

УДК 532.529.5

К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ДУГИ

А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

(Чебоксары)

Предложен метод построения бесквадратурного решения линейной задачи об обтекании безграничным потоком дуги кривой $y_n = f(x)$, производная которой $f'(x) = g(x)$ при $x = z$ представляет собой мероморфную функцию в плоскости $z = x + iy$. Для дуги параболы, обтекаемой с развитой и частичной кавитацией, получены удобные конечные формулы и проведены числовые расчеты. Аналогичным методом можно построить бесквадратурное решение ряда других задач (глиссирование, решетка и др.).

1. Описание метода. Пусть дуга с ординатой $y_n = f(x)$ имеет единичную хорду и обтекается безграничным потоком идеальной несжимаемой и невесомой жидкости. Производная $f'(x) = g(x)$ при $x = z$, по предположению, является мероморфной функцией в плоскости z . Функции $f(x)$, $g(x)$, угол α между вектором скорости на бесконечности и осью x и число кавитации σ считаются малыми величинами.

При этих допущениях задача может быть линеаризована и сведена к отысканию функции возмущенной скорости $\omega(z) = u - iv$ в плоскости z с разрезом по следующим граничным условиям, выполняемым на берегах разреза ($y = 0$):

на смачиваемых участках дуги

$$v = g(x) \quad (1.1)$$

на границах каверны

$$u = 0$$

В бесконечно удаленной точке

$$\omega(z = \infty) = -\sigma/2 - \alpha i \quad (1.2)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Omega(z) = \omega(z) + ig(z) \quad (1.3)$$

которая в силу условий (1.1) принимает действительные значения на смачиваемых участках и чисто мнимые — на границах каверны. Вне разреза функция $\Omega(z)$ мероморфна. Ее главная часть определяется главной частью функции $ig(z)$. Отобразив с помощью дробно-рациональной функции $z(\zeta)$ плоскость z на верхнюю полуплоскость ζ , придем к смешанной краевой задаче для мероморфной функции $\Omega(\zeta)$, принимающей на некоторых интервалах действительной оси чисто мнимые значения на смежных интервалах — действительные. Решение полученной краевой задачи легко может быть найдено по видоизмененной формуле Келдыша — Седова [1] и будет свободно от интегралов.

На примере обтекания дуги параболы

$$y_n = ax^2 + cx \quad (1.4)$$

проиллюстрируем изложенный метод. Рассмотрим последовательно два режима течения: развитой и частичной кавитации.

2. Обтекание дуги параболы с развитой кавитацией. На фиг. 1 показана дуга параболы, обтекаемая с развитой кавитацией. Длина разреза l в плоскости z соответствует длине каверны. Отображая при помощи функции

$$\zeta = \sqrt{z/(l-z)} \tag{2.1}$$

плоскость z с разрезом на верхнюю полуплоскость ζ , приходим к смешанной краевой задаче для функции (1.3)

$$\Omega(\zeta) = \omega(\zeta) + ci + 2aiz(\zeta) \tag{2.2}$$

со следующими граничными условиями:

$$\text{Im}\{\Omega(\zeta)\} = 0 \text{ на интервале } (-b, 0), \eta = 0 \tag{2.3}$$

$$\text{Re}\{\Omega(\zeta)\} = 0 \text{ на интервалах } (-\infty, -b), (0, \infty), \eta = 0 \tag{2.4}$$

$$b = (l-1)^{-1/2} \tag{2.4}$$

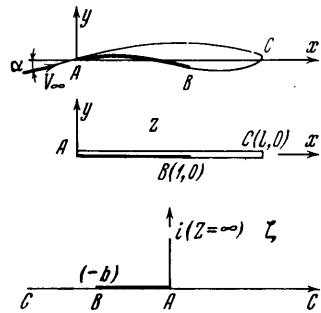
Зависимость $z(\zeta)$ определяется из (2.1)

$$z(\zeta) = l\zeta^2(1 + \zeta^2)^{-1} \tag{2.5}$$

Легко установить, что в точке $\zeta = i$, соответствующей бесконечно удаленной точке $z = \infty$, а также в точке C ($\zeta = \infty$) замыкания каверны функция $\Omega(\zeta)$ имеет простые полюса. Кроме того, в точке A ($\zeta = 0$) отрыва струй с передней кромки [2] функции $\omega(\zeta)$ и, следовательно, $\Omega(\zeta)$ обращаются в бесконечность вида $\zeta^{-1/2}$; в точке $\zeta = -b$ — ограничены.

Функция $\Omega(\zeta)$ определяется формулой Келдыша — Седова [1]

$$\Omega(\zeta) = i \left(\frac{\zeta + b}{\zeta} \right)^{1/2} \left[A\zeta + B + \frac{C + iD}{\zeta - i} + \frac{C - iD}{\zeta + i} \right] \tag{2.6}$$



Фиг. 1

Заметим, что если $f(x)$ является степенной функцией N -го порядка, то функция $\Omega(\zeta)$ в точке $\zeta = i$ будет иметь полюс $N - 1$ -го порядка и, следовательно, в квадратных скобки (2.6) вместо последних двух слагаемых войдет сумма вида

$$\sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{C_k + iD_k}{(\zeta - i)^k} + \frac{C_k - iD_k}{(\zeta + i)^k} \right) \tag{2.7}$$

Функция возмущенной скорости

$$\omega(\zeta) = \Omega(\zeta) - ic - 2aiz(\zeta) \tag{2.8}$$

содержит пять неизвестных постоянных A, B, C, D и b . Для их определения имеем:

условие ограниченности функции $\omega(\zeta)$ в точке $\zeta = i$

$$\lim_{\zeta \rightarrow i} \{\omega(\zeta) (\zeta - i)\} = 0 \tag{2.9}$$

условие (1.2) и условие замкнутости каверны

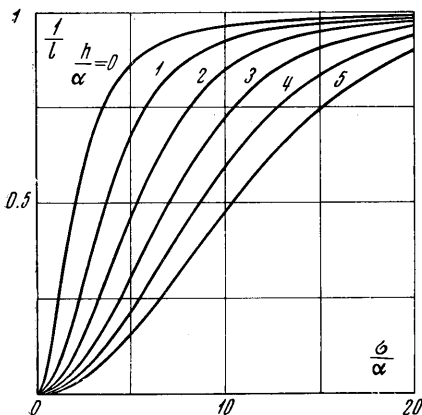
$$\text{Im} \left\{ \oint_{\zeta=i} \omega \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \right\} = 0 \tag{2.10}$$

Из первого условия (2.9) следует:

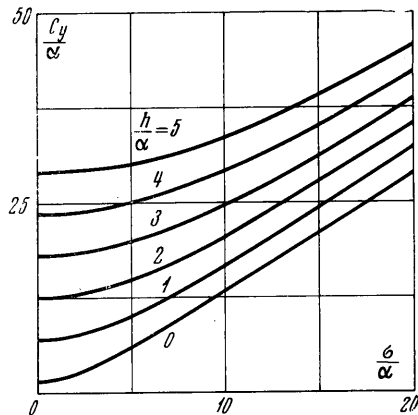
$$C + iD = al \sin^{1/2} \frac{\gamma}{2} \left(\sin \frac{\gamma - \pi}{4} + i \cos \frac{\gamma - \pi}{4} \right) \quad (2.11)$$

где вновь введенный параметр γ связан с параметром b и длиной каверны l формулами

$$b = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}, \quad l = \cos^{-2} \frac{\gamma}{2} \quad (2.12)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Из условия (1.2) с учетом (2.11) несложно найти постоянные A и B

$$\begin{aligned} A &= \sin^{1/2} \frac{\gamma}{2} \left[(\alpha - c) \sin \frac{\gamma - \pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\gamma - \pi}{4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{al}{2} \left(2 \sin \frac{\gamma - \pi}{4} + \cos \frac{\gamma}{2} \cos 3 \frac{\gamma - \pi}{4} \right) \right] \\ B &= \sin^{1/2} \frac{\gamma}{2} \left[(c - \alpha) \cos \frac{\gamma - \pi}{4} + \frac{\sigma}{2} \sin \frac{\gamma - \pi}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{al}{2} \left(4 \cos \frac{\gamma - \pi}{4} - \cos \frac{\gamma}{2} \sin 3 \frac{\gamma - \pi}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

Условие замкнутости (2.10) после вычисления интеграла и подстановки соотношений (2.11) — (2.13) приводит к следующему уравнению относительно параметра γ :

$$\sigma = 2(\alpha - c) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - a \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \frac{2 + 3 \sin^{1/2} \gamma}{2 + \sin^{1/2} \gamma} \quad (2.14)$$

Коэффициент подъемной силы

$$\begin{aligned} C_y &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \oint_{\zeta=i} \omega \frac{dz}{d\zeta} d\zeta \right\} = \\ &= \pi \left[\frac{\alpha - c}{\sin^{1/2} \gamma (1 + \sin^{1/2} \gamma)} - \frac{a(4 + 7 \sin^{1/2} \gamma + 4 \sin^2 \gamma)}{4 \sin^{1/2} \gamma (1 + \sin^{1/2} \gamma)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

В частности, для симметричной дуги параболы со стрелой прогиба h , уравнение кривой задается формулой

$$y_n = -4hx^2 + 4hx \tag{2.16}$$

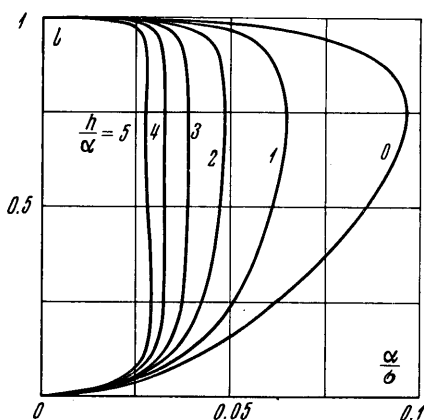
Подставляя $a = -4h$, $c = 4h$ в (2.14) и (2.15), получаем

$$\sigma = 2a \operatorname{ctg}^{1/2}\gamma + 4h \cos^{1/2}\gamma (1 + \sin^{1/2}\gamma)^{-1} \tag{2.17}$$

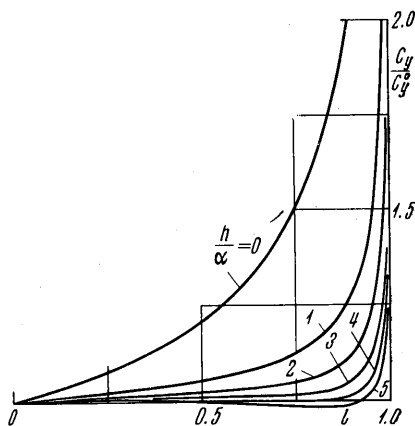
$$C_v = \frac{\pi a}{\sin^{1/2}\gamma (1 + \sin^{1/2}\gamma)} + \pi h \frac{3 + 4 \sin^{1/2}\gamma}{(1 + \sin^{1/2}\gamma)^2} \tag{2.18}$$

На фиг. 2 и фиг. 3 представлены кривые зависимости $1/l$ и C_v/a от отношения σ/a для различных значений h/a , вычисленные соответственно по формулам (2.17) (2.18).

3. Обтекание дуги параболы с частичной кавитацией. При частичной кавитации длина каверны l меньше длины хорды дуги и поэтому в плоско-



Фиг. 4



Фиг. 5

сти z дуге с каверной соответствует разрез единичной длины. Отображая при помощи функции

$$\zeta = \sqrt{z / (1 - z)} \tag{3.1}$$

плоскость z с разрезом на верхнюю полуплоскость ζ , получаем для искомой функции $\Omega(\zeta)$ (2.2) следующие граничные условия:

$$\operatorname{Re} \{ \Omega(\zeta) \} = 0 \quad \text{на интервале } (0, b), \quad \eta = 0 \tag{3.2}$$

$$\operatorname{Im} \{ \Omega(\zeta) \} = 0 \quad \text{на интервалах } (-\infty, 0), (b, \infty), \quad \eta = 0$$

$$b = (l / (1 - l))^{1/2}$$

Зависимость $z(\zeta)$ находится из (3.1)

$$z(\zeta) = \zeta^2 (1 + \zeta^2)^{-1} \tag{3.3}$$

В отличие от п.2 функция $\Omega(\zeta)$ при частичной кавитации [2] ограничена на бесконечности $\zeta = \infty$ и имеет интегрируемую особенность в точке $\zeta = b$. Следовательно, согласно формуле Келдыша — Седова [1]

$$\Omega(\zeta) = \left(\frac{\zeta - b}{\zeta} \right)^{1/2} \left[\frac{A}{\zeta - b} + B + \frac{C + iD}{\zeta - i} + \frac{C - iD}{\zeta + i} \right] \tag{3.4}$$

Неизвестные параметры, A , B , C , D и b по-прежнему могут быть найдены из условий (1.2), (2.9) и (2.10).

Опуская промежуточные вычисления, которые аналогичны п.2, приведем окончательные формулы для числа кавитации

$$\sigma = 2(\alpha - c) \frac{1 + \sin^{1/2}\gamma}{1 - \sin^{1/2}\gamma} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} - a \frac{2 + 3 \sin^{1/2}\gamma - \sin^{3/2}\gamma}{1 - \sin^{1/2}\gamma} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \quad (3.5)$$

и для коэффициента подъемной силы частично кавитирующей дуги

$$C_y = \pi \left[(\alpha - c) \left(1 + \frac{1}{\sin^{1/2}\gamma} \right) - \frac{a(1 + \sin^{1/2}\gamma)^2(4 - \sin^{1/2}\gamma)}{4 \sin^{1/2}\gamma} \right] \quad (3.6)$$

Равенство (3.5) служит уравнением для определения неизвестного параметра γ , который связан с длиной каверны l и параметром b соотношениями

$$l = \cos^2 \frac{1}{2}\gamma, \quad b = \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\gamma \quad (3.7)$$

Для рассмотренной в п.2 симметричной дуги параболы (2.16) формулы (3.5) и (3.6) преобразуются к виду

$$\sigma = 2\alpha \frac{1 + \sin^{1/2}\gamma}{1 - \sin^{1/2}\gamma} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + 4h \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \cos \frac{\gamma}{2} \quad (3.8)$$

$$C_y = \pi \left[\alpha \left(1 + \frac{1}{\sin^{1/2}\gamma} \right) + h \left(1 + \sin \frac{\gamma}{2} \right) \left(3 - \sin \frac{\gamma}{2} \right) \right] \quad (3.9)$$

Последние формулы находятся в согласии с результатами работы [3], в которой частично кавитирующая симметричная дуга параболы была рассмотрена несколько иными методами.

Результаты численных расчетов, выполненных по формулам (3.8), (3.9), представлены на фиг. 4 и фиг. 5. На фиг. 4 изображена зависимость длины каверны l от отношения α/σ для некоторых значений h/a . Зависимость отношения C_y/C_y° от длины каверны l и отношения h/a показана на фиг. 5, где $C_y^\circ = C_y(\gamma = \pi) = 2\alpha + 4h$.

Из рассмотрения кривых видно, что при фиксированном α минимальное число кавитации, при котором еще возможен режим частичной кавитации, растет с увеличением прогиба h . Кроме того, с ростом отношения h/a кривая $l(\alpha/\sigma)$ становится круче и может иметь вертикальные касательные в трех точках, т. е. на большем интервале l малым изменениям α/σ соответствуют большие изменения длины каверны l . Физически это может соответствовать неустойчивости течения. Можно полагать, что при образовании каверны с выпуклой стороны с увеличением прогиба профиля или с уменьшением угла атаки нарушается устойчивость течения, т. е. при достаточно большом отношении h/a нельзя вообще получить стационарный режим частичной кавитации.

Поступило 30 XI 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Терентьев А. Г. К решению смешанной краевой задачи. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 1, стр. 57—60.
2. Tulin M. P. Supercavitating flows — small — perturbation theory. В сб. «Приложение теории функций в механике сплошной среды», т. 2, М., «Наука», 1965, стр. 403—439.
3. Geurst J. A., Verbrugh P. J. A note on camber effects of a partially cavitating hydrofoil. Internat. Ship. Progr., 1959, vol. 6, No. 61, pp. 409—414.