

УДК 532.546+532.529

О ФИЛЬТРАЦИИ ТРЕХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ (МОДЕЛЬ БАКЛЕЯ — ЛЕВЕРЕТТА)

Б. В. ШАЛИМОВ

(Москва)

Баклей и Леверетт [1] сформулировали задачу о вытеснении несмешивающихся жидкостей в пористой среде и получили весьма простое одномерное решение для двухфазного течения. Известны его различные обобщения [2]. В [3, 4] предложено метод характеристик для численного решения задачи о трехфазном течении. В [5, 6] рассмотрена задача о нагнетании (при заданном давлении) двух несжимаемых жидкостей в пористый пласт, первоначально насыщенный некоторой третьей, упругой жидкостью. Авторы исходили из предположения о существовании для этой задачи зон трех-, двух- и однофазного течения, разделенных неизвестными подвижными границами. В данной работе исследуется решение для трехфазного течения, аналогичное решению Баклея — Леверетта для двух фаз. Показано, что характер распределения насыщенностей существенно зависит от начального насыщения пористого пласта и фазового состава нагнетаемой смеси.

1. Постановка задачи. Рассмотрим фильтрацию трех вязких, несжимаемых и взаимно несмешивающихся жидкостей в пористой среде без учета массовых сил и капиллярных давлений между фазами. Уравнения неразрывности и обобщенного закона Дарси для каждой фазы ($i = 1, 2, 3$) имеют вид

$$m(x)S(x)\frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + \frac{\partial Q_i}{\partial x} = 0, \quad Q_i = -k(x)S(x)\frac{f_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1) \quad (1.2)$$

Из уравнений (1.1) с учетом (1.2) следует:

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q(t), \quad Q_i = Q(t)F_i(\sigma_1, \sigma_2) \quad (1.3)$$

$$F_i = \frac{f_i}{\mu_i} \left(\frac{f_1}{\mu_1} + \frac{f_2}{\mu_2} + \frac{f_3}{\mu_3} \right)^{-1} \quad (1.4)$$

Здесь μ_i , σ_i , f_i , Q_i — вязкость, насыщенность, относительная проницаемость и объемный расход i -й жидкости; $m(x)$, $k(x)$, $S(x)$ — пористость, абсолютная проницаемость и площадь поперечного сечения пласта, p — давление.

Экспериментальные функции f_i можно обычно аппроксимировать следующим образом:

$$f_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \left(\frac{\sigma_i - \sigma_i^*}{1 - \sigma_i^*} \right)^{\omega_i} g_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (1.5)$$

$$\sigma_i \geq \sigma_i^*, \quad \omega_i > 1, \quad g_i \neq 0$$

Здесь ω_i — константы, σ_i^* — «связанные» насыщенности ($f_i \equiv 0$ при $\sigma_i \leq \sigma_i^*$; условия $\sigma_1 \geq \sigma_1^*$, $\sigma_2 \geq \sigma_2^*$, $\sigma_1 + \sigma_2 \leq 1 - \sigma_3^*$ определяют область трехфазного течения), g_i — дифференцируемые функции, например многочлены ($g_i \rightarrow 1$ при $\sigma_i \rightarrow 1$).

Помимо суммарного расхода $Q(t)$ зададим соотношения расходов фаз $Q_i/Q = \gamma_i = \text{const}$. Из уравнений $F_i(\sigma_1, \sigma_2) = \gamma_i$ определим граничные значения насыщенностей $\sigma_i(+0, t) = \sigma_i^0 = \text{const}$. Начальные распределения насыщенностей $\sigma_i(x, 0) = \sigma_i^\infty = \text{const}$.

Задача относительно насыщенностей автомодельна. Подстановка $\sigma_i = \sigma_i(\xi)$ приводит к следующей краевой задаче ($i = 1, 2$):

$$\xi \frac{d\sigma_i}{d\xi} = \frac{dF_i(\sigma_1, \sigma_2)}{d\xi}, \quad \sigma_i(0) = \sigma_i^0, \quad \sigma_i(\infty) = \sigma_i^\infty \quad (1.6)$$

$$\xi = \int_0^x m(x) S(x) dx \left(\int_0^t Q(t) dt \right)^{-1} \quad (1.7)$$

Уравнения (1.6) после дифференцирования образуют квазилинейную систему

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} - \xi \right) \frac{d\sigma_1}{d\xi} + \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_2} \frac{d\sigma_2}{d\xi} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1} \frac{d\sigma_1}{d\xi} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2} - \xi \right) \frac{d\sigma_2}{d\xi} = 0 \quad (1.8)$$

Определитель ее обращается в нуль на поверхностях $\xi = \xi^+(\sigma_1, \sigma_2)$ и $\xi = \xi^-(\sigma_1, \sigma_2)$

$$2\xi^\pm = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2} \right) \pm \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2} \right)^2 + 4 \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_2} \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1} \right]^{1/2} \quad (1.9)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда ξ^+ и ξ^- вещественны и $\xi^+ \geq \xi^- \geq 0$. Для этого необходимо выполнение следующего условия гиперболичности исходной системы [3, 4]:

$$H = \left(\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2} \right)^2 + 4 \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_2} \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1} \geq 0 \quad (1.10)$$

Частными решениями системы (1.8) будут прямые $\sigma_1(\xi) \equiv \text{const}$, $\sigma_2(\xi) \equiv \text{const}$, параллельные оси ξ и пересекающие поверхности ξ^+ и ξ^- . Нетривиальные решения возможны лишь вдоль поверхностей ξ^+ и ξ^- , на которых система (1.8) с учетом (1.9) принимает вид (верхний знак для ξ^+ , нижний — для ξ^-).

$$a_{i1}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 + a_{i2}(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_2 = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (1.11)$$

$$2a_{11} = K \mp \sqrt{H}, \quad 2a_{22} = -K \mp \sqrt{H}$$

$$a_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_2}, \quad a_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_1}, \quad K = \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_1} - \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_2}$$

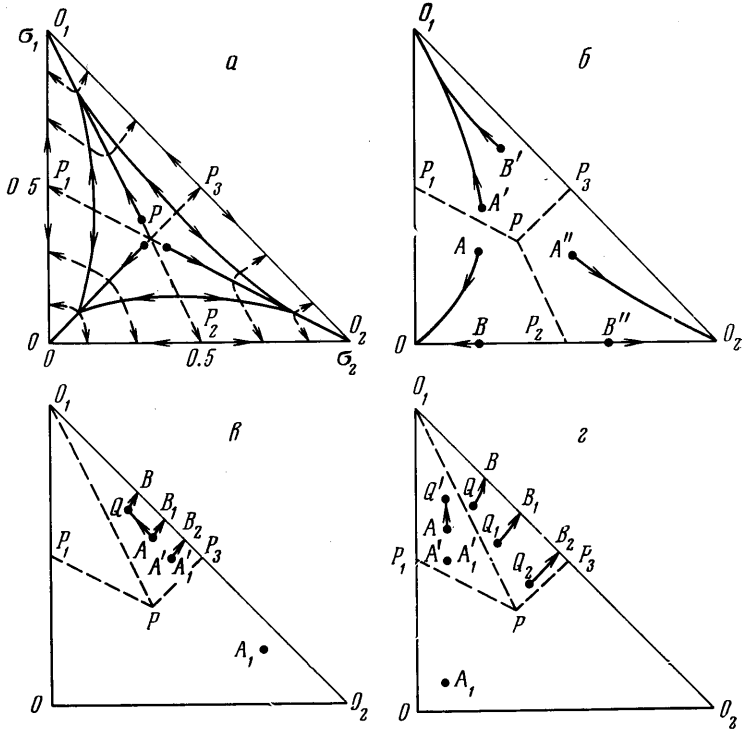
В точках, где $H > 0$, по крайней мере один из коэффициентов a_{11} , a_{22} отличен от нуля, ибо $a_{11}^2 + a_{22}^2 = K^2 + H \neq 0$. Пусть для определенности $a_{11} \neq 0$. Тогда из двух зависимых уравнений (1.11) воспользуемся первым, которое можно записать в виде $d\sigma_1/d\sigma_2 = -a_{12}/a_{11}$. Правая часть его непрерывна и имеет (при $H \neq 0$) конечную производную по σ_1 . Следовательно, по теореме существования и единственности решения, через каждую точку (σ_1, σ_2) области трехфазного течения, в которой $H \neq 0$, проходит по одной интегральной кривой для верхней и нижней поверхностей, которые назовем характеристиками и обозначим соответственно s^+ и s^- . Если вдоль s^+ от A до B $\xi = \xi^+(\sigma_1, \sigma_2)$ изменяется монотонно, то на отрезке $[\xi^+(A), \xi^+(B)]$ оси ξ определены однозначные распределения $\sigma_i = \sigma_i^+(\xi; AB)$; аналогично, если вдоль s^- от A до B $\xi = \xi^-(\sigma_1, \sigma_2)$ изменяется монотонно, то на отрезке $[\xi^-(A), \xi^-(B)]$ оси ξ определены однозначные рас-

предела $\sigma_i = \sigma_i^-(\xi; AB)$. Распределения σ_i^+ и σ_i^- наряду с тривиальными — частные решения системы (1.8).

Для выяснения качественной картины и возможности разрешимости исходной задачи рассмотрим модельную трехфазную систему, приняв

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \quad f_i = \sigma_i^2 \quad (\sigma_i^* = 0 \quad \omega_i = 2, \quad g_i = 1)$$

На фиг. 1, а изображено поле характеристик для модельной системы: сплошными линиями — s^+ , пунктирными — s^- . Стрелками показано направ-



ление убывания ξ вдоль характеристик. Особыми являются точки P, O, O_1, O_2 , в которых $H(\sigma_1, \sigma_2) = 0$. В них соприкасаются поверхности ξ^+ и ξ^- . Через P проходят сепаратрисы PO, PO_1, PO_2 для s^+ и PP_1, PP_2, PP_3 для s^- . Вдоль s^+ и s^- соответственно ξ^+ и ξ^- монотонно убывают от максимального значения на сепаратрисе противоположного семейства до нуля на границе области.

Рассмотрим решения исходной задачи для различных взаимных положений начальной и граничной точек.

2. Нагнетание одной жидкости в трехфазную смесь. Начальное насыщение пористого пласта характеризуется произвольной точкой A области трехфазного течения (фиг. 1, б). Нагнетанию одной жидкости соответствуют точки O, O_1, O_2 , через которые проходят характеристики s^+ . Характеристики s^- не используются при построении решения.

Для точек A и O , лежащих на характеристике s^+ , вдоль которой ξ^+ монотонно убывает в направлении AO , существует непрерывное решение

$$\sigma_i(\xi) = \begin{cases} \sigma_i^+(\xi; OA) & (0 \leq \xi \leq \xi^+(A)) \\ \sigma_i(A) & (\xi^+(A) \leq \xi < \infty) \end{cases} \quad (2.1)$$

Для точек A и O_1 непрерывное решение невозможно из-за немонотонности ξ^+ вдоль соединяющей их характеристики s^+ , которая приводит к не-

однозначным распределениям σ_i . Построим разрывное решение, переходя скачком из точки A в точку A' на характеристике s^+ , вдоль которой ξ^+ монотонно убывает в направлении $A'O_1$

$$\sigma_i(\xi) = \begin{cases} \sigma_i^+(\xi; O_1A') & (0 \leq \xi < \xi^+(A')) \\ \sigma_i(A) & (\xi^+(A') < \xi < \infty) \end{cases} \quad (2.2)$$

На скачке $\xi = \xi' = \xi^+(A')$, по разные стороны которого $\sigma_i = \sigma_i^\infty$ (точка A) и $\sigma_i = \sigma_i'$ (точка A'), имеем уравнения объемного баланса жидкостей ($i = 1, 2$)

$$(\sigma_i' - \sigma_i^\infty)\xi' = F_i(\sigma_i', \sigma_2') - F_i(\sigma_i^\infty, \sigma_2^\infty) \quad (2.3)$$

Относительно σ_i' и σ_2' получаем систему трансцендентных уравнений

$$\xi^+(\sigma_i', \sigma_2') = \frac{F_1(\sigma_i', \sigma_2') - F_1(\sigma_i^\infty, \sigma_2^\infty)}{\sigma_i' - \sigma_i^\infty} = \frac{F_2(\sigma_i', \sigma_2') - F_2(\sigma_i^\infty, \sigma_2^\infty)}{\sigma_2' - \sigma_2^\infty} \quad (2.4)$$

Для точек A и O_2 , которые нельзя соединить характеристикой s^+ , возможно лишь разрывное решение, аналогичное предыдущему. Положение скачка и насыщенности на нем (точка A'') удовлетворяют тем же уравнениям. На фиг. 1, б изображены точки A, A' и A'' (а также B, B' и B'') и проходящие через них характеристики s^+ , на которых стрелками показано направление убывания ξ^+ .

3. Нагнетание двух жидкостей в трехфазную смесь. Фазовый состав нагнетаемой смеси двух жидкостей характеризуется точкой на границе области трехфазного течения. Достаточно в силу симметрии области рассмотреть кусок границы O_1P_3 (фиг. 1, в, г).

1. A — начальная, B — граничная точки (фиг. 1, в). Через них проведем характеристики s^+ и s^- до пересечения в точке Q . При этом ξ^+ вдоль AQ и ξ^- вдоль QB монотонно убывают и $\xi^-(Q) < \xi^+(Q)$. Следовательно, существует непрерывное решение

$$\sigma_i(\xi) = \begin{cases} \sigma_i^-(\xi; BQ) & (0 \leq \xi \leq \xi^-(Q)) \\ \sigma_i(Q) & (\xi^-(Q) \leq \xi \leq \xi^+(Q)) \\ \sigma_i^+(\xi; QA) & (\xi^+(Q) \leq \xi \leq \xi^+(A)) \\ \sigma_i(A) & (\xi^+(A) \leq \xi < \infty) \end{cases} \quad (3.1)$$

2. A — начальная, B_2 — граничная точки (фиг. 1, г). Использование для построения решения характеристики s^+ , проходящей через A , приводит к неоднозначности в распределениях насыщенностей. Введем скачок $\xi = \xi'$, по одну сторону которого $\sigma_i = \sigma_i^\infty$ (точка A), а по другую $\sigma_i = \sigma_i'$ (точка A'). На скачке имеют место уравнения объемного баланса жидкостей (2.3). Из них следует, что точка A' лежит на кривой, описываемой уравнением

$$\frac{F_1(\sigma_i', \sigma_2') - F_1(\sigma_i^\infty, \sigma_2^\infty)}{\sigma_i' - \sigma_i^\infty} = \frac{F_2(\sigma_i', \sigma_2') - F_2(\sigma_i^\infty, \sigma_2^\infty)}{\sigma_2' - \sigma_2^\infty} \quad (3.2)$$

Пересечение этой кривой с характеристикой s^- , проходящей через B_2 , определяет точку A' . Подставляя σ_i' в одно из уравнений (2.3), находим ξ' , причем $\xi^-(A') < \xi'$. Разрывное решение для точек A и B_2 имеет вид

$$\sigma_i(\xi) = \begin{cases} \sigma_i^-(\xi; B_2A') & (0 \leq \xi \leq \xi^-(A')) \\ \sigma_i(A') & (\xi^-(A') \leq \xi < \xi') \\ \sigma_i(A) & (\xi' < \xi < \infty) \end{cases} \quad (3.3)$$

3. A — начальная, B — граничная точки (фиг. 1, z). Через них проведем характеристики s^+ и s^- . Из-за немонотонности ξ^- вдоль s^- переход с s^+ на s^- возможен лишь скачком. На скачке $\xi = \xi' = \xi^-(Q)$, по одну сторону которого $\sigma_i = \sigma_i^-$ (точка Q на s^-), а по другую — $\sigma_i = \sigma_i'$ (точка Q'), выполняются условия ($i = 1, 2$)

$$(\sigma_i^- - \sigma_i') \xi' = F_i(\sigma_i^-, \sigma_2^-) - F_i(\sigma_i', \sigma_2') \quad (3.4)$$

Из них следуют два трансцендентных уравнения

$$\xi^-(\sigma_1^-, \sigma_2^-) = \frac{F_1(\sigma_1^-, \sigma_2^-) - F_1(\sigma_1', \sigma_2')}{\sigma_1^- - \sigma_1'} = \frac{F_2(\sigma_1^-, \sigma_2^-) - F_2(\sigma_1', \sigma_2')}{\sigma_2^- - \sigma_2'} \quad (3.5)$$

которые точке Q ставят в соответствие точку Q' . При движении Q вдоль s^- точка Q' описывает кривую, которая при некотором Q пересекается с s^+ в точке Q' , причем ξ^+ вдоль AQ' и ξ^- вдоль QB монотонно убывают, а $\xi^-(Q) < \xi^+(Q')$. Следовательно, имеет место разрывное решение

$$\sigma_i(\xi) = \begin{cases} \sigma_i^-(\xi; BQ) & (0 \leq \xi < \xi^-(Q)) \\ \sigma_i(Q') & (\xi^-(Q) < \xi \leq \xi^+(Q')) \\ \sigma_i^+(\xi; Q'A) & (\xi^+(Q') \leq \xi \leq \xi^+(A)) \\ \sigma_i(A) & (\xi^+(A) \leq \xi < \infty) \end{cases} \quad (3.6)$$

4. A — начальная, B_2 — граничная точки (фиг. 1, z). Предыдущее решение становится неоднозначным из-за возрастания ξ^+ вдоль характеристики s^+ , проходящей через A . Введем скачок $\xi = \xi'$, по разные стороны которого $\sigma_i = \sigma_i^\infty$ (точка A) и $\sigma_i = \sigma_i'$ (точка A'). Из условий (2.3) следует, что A' лежит на кривой s' , описываемой уравнением (3.2). Введем далее скачок $\xi = \xi^-(Q_2)$, по разные стороны которого $\sigma_i = \sigma_i'$ (точка A') и $\sigma_i = \sigma_i^-$ (точка Q_2 на s^-). Из условий (3.4) следует, что A' лежит на кривой s'' , описываемой уравнениями (3.5). Пересечение кривых s' и s'' определяет точки A' и Q_2 , причем $\xi^-(Q_2) < \xi'$. Следовательно, имеем решение с двумя разрывами

$$\sigma_i(\xi) = \begin{cases} \sigma_i^-(\xi; B_2Q_2) & (0 \leq \xi < \xi^-(Q_2)) \\ \sigma_i(A') & (\xi^-(Q_2) < \xi < \xi') \\ \sigma_i(A) & (\xi' < \xi < \infty) \end{cases} \quad (3.7)$$

5. A_1 — начальная, B — граничная точки (фиг. 1, v, z). Вдоль характеристики s^+ , проходящей через A_1 , распределения σ_i неоднозначны. Перейдем скачком из A_1 в точку A на характеристике s^+ . Положение скачка $\xi = \xi^+(A)$ и насыщенности на нем (точка A) определяются уравнениями (2.4). Далее строим соответственно непрерывное решение AQB или разрывное $AQ'QB$.

6. A_1 — начальная, B_2 — граничная точки (фиг. 1, v, z). Предыдущие решения становятся неоднозначными, так как после скачка из A_1 в A ξ^+ возрастает вдоль характеристики s^+ , проходящей через A . Для этих точек решения строятся так же, как решения (3.3) и (3.7) для точек A и B_2 .

При изменении взаимных расположений начальной и граничной точек полученные решения естественным образом переходят одно в другое, и в частности в решения двухфазной задачи. При $B \rightarrow B_1$ и $B_2 \rightarrow B_1$ (фиг. 1, v, z) приходим к предельному решению, разделяющему распределения одного типа от другого. В случае нагнетания двух жидкостей в трехфазную

смесь распределения $\sigma_i(\xi)$ не обязательно монотонные. Так, в решении (3.7) $\sigma_3(\xi)$ монотонно растет от 0 до $\sigma_3(Q_2)$, затем на первом фронте скачком поднимается до $\sigma_3(A') > \sigma_3(Q_2)$ и на втором фронте скачком падает до $\sigma_3(A) < \sigma_3(A')$ — образуется «вал» вытесняемой жидкости.

Аналогичные расчеты были сделаны для трехфазной системы газ — вода — нефть с относительными проницаемостями, приведенными в [7]. Качественная картина оказалась такой же, как для модельной системы. Была рассчитана нефтеотдача пласта, первоначально насыщенного нефтью и «связанными» газом и водой, при нагнетании газо-водяной смеси с различными объемными соотношениями фаз. Характерно следующее. Небольшое содержание воды в смеси приводит к существенному увеличению нефтеотдачи по сравнению с вытеснением газом. Для некоторых соотношений фаз (содержание газа $\sim 6\%$) нефтеотдача при вытеснении смесью выше, чем при вытеснении водой (и тем более газом). Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-3М.

Автор благодарит А. А. Боксермана, В. Л. Данилова и А. К. Курбанова за обсуждение.

Поступило 14 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Buckley S., Leverett M. C. Mechanism of fluid displacement in sands. Trans. AIME, 1942, vol. 146, pp. 107—115.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967 гг.). М., «Наука», 1969.
3. Стклянин Ю. И., Чарный И. А. Движение трехкомпонентной жидкости в пористой среде. НТС по добыче нефти, вып. 9. М., «Недра», 1960.
4. Стклянин Ю. И. Движение смеси трех жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 5.
5. Филинов М. В. Фильтрация трехкомпонентной смеси в неоднородной пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 3.
6. Филинов М. В., Рохлин И. М. К исследованию фильтрации многофазной жидкости в пористой среде. Тр. МИНХ и ГП им. И. М. Губкина, вып. 79, М., «Недра», 1969.
7. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.