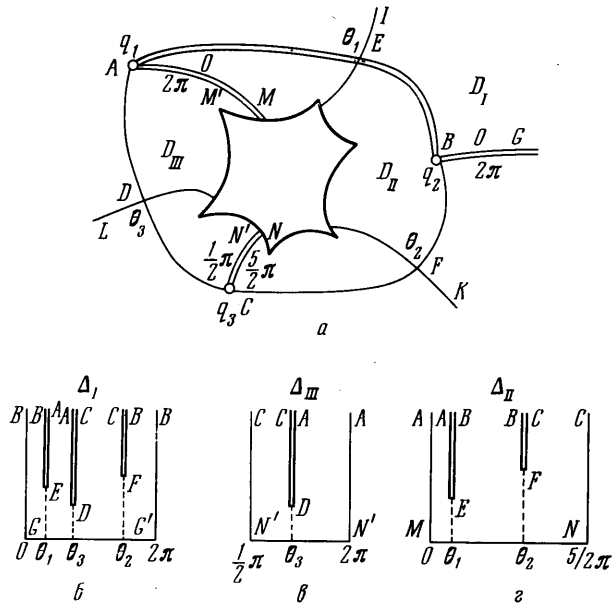
справедливом вблизи линии  $w = 0$ , где  $P_k(w)$  — ограниченные при  $w = 0$  решения уравнения

$$\frac{w^2}{\Phi(w)} \frac{d}{dw} \left( \frac{\Phi^2}{w\Phi'(w)} \frac{dP}{dw} \right) - k^2 P = 0$$

первый коэффициент должен обращаться в нуль (в случае кратной критической точки в нуль должно обращаться соответствующее число членов разложения (1.11)). Нетрудно видеть, что указанное условие совпадает с (1.10).

4°. На фиг. 2 показано отображение на плоскость годографа течения, создаваемого тремя источниками различной, вообще говоря, интенсивности.

Суммарный индекс источников и застойных зон, расположенных в конечной части плоскости, равен  $+1$ , что при наличии трех источников указывает на существование одной «двукратной» застойной зоны или двух простых застойных зон. Рассмотрение предельных случаев показывает, что могут осуществляться обе эти возможности. (Так, одна «двойная» застой-



Фиг. 2

ная зона возникает при наличии трех одинаковых источников, расположенных в вершинах равностороннего треугольника, а две простые — при расположении источников по одной линии).

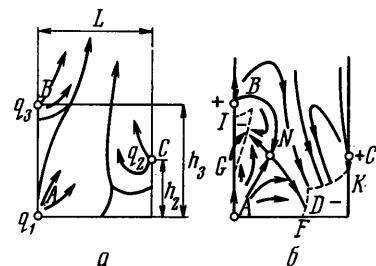
Далее, исследование поля линий постоянного угла  $\theta$  (или векторного поля  $\omega$ ) показывает, что в случае одной двукратной застойной зоны (которая только и рассматривается) поле имеет три седловых (критических) точки ( $E, D, F$ ), которым отвечают значения угла  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$  (фиг. 2, а).

Проведем разрез вдоль дуг сепаратрис седловых точек  $AEBFCDA$  и линии  $BG$ . Область, ограниченная изнутри линией разреза, отображается на плоскость годографа в полуполосу ( $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq w < \infty$ ) с разрезами вдоль лучей ( $\theta = \theta_1, w_1 \leq w < \infty, \theta = \theta_2, w_2 \leq w < \infty, \theta = \theta_3, w_3 \leq w < \infty$ ) (фиг. 2, в). Область между линией  $AEBFCDA$  и застойной зоной отображается на два различных листа в плоскости годографа (фиг. 2, г, д).

На каждом из листов (фиг. 2, в, г, д) функция тока  $\psi$  ( $\psi_I, \psi_{II}, \psi_{III}$ ) удовлетворяет уравнению (0.1); на принадлежащих различным листам граничных линиях, обозначенных одинаковыми буквами, имеем условия равенства производных  $\psi_\theta$  и  $\psi_w$  в соответственных точках. Отсюда следует, что значения  $\psi$  в соответственных точках границ могут отличаться лишь на постоянную величину. Число границ, на которых величина скачка отлична от нуля, определяется необходимым числом разрезов, которые нужно провести в плоскости  $xu$ , чтобы функция  $\psi$  стала однозначной. Один из возможных вариантов расположения разрезов (двойные линии) показан на фиг. 2, а. В результате имеем следующие условия на участках границ, обозначенных одинаковыми буквами: в соответственных точках (т. е. при одинаковых значениях  $w$ )  $(\psi_\theta)_- = (\psi_\theta)_+$ . Далее, на линиях

$AD, DC, CF, FB$  имеем  $\psi_- = \psi_+$ . На остальных же линиях имеем:  $\psi_{III} - \psi_{II} = -q_3$  на  $AM$ ,  $\psi_{II} - \psi_{III} = q_3$  на  $CN$ ,  $\psi_{II} - \psi_I = q_1 + q_3$  на  $AEB$  и  $\psi(2\pi) - \psi(0) = q_1 + q_2 + q_3$  на  $BG$ . Наконец, на линиях, соответствующих  $w = 0$ ,  $\psi_1 = (\theta/2\pi)(q_1 + q_2 + q_3)$  на  $GG'$ ,  $\partial\psi_{II}/\partial\theta = 0$  на  $MN'$  и  $\partial\psi_{III}/\partial\theta = 0$  на  $MN$ .

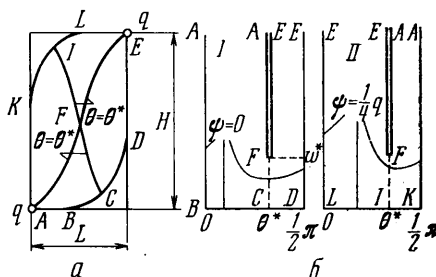
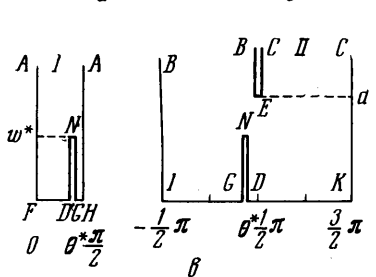
Задача в физической плоскости содержит семь существенных параметров (дебиты источников; расстояния между ними и угол, составляемый одной из сторон треугольника источников с осью  $x$ ). Задача в плоскости годографа содержит девять параметров (дебиты  $q_i$ , углы  $\theta_i$ , скорости  $w_i$ ). Из этих параметров шесть последних должны быть выбраны так, чтобы источники образовывали в физической плоскости надлежащим образом ориентированный треугольник. Ниже будет показано, что недостающие условия, как и в предыдущей задаче, следуют из требования непрерывности координат на берегах разрезов в физической плоскости.



Фиг. 3

Рассмотрим теперь некоторые более простые задачи, представляющие существенный интерес для приложений.

*Течение, создаваемое пятью рядами источников.* В нефтепромысловой практике достаточно часто встречается расположение эксплуатационных скважин (стоков) в пять симметрично расположенных рядов.



Фиг. 4

Элемент симметрии этого потока показан на фиг. 3, а, расположение застойных зон устанавливается элементарно. На фиг. 3, б знаки плюс и минус отмечают «источники» и «стоки» поля  $\omega$ . Пользуясь этими значениями, легко изобразить картину линий постоянного угла, показанную на фиг. 3, б. Отображение на плоскость годографа дается двумя листами, показанными на фиг. 3, в, причем граничные условия для функций  $\psi_I$  и  $\psi_{II}$  имеют вид

$$\psi_I = 1/2q_2 \text{ на } AFD, \quad \psi_I = 1/4q_1 + 1/2q_2 \text{ на } GHA,$$

$$\psi_{II} = 1/4q_1 + 1/2q_2 \text{ на } BIG, \quad \psi_{II} = 1/2q_2 \text{ на } DKC, \quad \psi_{II} = 0 \text{ на } EC$$

$$\psi_{II} = 1/4q_1 + 1/2(q_1 + q_2) \text{ на } BE$$

на разрезе  $DNG$  имеем

$$\psi_{I^\pm} = \psi_{II^\mp}, \quad \frac{\partial\psi_{I^\pm}}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi_{II^\mp}}{\partial\theta}$$

Задача в физической плоскости содержит шесть параметров: дебиты источников  $q_i$ , ширину полосы  $L$  и расстояния  $h_2$  и  $h_3$  источников от оси  $x$ . Задача в плоскости годографа содержит параметрами «координаты» седловой точки  $\theta^*$ ,  $w^*$ , значение скорости на бесконечности  $a$  и дебиты  $q_i$ . Имеем далее тождество

$$4aL = q_1 + 2(q_2 + q_3)$$

Таким образом, остаются неопределенными два параметра ( $\theta^*$  и  $w^*$ ), которые подлежат определению по известным значениям  $h_2$  и  $h_3$ .

*Течение в элементе прямоугольной сетки скважин (фиг. 4).*

Течение указанного вида обладает, очевидно, центральной симметрией; центр симметрии (точка  $F$  на фиг. 4,  $a$ ) является седловой точкой; соответствующие ей значения угла  $\theta^*$  и скорости  $w^*$  неизвестны. Отображение плоскости течения на два листа в плоскости годографа показано на фиг. 4,  $b$ .

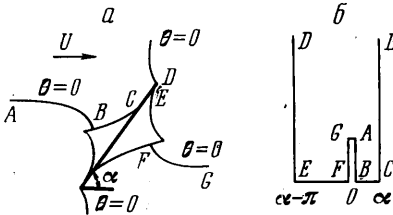
Два листа плоскости годографа сшиты «наперекрест» по разрезу  $AFE$  с условиями

$$\psi_{I^{\pm}}(w, \theta^*) = \psi_{II^{\mp}}(w, \theta^*), \quad \frac{\partial \psi_{I^{\pm}}(w, \theta^*)}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_{II^{\mp}}(w, \theta^*)}{\partial \theta} \quad (w^* \leq w < \infty)$$

Параметрами физической задачи служат величины  $q$ ,  $H$  и  $L$  (фиг. 4); параметрами задачи в плоскости годографа — величины  $q$ ,  $\theta^*$  и  $w^*$ , две из которых подлежат определению.

*Обтекание препятствия в виде наклонной пластинки (фиг. 5)<sup>1</sup>.* Картина течения изображена на фиг. 5,  $a$ . В концах пластинки скорость принимает бесконечно большие значения, и ее направление меняется с  $\alpha$  на  $\alpha - \pi$ . Поэтому концы пластинки служат для векторного поля  $\omega$  источниками, а застойные зоны — стоками. Легко

убедиться, что в данном случае единственной седловой точкой является бесконечно удаленная точка, соответствующая  $\theta = 0$ ,  $w = U$ . В силу симметрии течения относительно середины пластинки ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ), полагая здесь  $\psi = 0$ , в соответственных точках линий  $AB$  и  $FG$  (т. е. точках, имеющих одинаковые значения  $w$ ) имеем  $x_+ = x_-$ ,  $y_+ = -y_-$ ,  $\psi_+ = -\psi_-$ . Отображение области, лежащей над линией  $ABCDE$ , на плоскость годографа показано на фиг. 5,  $b$ . Имеем на  $DEF$  и  $BCD$   $\psi = 0$ ; на  $FG$  и  $AB$ , как следует из сказанного выше



Фиг. 5

$$\psi(w, -0) = -\psi(w, +0), \quad \psi_{\theta}(w, +0) = -\psi_{\theta}(w, -0)$$

Наконец, масштаб задачи в физической плоскости фиксируется заданием длины пластинки  $2L$ . Чтобы записать вытекающее отсюда условие, заметим, что между координатами точек  $B$ ,  $D$  и  $F$  имеется очевидное соотношение

$$(z_D - z_F) + (z_D - z_B) = Le^{i\alpha}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} & - \int_{\alpha-\pi}^0 \left( \frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right)_{w=0} e^{i\theta} d\theta + e^{i(\alpha-\pi)} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha-\pi} \frac{dw}{w^2} + \\ & + e^{i\alpha} \int_0^{\infty} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{\theta=\alpha} \frac{dw}{w^2} + \int_0^{\alpha} e^{i\theta} \left( \frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w} \right)_{w=0} d\theta = \frac{L}{\lambda} e^{i\alpha} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Условие (1.12) представляет собой искомое дополнительное условие для определения решения задачи в плоскости годографа. Отметим, что точка  $A$  в плоскости годографа является особой; характер особенности задается условием (1.12).

Для одних задач (например, для задачи о течении в прямоугольном элементе сетки источников и стоков, фиг. 4) число параметров задачи в физической плоскости и плоскости годографа одинаково. В других же задачах (в частности, в задачах о двух или трех источниках) число параметров задачи в физической плоскости меньше, чем в плоскости годографа. Это означает, что задача в плоскости годографа содержит избыточные решения, не допускающие той интерпретации, которая была заложена в картине течения на физической плоскости. Избыточные решения появляются из-за того, что в соответствующих задачах внутри области движения имеются особые точки (источники или критические точки) или области (застойные зоны), окрестность которых

<sup>1</sup> Для теории фильтрации эта задача представляет, по-видимому, лишь методический интерес; однако ее аналоги в задачах теории пластичности и нелинейной электростатики непосредственно интересны.



не допускает однолистного отображения на плоскость годографа ( $w\theta$ ). В результате при отображении приходится проводить в физической плоскости разрезы. По физическим соображениям на этих разрезах непрерывны координаты  $x$  и  $y$ . Однако при формулировке задачи вместо условия непрерывности координат было принято условие непрерывности производных  $\partial\psi/\partial\theta$  и  $\partial\psi/\partial w$ . В результате решение задачи в плоскости годографа не удовлетворяет, вообще говоря, условию равенства координат в соответственных точках берегов разреза, и это условие должно быть наложено дополнительно.

Выше это было продемонстрировано на примере течения, создаваемого источником и стоком различной интенсивности. В этом случае как причина появления лишнего параметра, так и условие для его определения достаточно очевидны. Сложнее обстоит дело в других случаях. Так, в задаче о трех источниках (фиг. 2) условие непрерывности координат на разрезе  $BG$  дает

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{dx_I}{d\theta} + i \frac{dy_I}{d\theta} \right)_{w=\text{const}} d\theta = 0 \quad (1.13)$$

а условие непрерывности при обходе застойной зоны имеет вид

$$\int_{1/2\pi}^{2\pi} e^{i\theta} \left( \frac{1}{w} \frac{\partial\psi_{III}}{\partial w} \right)_{w=0} d\theta + \int_0^{5\pi/2} e^{i\theta} \left( \frac{1}{w} \frac{\partial\psi_{II}}{\partial w} \right)_{w=0} d\theta = 0 \quad (1.14)$$

как и выше, индексы I, II и III относятся к номеру листа римановой поверхности, на котором рассматривается решение. Таким образом, комплексные условия (1.13) и (1.14) дают четыре уравнения для определения свободных параметров. В то же время, как указано выше, число недостающих условий было равно двум. Поэтому на первый взгляд условия (1.13) и (1.14) переопределяют задачу. Можно показать, что это не так, поскольку из выполнения условий (1.13) следует выполнение условий (1.14), и задача оказывается полностью определенной.

**2. О решении задачи на двулистной поверхности. Задача о двух источниках.** Перейдем к решению задач на плоскости годографа. Рассмотрим вначале относительно простой случай двух источников. Имеем (фиг. 1) для уравнения (0.3)

$$\begin{aligned} \psi_I &= 0 & (\theta = 0, \theta = \pi, 0 \leq w < \infty; w = 0, 0 \leq \theta \leq \pi) \\ \psi_{II} &= -1/2q & (\theta = 0, 0 \leq w < \infty), \quad \psi_{II} = -1/2q + (Q + q)(\theta/2\pi) \\ & & (0 \leq \theta \leq \pi, w = 0); \quad \psi_{II} = 1/2Q \quad (\theta = \pi, 0 \leq w < \infty) \end{aligned} \quad (2.1)$$

На разрезе  $\theta = \theta_1 = \theta^*$ ,  $w \geq a = w^*$  имеем

$$\psi_{I^{\pm}} = \psi_{II^{\mp}}, \quad \frac{\partial\psi_{I^{\pm}}}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi_{II^{\mp}}}{\partial\theta} \quad (2.2)$$

Дополнительные условия имеют вид

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{\partial\psi_I(w, 0)}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_I(w, \pi)}{\partial\theta} \right] \frac{dw}{w^2} + \lambda \int_0^{\pi} \left( \frac{1}{w} \frac{\partial\psi_I}{\partial w} \right)_{w=0} \cos\theta d\theta = L \quad (2.3)$$

$$\int_0^{\pi} \left( \frac{1}{w} \frac{\partial\psi_I}{\partial w} \right)_{w=0} \sin\theta d\theta = 0 \quad (2.4)$$

и служат для определения  $a$  и  $\theta_1$  как функций от  $L$ ,  $Q$  и  $q$ .

Полагая  $a$  и  $\theta_1$  известными (т. е. рассматривая обратную задачу), введем новую неизвестную функцию

$$\psi_0 = \psi_I + \psi_{II} \quad (2.5)$$

Из условий (2.2) очевидно, что  $\psi_0$  непрерывна со своей производной при  $\theta = \theta_1$ ,  $0 \leq w < \infty$ , и в силу граничных условий (2.1) имеем

$$\psi_0 = -1/2q + (q + Q)(\theta / 2\pi) \quad (2.6)$$

Таким образом

$$\psi_{I1} = -1/2q + (q + Q)(\theta / 2\pi) - \psi_I \quad (2.7)$$

и условия (2.2) на разрезе ( $\theta = \theta_1$ ,  $w \geq a$ ) превращаются в условия

$$\psi_{I1}^+ + \psi_{I1}^- = -1/2q + (Q + q)(\theta_1 / 2\pi) \equiv F \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \psi_{I1}^+}{\partial \theta} + \frac{\partial \psi_{I1}^-}{\partial \theta} = \frac{Q + q}{2\pi} \equiv f \quad (2.9)$$

Обозначим через  $\psi^*(s, \theta)$  результат применения интегрального преобразования по переменной  $u = w / \lambda$  к функции  $\psi_I(w, \theta)$  [5]. Имеем<sup>1</sup>

$$\psi^*(s, \theta) = \int_0^\infty (1 + u) \psi_I(u, \theta) F(s, -u) du$$

$$\psi^*(s, \theta) = A(s) \operatorname{sh} s\theta \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1), \quad \psi^*(s, \theta) = B(s) \operatorname{sh} s(\pi - \theta) \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \pi) \quad (2.10)$$

Удовлетворяя условиям (2.8) и (2.9) и условиям непрерывности  $\psi_I(w, \theta)$  и  $\partial \psi_I(w, \theta) / \partial \theta$  при  $\theta = \theta_1$ ,  $w \leq a$ , получим следующие уравнения:

$$u^2 \int_0^\infty s^3 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s [A(s) \operatorname{sh} s\theta_1 + B(s) \operatorname{sh} s\theta_2] F(s, -u) ds = 2F \quad (a/\lambda = a_0 \leq u < \infty)$$

$$u^2 \int_0^\infty s^4 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s [A(s) \operatorname{ch} s\theta_1 - B(s) \operatorname{ch} s\theta_2] F(s, -u) ds = 2f \quad (a/\lambda = a_0 \leq u < \infty)$$

$$\int_0^\infty s^3 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s [A(s) \operatorname{sh} s\theta_1 - B(s) \operatorname{sh} s\theta_2] F(s, -u) ds = 0 \quad (0 \leq u \leq a_0) \quad (2.11)$$

$$\int_0^\infty s^4 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s [A(s) \operatorname{ch} s\theta_1 + B(s) \operatorname{ch} s\theta_2] F(s, -u) ds = 0 \quad (0 \leq u \leq a_0)$$

Обозначим

$$\{F^*(s), f^*(s)\} = \int_{a_0}^\infty \{F, f\} (1 + u) F(s, -u) du \quad (2.12)$$

и положим

$$A(s) \operatorname{sh} s\theta_1 + B(s) \operatorname{sh} s\theta_2 - F^* = C(s), \quad sA(s) \operatorname{ch} s\theta_1 - sB(s) \operatorname{ch} s\theta_2 - f^* = D(s) \quad (2.13)$$

Тогда уравнения (2.11) перейдут в уравнения

$$\int_0^\infty s^3 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s C(s) F(s, -u) ds = 0$$

$$\int_0^\infty s^3 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s D(s) F(s, -u) ds = 0 \quad (a_0 \leq u < \infty)$$

$$\int_0^\infty \frac{s^3 (1 + s^2)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} \left[ (C(s) + F^*) \operatorname{sh} s(\theta_1 - \theta_2) + \right.$$

<sup>1</sup> Здесь и далее используются сокращенные обозначения гипергеометрических функций, введенные в [5].

$$+ \frac{2}{s} (D(s) + f^*) \operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2 \Big] F(s, -u) ds = 0 \quad (0 \leq u \leq a_0) \tag{2.14}$$

$$\int_0^\infty \frac{s^3(1+s^2)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} [2s(C(s) + F^*) \operatorname{ch} s\theta_1 \operatorname{ch} s\theta_2 + (D(s) + f^*) \operatorname{sh} s(\theta_1 - \theta_2)] F(s, -u) ds = 0 \quad (0 \leq u \leq a_0) \tag{2.15}$$

Уравнения (2.14) и (2.15) представляют собой некоторое обобщение уже рассмотренных ранее [5] парных уравнений, и для их решения можно воспользоваться теми же приемами. Интегрируя эти уравнения по  $u$ , приведем их к виду

$$\int_0^\infty s^3 \operatorname{cth} \pi s C(s) F_1(s, -u) ds = 0, \quad \int_0^\infty s^3 \operatorname{cth} \pi s D(s) F_1(s, -u) ds = 0 \quad (a_0 \leq u < \infty) \tag{2.16}$$

$$\int_0^\infty \frac{c^3 F_1(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} \left[ (C(s) + F^*) \operatorname{sh} s(\theta_1 - \theta_2) + \right. \tag{2.17}$$

$$\left. + \frac{2}{s} (D(s) + f^*) \operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2 \right] ds = r_1 \quad (0 \leq u \leq a_0)$$

$$\int_0^\infty \frac{s^3 F_1(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} [2s(C(s) + F^*) \operatorname{ch} s\theta_1 \operatorname{ch} s\theta_2 + (D(s) + f^*) \operatorname{sh} s(\theta_1 - \theta_2)] ds = r_2$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — постоянные.  
Положим

$$C(s) = s^{-3} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin \tau s \, d\tau, \quad D(s) = s^{-1} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin \tau s \, d\tau, \quad a_0 = \operatorname{sh}^2 \beta_0 \tag{2.18}$$

При этом уравнения (2.16) будут тождественно удовлетворены, если только

$$\int_0^{2\beta_0} \tau \varphi(\tau) \, d\tau = 0, \quad \zeta(2\beta_0) = 0 \tag{2.19}$$

(Эти соотношения, устанавливаемые так же, как и в [5], будут в дальнейшем использованы для определения постоянных  $r_1$  и  $r_2$ ).

Подставляя выражения (2.18) в уравнения (2.17), получим

$$\int_0^\infty s F_1(s, -u) \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin \tau s \, d\tau \, ds = r_1 - \int_0^\infty s^2 f^* (1 + \varepsilon_1(s)) F_1(s, -u) \, ds - \int_0^\infty s \varepsilon_1(s) F_1(s, -u) \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin \tau s \, d\tau \, ds - \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} s(\theta_1 - \theta_2) F_1(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} \times \times \left[ s^3 F^* + \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin \tau s \, d\tau \right] ds \equiv R_1(u) \tag{2.20}$$

$$\int_0^\infty s F_1(s, -u) \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin \tau s \, d\tau \, ds = r_2 - \int_0^\infty s F^* [1 + \varepsilon_3(s)] F_1(s, -u) \, ds - \int_0^\infty s F_1(s, -u) \varepsilon_3(s) \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin \tau s \, d\tau \, ds - \int_0^\infty \frac{F_1(s, -u) \operatorname{sh} s(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} \times$$

$$\times \left( s^3 f^* + s^2 \int_0^{2\beta} \zeta(\tau) \sin s\tau d\tau \right) ds \equiv R_Z(u)$$

Здесь

$$\varepsilon_1(s) = \frac{2 \operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0} - 1, \quad \varepsilon_3(s) = \frac{2 \operatorname{ch} s\theta_1 \operatorname{ch} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0} - 1, \quad \theta_0 = \pi = \theta_1 + \theta_2$$

Допуская, что правые части  $R_1$  и  $R_2$  уравнений (2.20) известны, находим по аналогии с [5]

$$\zeta(\tau) = -\frac{2}{\pi \operatorname{sh}^{1/2} \tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\operatorname{sh}^2 \tau} \frac{u R_1(u) du}{(\operatorname{sh}^2 \tau - u)^{1/2}} \quad (2.21)$$

$$\varphi(\tau) = \frac{2}{\pi \operatorname{sh}^{1/2} \tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\operatorname{sh}^2 \tau} \frac{u R_2(u) du}{(\operatorname{sh}^2 \tau - u)^{1/2}}$$

Выражения  $R_1$  и  $R_2$  зависят от  $u$  через посредство множителя  $F_1(s, -u)$  в подынтегральном выражении. Рассмотрим поэтому выражение

$$\eta(\tau, s) = \frac{2}{\pi \operatorname{sh}^{1/2} \tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\operatorname{sh}^2 \tau} \frac{u F_1(s, -u) du}{(\operatorname{sh}^2 \tau - u)^{1/2}} = \frac{2}{\pi s} \sin \tau s \quad (2.22)$$

Здесь использовано полученное ранее ([5], формула (2.1)) интегральное представление функции  $F_1(s, -u)$

$$F_1(s, -u) = \frac{2}{\pi s u} \int_0^{\beta} \frac{\sin 2\xi s \operatorname{sh} \xi d\xi}{(\operatorname{sh}^2 \beta - \operatorname{sh}^2 \xi)^{1/2}}, \quad u = \operatorname{sh}^2 \beta \quad (2.23)$$

Таким образом, из (2.20) — (2.22) получаем

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) &= \frac{2}{\pi} r_1 \operatorname{sh} \tau - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s f^*(1 + \varepsilon_1(s)) \sin \tau s ds - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon_1(s) \sin \tau s \int_0^{2\beta_0} \zeta(\alpha) \sin s\alpha d\alpha ds - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^2 \operatorname{sh} s(\theta_1 - \theta_2)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} \sin \tau s F^* ds - \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} s(\theta_1 - \theta_2) \sin \tau s}{s \operatorname{sh} s\theta_0 \operatorname{th} \pi s} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\alpha) \sin s\alpha d\alpha ds$$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= \frac{2r_2}{\pi} \operatorname{sh} \tau - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s^2 F^*(s) [1 + \varepsilon_3(s)] \sin \tau s ds - \\ &- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \tau s \varepsilon_3(s) \int_0^{2\beta_0} \varphi(\alpha) \sin s\alpha d\alpha ds - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} s^2 \frac{\sin s\tau \operatorname{sh} s(\theta_2 - \theta_1)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} f^* ds - \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{sh} s(\theta_2 - \theta_1) \sin s\tau}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\alpha) \sin s\alpha d\alpha ds$$

Если  $F$  и  $f$  — постоянные, как это имело место в рассматриваемой задаче, то

$$\{F^*, f^*\} = 2s^{-2} \{F, f\} F_0(s, -a_0) \quad (2.26)$$

$$\int_0^{\infty} s^j \sin \tau s \, ds = 2f \left[ \frac{\text{sh}^{1/2} \tau (\text{sh}^2 \beta_0 - \text{sh}^{2 \cdot 1/2} \tau)^{1/2}}{\text{sh}^2 \beta_0} - \arcsin \frac{\text{sh}^{1/2} \tau}{\text{sh} \beta_0} \right] \quad (2.27)$$

$$\int_0^{\infty} s^3 F^* \sin \tau s \, ds = F \frac{\text{sh}^{1/2} \tau (\text{ch} \tau - \text{sh}^2 \beta_0)}{\text{sh}^2 \beta_0 (\text{sh}^2 \beta_0 - \text{sh}^{2 \cdot 1/2} \tau)^{1/2}} \quad (2.28)$$

Таким образом, уравнения (2.24) и (2.25) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) = & \frac{2r_1}{\pi} \text{sh} \tau - \frac{4f}{\pi} \left[ \frac{\text{sh}^{1/2} \tau}{\text{sh}^2 \beta_0} (\text{sh}^2 \beta_0 - \text{sh}^{2 \cdot 1/2} \tau)^{1/2} + \arcsin \frac{\text{sh}^{1/2} \tau}{\text{sh} \beta_0} \right] - \\ & - \frac{4f}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon_1(s) F_0(s, -a_0) \frac{\sin \tau s}{s} \, ds - \frac{4F}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{s^2 \text{sh} s (\theta_1 - \theta_2)}{\text{th} \pi s \text{sh} s \theta_0} F_0(s, -a_0) \sin \tau s \, ds - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\alpha) \int_0^{\infty} \frac{\text{sh} s (\theta_1 - \theta_2) \sin \tau s \sin \alpha s}{s \text{sh} s \theta_0 \text{th} \pi s} \, ds \, d\alpha - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\alpha) \int_0^{\infty} \varepsilon_1(s) \sin \tau s \sin \alpha s \, ds \, d\alpha \\ \varphi(\tau) = & \frac{2}{\pi} r_2 \text{sh} \tau - \frac{2F}{\pi} \text{sh} \frac{\tau}{2} \frac{\text{ch} \tau - \text{sh}^2 \beta_0}{\text{sh}^2 \beta_0 (\text{sh}^2 \beta_0 - \text{sh}^{2 \cdot 1/2} \tau)^{1/2}} - \\ & - \frac{4f}{\pi} \int_0^{\infty} \varepsilon_3(s) F_0(s, -a_0) \sin \tau s \, ds - \frac{4f}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \tau s \text{sh} s (\theta_2 - \theta_1)}{\text{th} \pi s \text{sh} s \theta_0} F_0(s, -a_0) \, ds - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\alpha) \int_0^{\infty} \varepsilon_3(s) \sin \alpha s \sin \tau s \, ds \, d\alpha - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\alpha) \int_0^{\infty} \frac{s \text{sh} s (\theta_2 - \theta_1) \sin \tau s \sin \alpha s}{\text{sh} s \theta_0 \text{th} \pi s} \, ds \, d\alpha \end{aligned} \quad (2.29)$$

причем для определения постоянных  $r_1$  и  $r_2$  имеем условия (2.19).

Уравнения (2.29) представляют собой систему уравнений Фредгольма второго рода. Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) = & \frac{2r_1}{\pi} \text{sh} \tau - \frac{4f}{\pi} \left[ \frac{\text{sh}^{1/2} \tau}{\text{sh}^2 \beta_0} (\text{sh}^2 \beta_0 - \text{sh}^{2 \cdot 1/2} \tau)^{1/2} + \arcsin \frac{\text{sh}^{1/2} \tau}{\text{sh} \beta_0} \right] + \zeta_1(\tau) \\ \varphi(\tau) = & \frac{2r_2}{\pi} \text{sh} \tau - \frac{2F}{\pi} \frac{\text{sh}^{1/2} \tau (\text{ch} \tau - \text{sh}^2 \beta_0)}{\text{sh}^2 \beta_0 (\text{sh}^2 \beta_0 - \text{sh}^{2 \cdot 1/2} \tau)^{1/2}} + \varphi_1(\tau) \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $\zeta_1(\tau)$  и  $\varphi_1(\tau)$  разлагаются в ряды по нечетным степеням  $\tau$ . Считая  $\beta_0$  малым, ограничимся построением решения системы (2.29) с точностью до членов  $O(\beta_0)$ . Примем в качестве исходного приближения, что  $\zeta_1(\tau) = \varphi_1(\tau) = 0$ . При этом

$$r_1 = \pi f / \text{sh} 2\beta_0 = O(1/\beta_0), \quad r_2 = \pi F \left[ \int_0^{2\beta_0} \tau \text{sh} \tau \, d\tau \right]^{-1} = O(\beta_0^{-3}) \quad (2.31)$$

Если теперь подставить выражения  $\zeta$  и  $\varphi$  в первом приближении в правые части уравнений (2.30), то вклады соответствующих интегралов будут  $O(\beta_0^2)$ , и ими можно пренебречь. В результате получим

$$\begin{aligned} \zeta(\tau) = & \frac{2f \text{sh} \tau}{\text{sh} 2\beta_0} - \frac{4f}{\pi} \left[ \frac{\text{sh}^{1/2} \tau}{\text{sh}^2 \beta_0} (\text{sh}^2 \beta_0 - \text{sh}^{2 \cdot 1/2} \tau)^{1/2} + \arcsin \frac{\text{sh}^{1/2} \tau}{\text{sh} \beta_0} \right] - \\ & - \frac{4f}{\pi} \tau \int_0^{\infty} \varepsilon_1(s) \, ds - \frac{4F}{\pi} \tau \int_0^{\infty} s^3 \frac{\text{cth} \pi s \text{sh} s (\theta_1 - \theta_2)}{\text{sh} s \theta_0} \, ds + O(\beta_0^2) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\varphi(\tau) = 2F \operatorname{sh} \tau \left[ \int_0^{2\beta_0} \tau \operatorname{sh} \tau \, d\tau \right]^{-1} - \frac{2F \operatorname{sh}^{1/2} \tau (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh}^2 \beta_0)}{\pi (\operatorname{sh}^2 \beta_0 - \operatorname{sh}^2 {}^{1/2} \tau)^{1/2}} -$$

$$- \frac{4F}{\pi} \tau \int_0^\infty s \varepsilon_3(s) \, ds - \frac{4f}{\pi} \tau \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sh} s (\theta_2 - \theta_1)}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s \theta_0} \, ds + O(\beta_0^2)$$

Нетрудно видеть, что расчеты по формулам (2.32) с принятой точностью практически сводятся к суммированию приведенных в [5] решений задач *A* и *B* с соответствующими множителями.

**3. О решении задачи на двулистной поверхности. Общий случай.** Рассмотрим теперь следующую, более общую задачу. Пусть имеется двулистная область из двух полулобос:  $\Delta_I \{0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq u < \infty\}$  и  $\Delta_{II} \{\theta_3 \leq \theta \leq \theta_4, 0 \leq u < \infty\}$ , причем при некотором  $\theta_1$ ,  $\max(0, \theta_3) < \theta_1 < \min(\theta_0, \theta_4)$ , и  $u > a_0$  имеем условия непрерывности и гладкой сшивки

$$\psi_I(u, \theta_1 \pm 0) = \psi_{II}(u, \theta_1 \mp 0) \quad (u > a_0)$$

$$\frac{\partial \psi_I(u, \theta_1 \pm 0)}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_{II}(u, \theta_1 \mp 0)}{\partial \theta} \quad (3.1)$$

а на внешних контурах  $\Gamma_I$  и  $\Gamma_{II}$  полюс заданы значения, принимаемые функцией  $\psi\{\psi_I, \psi_{II}\}$ . По-прежнему предполагается, что во всех внутренних точках областей  $\Delta_I$  и  $\Delta_{II}$  удовлетворяется уравнение (0.3).

Положим

$$\psi_{I, II} = \Psi_{I, II} \pm \psi_{I, II}^\circ \quad (3.2)$$

где через  $\psi^\circ$  обозначено решение задачи с данными краевыми условиями в соответствующей полулобосе без разреза, которое всегда может быть найдено описанными ранее методами. Подставляя (3.2) в условия (3.1), получим

$$\Psi_I(u, \theta_1 \pm 0) - \Psi_{II}(u, \theta_1 \mp 0) = \psi_{II}^\circ(u, \theta_1) - \psi_I^\circ(u, \theta_1) = f(u) \quad (u > a_0)$$

$$\frac{\partial \Psi_I(u, \theta_1 \pm 0)}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi_{II}(u, \theta_1 \mp 0)}{\partial \theta} = \frac{\partial \psi_{II}^\circ(u, \theta_1)}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_I^\circ(u, \theta_1)}{\partial \theta} = F(u) \quad (3.3)$$

Для трансформант  $\Psi_I^*(s, \theta)$ ,  $\Psi_{II}^*(s, \theta)$  имеем

$$\Psi_I^*(s, \theta) = A(s) \operatorname{sh} s \theta \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1); \quad \Psi_I^*(s, \theta) = B(s) \operatorname{sh} s (\theta_0 - \theta)$$

$$\quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0) \quad (3.4)$$

$$\Psi_{II}^*(s, \theta) = C(s) \operatorname{sh} s (\theta - \theta_3) \quad (\theta_3 \leq \theta \leq \theta_1); \quad \Psi_{II}^* = D(s) \operatorname{sh} s (\theta_4 - \theta)$$

$$\quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_4)$$

Положим

$$A(s) \operatorname{sh} s \theta_1 - D(s) \operatorname{sh} s \theta_4 - f^* = E_1(s) \quad (\theta_5 = |\theta_3 - \theta_1|, \theta_6 = \theta_4 - \theta_1)$$

$$B(s) \operatorname{sh} s \theta_2 - C(s) \operatorname{sh} s \theta_5 - f^* = E_2(s)$$

$$sA(s) \operatorname{ch} s \theta_1 + sD(s) \operatorname{ch} s \theta_6 - F^* = E_3(s)$$

$$-sB(s) \operatorname{ch} s \theta_2 - sC(s) \operatorname{ch} s \theta_5 - F^* = E_4(s) \quad (3.5)$$

Можно показать, что  $E_1 = E_2$ ,  $E_3 = E_4$ . Для неизвестных  $E_1$  и  $E_3$ , используя условия (3.3), получаем систему парных уравнений

$$\int_0^\infty s^3 (1 + s^2) \operatorname{cth} \pi s E_{1,3}(s) F(s, -u) \, ds = 0 \quad (a_0 \leq u < \infty)$$

$$\int_0^\infty \frac{s^2 (1 + s^2) F(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s} [sK_1(s) (E_1(s) + f^*) + (1 + \delta_3(s)) (E_3(s) + F^*)] \, ds = 0 \quad (3.6)$$

$$\int_0^\infty \frac{s^2 (1 + s^2) F(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s} [(1 + \delta_1(s)) (E_1(s) + f^*) + sK_2(s) (E_3(s) + F^*)] \, ds = 0 \quad (0 \leq u \leq a_0)$$

$$\begin{aligned}
 K_1(s) &= \frac{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{ch} s\theta_6}{\operatorname{sh} s(\theta_1 + \theta_6)} - \frac{\operatorname{sh} s\theta_2 \operatorname{ch} s\theta_5}{\operatorname{sh} s(\theta_2 + \theta_5)} \\
 K_2(s) &= \frac{\operatorname{sh} s\theta_6 \operatorname{ch} s\theta_1}{\operatorname{sh} s(\theta_1 + \theta_6)} - \frac{\operatorname{sh} s\theta_5 \operatorname{ch} s\theta_2}{\operatorname{sh} s(\theta_2 + \theta_5)} \\
 \delta_1(s) &= \frac{\operatorname{ch} s\theta_1 \operatorname{ch} s\theta_6}{\operatorname{sh} s(\theta_1 + \theta_6)} + \frac{\operatorname{ch} s\theta_2 \operatorname{ch} s\theta_5}{\operatorname{sh} s(\theta_2 + \theta_5)} - 1 \\
 \delta_3(s) &= \frac{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_6}{\operatorname{sh} s(\theta_1 + \theta_6)} + \frac{\operatorname{sh} s\theta_2 \operatorname{sh} s\theta_5}{\operatorname{sh} s(\theta_2 + \theta_5)} - 1
 \end{aligned}$$

Эта система уравнений принципиально ничем не отличается от системы (2.14) предыдущего пункта, причем  $E_1$  соответствует  $C(s)$ , а  $E_3 - D(s)$ . Поэтому, полагая

$$E_1(s) = s^{-1} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin s\tau \, d\tau, \quad E_3(s) = s^{-1} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau \, d\tau \quad (3.7)$$

получим по аналогии с (2.20)

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\infty} sF_1(s, -u) \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau \, d\tau \, ds = R_1(u) \\
 &\int_0^{\infty} sF_1(s, -u) \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin s\tau \, d\tau \, ds = R_2(u) \\
 R_1(u) &= r_1 - \int_0^{\infty} s^2 f^*(1 + \delta_3(s)) F_1(s, -u) \, ds - \int_0^{\infty} s\delta_3(s) F_1(s, -u) \times \\
 &\times \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau \, d\tau \, ds - \int_0^{\infty} s \operatorname{cth} \pi s K_1(s) F_1(s, -u) \left[ s^2 F^* + s^{-1} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin s\tau \, d\tau \right] ds \\
 R_2(u) &= r_2 - \int_0^{\infty} s^4 F^*(1 + \delta_1(s)) F_1(s, -u) \, ds - \int_0^{\infty} sF_1(s, -u) \delta_1(s) \times \\
 &\times \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin s\tau \, d\tau \, ds - \int_0^{\infty} s \operatorname{cth} \pi s F_1(s, -u) K_2(s) \, ds.
 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$r_1$  и  $r_2$  — неопределенные постоянные.

Дальнейший путь решения уравнений (3.8) практически не отличается от решения уравнений (2.20).

Поступило 9 IV 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
2. Морс М. Топологические методы в теории функций комплексного переменного. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
3. Красносельский М. А. и др. Векторные поля на плоскости. М., Физматгиз, 1963.
4. Ентов В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
5. Ентов В. М. О парных интегральных уравнениях, возникающих в задачах фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.