

УДК 532.517.3

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКА С ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГОМ ПО ОТНОШЕНИЮ К КОНЕЧНЫМ ВОЗМУЩЕНИЯМ

В. Г. ЛУЩИК

(Москва)

Простейший подход к исследованию вопроса об устойчивости потока по отношению к конечным возмущениям состоит в определении баланса энергии возмущения с целью выяснения условий, при которых энергия такого возмущения будет возрастать или убывать во времени (так называемый «энергетический метод»).

Имеется ряд работ, достаточно полный обзор которых содержится в [1, 2], где для произвольных возмущений определялось критическое число Рейнольдса  $R_*$  при течениях в каналах. Полученные величины  $R_*$  примерно на порядок и более отличаются от опытных значений, что свидетельствует о недостатках энергетического метода в том виде, в котором он использовался в этих работах. Анализ, проведенный в [1, 2], показал, что энергетический баланс произвольного возмущения, удовлетворяющего только уравнению неразрывности и граничным условиям, но не являющимся решением уравнений движения, не описывает никакого динамически возможного реального движения и, таким образом, не может дать точного значения  $R_*$ , а «годится лишь для получения весьма предварительных грубых оценок этой величины» [2].

Первая попытка в устранении упомянутых недостатков энергетического метода была предпринята В. Б. Левиным, который на основании полуэмпирического замыкания упрощенных уравнений баланса энергии возмущений получил для течения в круглой трубе в отсутствие магнитного поля величину  $R_* > 500$  [3], а затем рассмотрел случай течения в трубе в продольном магнитном поле [4].

В данной статье предлагается дальнейшее развитие энергетического метода в рамках полуэмпирического подхода с обобщением на случай течения электропроводной жидкости в продольном магнитном поле. В качестве примера использования метода рассмотрено течение в струйном пограничном слое и в трубе.

**1. Основные соотношения.** Рассмотрим условия устойчивости простейшего плоского течения несжимаемой жидкости с линейным изменением скорости  $U_1 = U$  в направлении оси  $x_2 = y$ , на которое наложено статистически однородное поле возмущений. Можно предположить, что устойчивость потока по отношению к конечным возмущениям зависит от масштаба возмущений  $l$ , средней кинетической энергии (интенсивности) возмущений  $e$ , от  $dU/dy$ , коэффициента вязкости  $\mu$  и плотности жидкости  $\rho$ .

Из перечисленных величин можно построить два безразмерных критерия, соответствующих числу Рейнольдса и безразмерному волновому числу возмущений в линейной теории устойчивости

$$R_l = (dU/dy) l^2 \rho \mu^{-1} \quad (1.1)$$

$$r = e^{1/2} l^{-1} (dU/dy)^{-1} \quad \left( e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \langle u_i^2 \rangle \right) \quad (1.2)$$

(где  $R_l$  — локальное число Рейнольдса<sup>1</sup>,  $r$  — число Рейнольдса возмущений), в плоскости которых области устойчивых и неустойчивых режимов должны разделяться некоторой кривой.

<sup>1</sup> Впервые локальное число Рейнольдса было введено в работах Л. Г. Лойцянского.

В случае, когда жидкость электропроводная (с коэффициентом электропроводности  $\sigma$ ) и на течение наложено постоянное продольное (в направлении оси  $x_1 = x$ ) магнитное поле (с индукцией  $B$ ), появляется еще один критерий — локальное число Стюарта

$$S_l = \sigma r^{-1} B^2 (dU/dy)^{-1}. \quad (1.3)$$

Для составления баланса энергии возмущений воспользуемся магнито-гидродинамическими уравнениями для тензора напряжений возмущенного движения [5], которые в рассматриваемом случае допускают значительные упрощения. Во-первых, вследствие того что поле возмущений предполагается однородным, а среднее течение имеет постоянный градиент скорости, члены, описывающие конвективный перенос и диффузию энергии возмущений в уравнениях для тензора напряжений возмущенного движения будут отсутствовать. Во-вторых, будем рассматривать стационарное возмущенное движение, считая, что развитие (или затухание) возмущений во времени происходит достаточно медленно, т. е. в каждый момент времени имеется равенство между подводом и диссипацией энергии возмущений с учетом перераспределения ее вдоль осей координат.

Принимая для членов, описывающих обмен энергией между различными компонентами возмущений скорости и диссипацию (вязкую и джоулеву) энергии возмущений, соответствующие полуэмпирические соотношения [5, 6]<sup>1</sup>, получим замкнутую систему уравнений для тензора напряжений возмущенного движения [5], на основании которой можно составить баланс энергии возмущений

$$E_+ - E_- = 0 \quad (1.4)$$

Здесь  $E_+$  и  $E_-$  представляют собой соответственно подвод энергии от среднего движения и диссипацию (вязкую и джоулеву) энергии возмущений, которые после перехода к безразмерным критериям (1.1) — (1.3) будут иметь следующий вид:

$$E_+ = \frac{2(k-c)r^3}{3(kr + c_1/R_l + 2\zeta\alpha_0 S_l)(kr + c_1/R_l + \zeta\alpha_0 S_l)} \quad (1.5)$$

$$E_- = r^2(cr + c_1/R_l + \vartheta\zeta\alpha_0 S_l) \quad (1.6)$$

Здесь  $k$ ,  $c$ ,  $c_1$ ,  $\alpha_0$  — эмпирические константы из замыкающих соотношений [5, 6]<sup>2</sup>, причем  $k$  и  $c$  выражаются через  $\xi_0$  согласно [5] в виде

$$\frac{k}{c} = \frac{\xi_0 + 2}{\xi_0 - 1}, \quad k = \left[ \frac{8}{(\xi_0 + 2)(\xi_0 - 1)} \right]^{1/4}$$

$$\zeta = (\xi_0 + \xi_{0/2}) / (\xi + \xi_{1/2}), \quad \vartheta = 4 / (\xi + 2)$$

где  $\xi_0$  — отношение квадратов скоростей возмущений  $\langle u_1^2 \rangle / \langle u_2^2 \rangle$  ( $u_3 = u_2$ ) в отсутствие магнитного поля ( $S_l = 0$ ), а  $\xi$  — в магнитном поле;  $\xi = \xi(\alpha_0 S_l)$  в соответствии с [5].

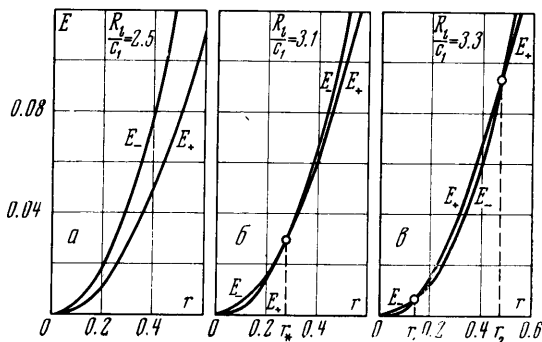
Возможность потери устойчивости потока при некоторых значениях локальных чисел Рейнольдса  $R_l$  и Стюарта  $S_l$  определяется соотношением между подводимой  $E_+$  и теряемой энергией  $E_-$  в зависимости от величины  $r$ , характеризующей возмущение заданного масштаба и энергии.

<sup>1</sup> Предполагается, что эти соотношения, полученные для развитого турбулентного течения, остаются справедливыми и для возмущенного движения при переходе к турбулентности.

<sup>2</sup> Константа  $\alpha_0$  связана с постоянной  $\alpha$  в выражении для джоулевой диссипации [6] соотношением  $\alpha_0 = \alpha / (\xi_0 + \xi_{0/2})$ .

Рассмотрим (фиг. 1) для простоты случай отсутствия магнитного поля ( $S_i = 0$ ,  $\xi = \xi_0 = 2$ ), поскольку характер перехода от ламинарного режима течения к турбулентному от этого не изменится. Если при всех  $r$  (фиг. 1, а)  $E_- > E_+$ , то возмущения, очевидно, будут затухать, и течение будет устойчивым по отношению к любому возмущению. Если  $E_- < E_+$  при  $r_1 < r < r_2$ , но  $E_- > E_+$  при  $r < r_1$  и  $r > r_2$  (фиг. 1, в), то возмущения с  $r < r_1$  будут затухать, но при  $r > r_1$  будут возрастать, пока их характеристики не достигнут равновесного значения  $r_2$ .

В этом случае течение будет устойчивым по отношению к малым (но конечным) возмущениям, но неустойчивым по отношению к большим возмущениям (так называемый «жесткий» механизм развития возмущений [2]). При  $R_i \rightarrow \infty$  величина  $r_1 \rightarrow 0$  и течение будет неустойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям, т. е. абсолютно неустойчивым, а характеристики возмущений практически всегда будут соответствовать значению  $r = r_2$  (так называемый режим «мягкого» самовозбуждения [2]). Наконец, возможна такая ситуация (фиг. 1, б), когда  $E_- > E_+$  при всех  $r$ , за исключением  $r = r_*$ , при котором  $E_- = E_+$ ; этот режим соответствует нижнему критическому числу Рейнольдса  $R_{i*}$ .



Фиг. 1

Если изобразить зависимость  $r = r(R_i)$ , следующую из (1.4) с учетом (1.5), (1.6)

$$\frac{2}{3}(k - c)r = \left( cr + \frac{c_1}{R_i} + \theta \zeta a_0 S_i \right) \left( kr + \frac{c_1}{R_i} + 2 \zeta a_0 S_i \right) \left( kr + \frac{c_1}{R_i} + \zeta a_0 S_i \right) \tag{1.7}$$

то получим в плоскости  $(r, R_i)$  некоторую кривую (фиг. 2), соответствующую нейтральной кривой в линейной теории устойчивости. Однако в данном случае нижняя ветвь кривой разделяет область устойчивых и неустойчивых режимов течения; верхняя ветвь соответствует режиму развитой турбулентности, наступающему после потери устойчивости. Касательная (параллельная оси  $r$ ) к этой кривой определяет нижнее критическое число Рейнольдса  $R_{i*}$ , при котором любые возмущения затухают. В предельном случае очень больших значений  $R_i$  ( $R_i \rightarrow \infty$ ) кривая ( $S_i = 0$ ) имеет асимптоту

$$r = [2(k/c - 1) / 3k^2]^{1/2}$$

а в случае малого уровня возмущений ( $r \ll 1$ ) зависимость  $r$  от  $R_i$  имеет вид

$$r = [2/3(k - c) (R_i / c_1)^3]^{-1}$$

Отметим то обстоятельство, что нижняя ветвь кривой  $r = r(R_i)$  иллюстрирует экспериментально подтвержденный факт [2] затягивания перехода к турбулентности с уменьшением уровня начальных возмущений.

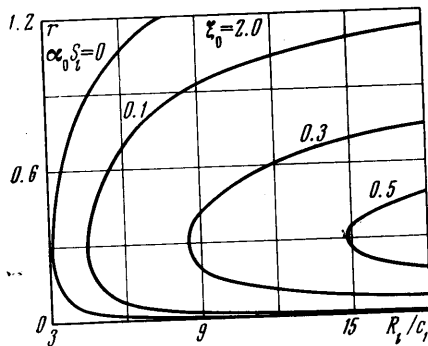
При течении в магнитном поле ( $S_i \neq 0$ ), как видно из фиг. 2, с ростом локального числа Стюарта кривые сдвигаются вправо. При этом нижнее критическое число Рейнольдса возрастает, затягивание перехода к турбулентности (нижние ветви кривых) при фиксированном числе  $R_i$  можно осуществить при более высоком уровне возмущений  $r$ , нежели в отсутствие магнитного поля.

Представляет интерес зависимость локального критического числа Рейнольдса  $R_{i*}$  и соответствующего ему значения  $r_*$  от локального числа Стюарта  $S_i$ . Для построения этих зависимостей необходимо решить систе-

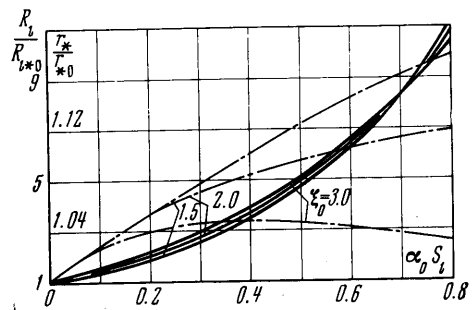
му двух уравнений, первое из которых представляет собой уравнение (1.7), а второе — его производную по  $r$  (что соответствует минимуму функции  $R_l = R_l(r)$ )

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(k-c) - c \left( kr + \frac{c_1}{R_l} + 2\zeta\alpha_0 S_l \right) \left( kr + \frac{c_1}{R_l} + \zeta\alpha_0 S_l \right) - \\ & - k \left( cr + \frac{c_1}{R_l} + \vartheta\zeta\alpha_0 S_l \right) \left( kr + \frac{c_1}{R_l} + \zeta\alpha_0 S_l \right) - \\ & - k \left( cr + \frac{c_1}{R_l} + \vartheta\zeta\alpha_0 S_l \right) \left( kr + \frac{c_1}{R_l} + 2\zeta\alpha_0 S_l \right) \end{aligned} \quad (1.8)$$

Система уравнений (1.7), (1.8) была решена методом итераций на ЭВМ и графики зависимостей  $R_{l*} / R_{l*0}$  и  $r_* / r_{*0}$  от  $\alpha_0 S_l$ , где  $R_{l*}$  и  $r_{*0}$  — величины, соответствующие случаю отсутствия магнитного поля ( $S_l = 0$ ), для ряда значений  $\xi_0$  пред-



Фиг. 2



Фиг. 3

ставлены на фиг. 3. Как видно, величина критического числа Рейнольдса  $R_{l*}$  (сплошные линии) существенно возрастает с увеличением магнитного поля в отличие от  $r_*$  (штрих-пунктир), изменение которой по сравнению с соответствующей величиной в отсутствие магнитного поля незначительно.

Величины локального критического числа Рейнольдса  $R_{l*0}$  и числа Рейнольдса возмущений  $r_{*0}$  в отсутствие магнитного поля могут быть получены из (1.7) — (1.8) аналитически (см. также [4]) и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} R_{l*0} &= c_1 \left( \frac{1}{4} \frac{\xi_0 + 2}{\xi_0 - 1} \right) \left[ \frac{(\xi_0 - 1)(\omega + 4)}{2\omega} \right]^{1/2} \\ \omega &= \left( \frac{9\xi_0 - 6}{\xi_0 + 2} \right)^{1/2} - 1 \\ r_{*0} &= \frac{c_1}{R_{l*0}} \frac{\omega}{4} \left[ \frac{(\xi_0 + 2)^6}{8(\xi_0 - 1)^3} \right]^{1/4} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Расчеты показывают, что в диапазоне изменения  $\xi_0$  от 1.5 до 3.0 величины  $R_{l*0}$  и  $r_{*0}$ , так же как и при течении в магнитном поле, мало меняются. Это свидетельствует о слабой зависимости критических величин от формы возмущающего движения, в связи с чем в последующих расчетах будет полагаться  $\xi_0 = 2$ .

Напомним, что полученные выше соотношения относятся к случаю течения с постоянным градиентом средней скорости. Если использовать найденные условия устойчивости к течению с  $dU/dy \neq \text{const}$ , то будем определять локальные условия устойчивости в каждой точке потока так, как будто бы везде существовал такой же градиент скорости, как в рассматриваемой точке. При этом найдется такая точка,

где будет максимальное значение локального числа Рейнольдса  $R_l$ , т. е. наихудшие условия устойчивости. Если обеспечить устойчивость течения в этой точке, то при этом «с запасом» будет обеспечена устойчивость во всех точках потока. В действительности запас будет и в указанной «опасной» точке, так как энергия возмущений будет диффундировать (что здесь не учитывается) из области потока, где эти возмущения велики, в области малых возмущений.

Таким образом, полученные здесь соотношения определяют локальные условия устойчивости градиентного течения. Для нахождения условий устойчивости в случае какого-либо конкретного течения необходимо установить связь между локальными и средними характеристиками потока, т. е. знать распределение энергии и масштаба возмущений в потоке, а также профиль скорости интересующего течения.

2. Струйный пограничный слой<sup>1</sup>. Как известно, профиль скорости при течении в пограничном слое смешения спутных струй близок к линейному. Это приводит к однозначной связи локального числа Рейнольдса  $R_l$  (1.1) с числом Рейнольдса, определенным по ширине слоя смешения  $b$  и разности скоростей спутных потоков  $\Delta U = U_1 - U_2$ , вида

$$R_l = \frac{dU}{dy} \frac{l^2 \rho}{\mu} \approx \frac{\Delta U b \rho}{\mu} \left( \frac{l}{b} \right)^2 = R \left( \frac{l}{b} \right)^2 \quad (2.1)$$

Из соотношения (2.1), зная величину локального критического числа Рейнольдса  $R_{l*}$  (см. п.1) и масштаб возмущений  $l/b$ , можно определить значение критического числа Рейнольдса  $R_*$  для течения в слое смешения.

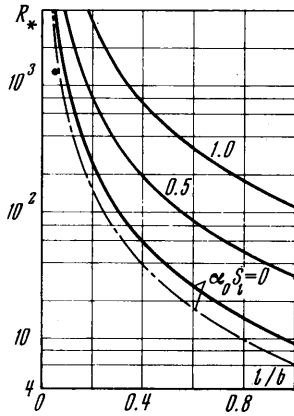
Так, при течении (в отсутствие магнитного поля) в тонких пограничных слоях смешения, близких к тангенциальному разрыву скорости, где масштаб возмущений  $l/b \gg 1$ , критическое число Рейнольдса  $R_*$  (напомним, что по данным п.1  $R_{l*0} = 5 \div 10$  для различных значений констант  $\xi_0$  и  $c_1$ ) составляет величину  $\sim 1$ . Таким образом, течение в слое смешения неустойчиво уже вблизи кромки, разделяющей спутные потоки, что находится в согласии с результатами линейной теории устойчивости [2] и с экспериментом [7].

Если организовать течение в слое смешения таким образом, чтобы начальный масштаб возмущений был намного меньше, чем ширина слоя со сдвигом скорости, то, как следует из (2.1), критическое число Рейнольдса должно возрасти. Это соответствует затягиванию перехода к турбулентности при снижении уровня начальных возмущений (нижние ветви кривых на фиг. 2).

В работе О. И. Навознова и А. А. Павельева [7] был поставлен эксперимент (в отсутствие магнитного поля), в котором течение в слое смешения было организовано при помощи специального устройства с переменным по радиусу гидравлическим сопротивлением (хонейкомба). Слой смешения имел ширину 7 мм, а начальный масштаб возмущений (приблизительно равный эквивалентному размеру стержней квадратной решетки с таким же размером ячейки и пористостью, что и хонейкомб) составлял 0.37 мм. Таким образом, в эксперименте  $l/b \approx 0.05$ , а число Рейнольдса, при котором еще не наблюдался переход к турбулентности в пределах длины участка измерений (составляющем 60 размеров слоя со сдвигом), равнялось  $1.25 \cdot 10^3$ .

Экспериментальная точка вместе с кривыми для зависимости переходного числа Рейнольдса от масштаба возмущений в соответствии с (2.1) для значений  $c_1 = 3$  (штрих-пунктир) и  $c_1 = 2$  (сплошные линии) представлены на фиг. 4. Как видно, совпадение расчета для  $S_l = 0$  с экспериментом неплохое, однако отсутствие опытных данных для  $R_*$  в широком диапазоне значений начальных возмущений  $l/b$  позволяет сделать лишь предварительный вывод о правомочности рассматриваемого подхода и заставляет апробировать его (см. п.3) для случая течения в трубе, для которого имеется достаточное количество экспериментальных данных.

При течении в магнитном поле критическое число Рейнольдса повышается (фиг. 4) по сравнению с течением в отсутствие магнитного поля при том же значении  $l/b$ , либо появляется возможность снижения требования малости начального масштаба возмущений для достижения некоторой величины  $R_*$ . Представленные на



Фиг. 4

<sup>1</sup> При исследовании устойчивости струйного пограничного слоя предположение стационарности возмущенного движения достаточно сильное и не всегда может выполняться в реальных течениях. Поэтому полученные в п.2 результаты надо расценивать скорее как качественные, нежели количественные.

фиг. 4 кривые, соответствующие случаю течения в магнитном поле, зависят от локального числа Стюарта  $S_l$ , которое в рассматриваемом случае будет равно числу Стюарта, определенному по ширине слоя смешения и разности скоростей спутных потоков, т. е.

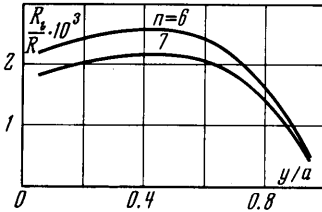
$$S_l = \frac{\sigma B^2}{\rho} \left( \frac{dU}{dy} \right)^{-1} \approx \frac{\sigma B^2 b}{\rho \Delta U} = S$$

**3. Течение в трубе.** Рассмотрим вначале случай, когда магнитное поле отсутствует. Из анализа экспериментальных результатов по течению в трубах следует, что переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит (см., например, [8]) в довольно узком диапазоне чисел  $R$ . Этот факт наводит на мысль о возможности определения нижнего критического числа Рейнольдса, исходя из условий существования (с энергетической точки зрения) развитого турбулентного движения, характеристики которого (профиль скорости и масштаб возмущений) известны. Полученное таким образом значение  $R_*$  должно превышать критическое число Рейнольдса перехода от ламинарного режима течения к турбулентному.

В случае развитого турбулентного течения профиль скорости в трубе описывается известным выражением

$$U / U_m = (1 - y/a)^{1/n}, \quad (3.1)$$

где  $U_m$  — скорость на оси трубы,  $a$  — радиус трубы, показатель степени  $n = n(R)$  (по данным Никурадзе [8],  $n = 6$  для  $R = 4 \cdot 10^3$ ,  $n = 7$  для  $R = 10^5$ ). Связь между числом Рейнольдса  $R$ , определенным по средней скорости течения в трубе  $\bar{U}$  и диаметру трубы  $d = 2a$ , и локальным числом Рейнольдса  $R_l$  (1.1) для профиля скорости (3.1) будет иметь вид



Фиг. 5

$$\frac{R_l}{R} = \frac{(n+1)(2n+1)(l/a)^2}{4n^3(1-y/a)^{1-1/n}} \quad (3.2)$$

в качестве масштаба возмущений  $l$  будем использовать путь смешения по Прандтлю — Никурадзе

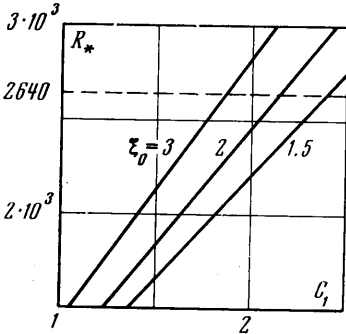
$$\frac{l}{a} = 0.14 - 0.08 \left( \frac{y}{a} \right)^2 - 0.06 \left( \frac{y}{a} \right)^4 \quad (3.3)$$

соответствующий реальному развитому турбулентному течению [8].

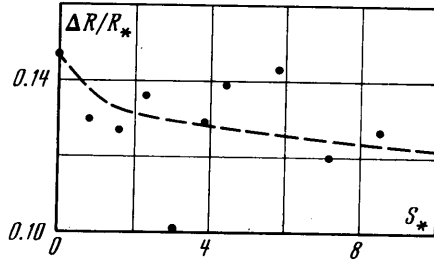
График зависимости  $R_l/R$  (3.2) от  $y/a$  с учетом (3.3) для  $n=6,7$  представлен на фиг. 5, где максимумы кривых (при  $y/a \approx 0.5$ ) соответствуют минимальным критическим числам Рейнольдса, при которых возможно существование развитого турбулентного течения. Как видно, распределение локального числа Рейнольдса по радиусу трубы довольно пологое, что соответствует экспериментально установленному факту перехода к турбулентному режиму течения одновременно по всему сечению трубы.

Зная величину локального критического числа Рейнольдса  $R_{*}$  течения с поперечным сдвигом (на основании результатов п. 1), нетрудно определить значение критического числа Рейнольдса  $R_*$  для течения в трубе. На фиг. 6 для  $n=6$  и ряда значений  $\xi_0$  (в данном случае коэффициент анизотропии турбулентности) представлена зависимость  $R_*$  от эмпирической константы  $c_1$  в выражении для вязкой диссипации энергии возмущений, предложенном Рота [6]. Следует отметить, что величина  $c_1$  теоретически определена [6] лишь для случая изотропной турбулентности, где она составляет  $c_1 = 5/4\pi = 3.927$ . В реальных турбулентных потоках значение  $c_1$  будет меньше указанной величины. Так, в работе В. Б. Левина [3] из

условий совпадения расчетного профиля скорости в трубе с экспериментальным определена величина локального критического числа Рейнольдса на границе вязкого подслоя ( $R_{l*} = 6.74$ ), что позволяет в соответствии с (1.9) для каждого значения  $\xi_0$  выбрать величину  $c_1$ . На фиг. 6 пунктирная линия соответствует  $R_{l*} = 6.74$ , что приводит к значению  $R_* = 2640$ .



Фиг. 6



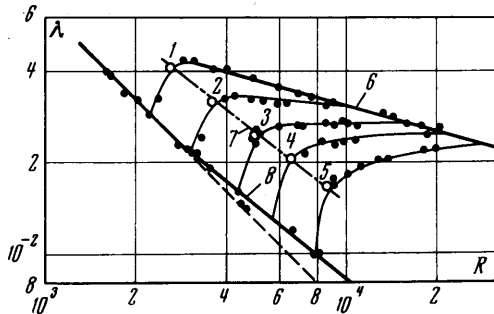
Фиг. 7

Таким образом, полученное значение критического числа Рейнольдса, как ожидалось, несколько превышает экспериментальную величину ( $R_* \approx 2300$ ), но все же достаточно близко к ней, чтобы убедиться в приемлемости рассматриваемого подхода к исследованию устойчивости течения с поперечным сдвигом по отношению к конечным возмущениям.

Перейдем теперь к случаю течения в продольном магнитном поле. Имеющаяся литература по этому вопросу (см. обзор в [9]) в основном содержит результаты измерения средних характеристик течения: коэффициента сопротивления и профиля скорости, по которым весьма затруднительно судить о характере и размерах области перехода от ламинарного режима к турбулентному (или наоборот). Лишь появившиеся недавно работы [10, 11] внесли ясность в этот вопрос, а именно было установлено, что продольное магнитное поле затягивает переход от ламинарного режима течения к турбулентному (повышает критическое число Рейнольдса), переход носит кризисный характер, а также на основании термоанемометрических измерений коэффициента перемежаемости [10] для ряда значений индукции магнитного поля была определена область чисел  $R$ , в которой происходит переход.

На фиг. 7 представлены результаты обработки экспериментальных данных [10] по зависимости относительной величины области перехода  $\Delta R / R_*$  от критического значения числа Стюарта  $S_* = H^2 / R$ . Здесь  $\Delta R = R_1 - R_*$ , где  $R_1, R_*$  — числа Рейнольдса, соответствующие коэффициентам перемежаемости  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 0$  при фиксированном числе Гартмана  $H$ . Как видно, область перехода к турбулентному режиму течения с ростом числа  $S_*$  (величины индукции магнитного поля) не возрастает в отсутствие поля. Можно даже заметить некоторую тенденцию к сужению области перехода (пунктир).

Таким образом, в магнитном поле, так же как и в отсутствие его, переход от ламинарного режима течения к турбулентному происходит в относительно узком диапазоне чисел  $R$  ( $\Delta R / R_* < 0.14$ ). Однако в отличие от обычной гидродинамики в магнитном поле переход к турбулентности ( $\gamma = 1$ ) не означает перехода к развитому турбулентному движению, соответствующему закону Блазуса. В подтверждение сказанного на фиг. 8 представлены результаты работы [10] по зависимости коэффициента сопротивления  $\lambda$  от числа  $R$  для ряда значений числа  $H$  (кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям числа Гартмана  $H = 0, 50, 100, 150, 200$ ). Светлые точки



Фиг. 8

на фиг. 8 соответствуют концу перехода к турбулентности при фиксированном значении числа  $H$ . Как видно, указанные точки с ростом числа  $H$  все более удаляются от кривой 6, соответствующей закону Блазиуса, и, кроме того, через них можно провести линию 7, которая будет приблизительно параллельна кривой 8, соответствующей нестабилизированному ламинарному течению.

Таким образом, при течении в трубе в присутствии магнитного поля существует область (между кривыми 6 и 7) установившегося квазитурбулентного режима течения (с  $\gamma = 1$ ), расширяющаяся с ростом числа  $H$ . Течение в этой области, хотя и турбулентное, но отличается от развитого турбулентного движения, соответствующего закону Блазиуса.

С точки зрения определения критического числа Рейнольдса перехода в рамках изложенного выше энергетического метода необходимо знать характеристики (профиль скорости и масштаб возмущений) соответствующего квазитурбулентного режима течения, описываемого кривой 7. Поскольку в настоящее время отсутствуют теоретические и экспериментальные результаты, позволяющие получить указанные характеристики течения, выполним оценку критического числа Рейнольдса при течении в трубе в продольном магнитном поле для двух предельных случаев. В первом случае будем считать, что течение на линии 7 (фиг. 8) развитое турбулентное, т. е. имеет профиль скорости (3.1) и масштаб возмущений (3.3). Во втором случае предположим, что профиль скорости параболический, т. е.  $U/U_m = 1 - (y/a)^2$ , а масштаб возмущений по-прежнему возьмем в виде (3.3). Можно ожидать, что характеристики реального течения в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному будут соответствовать некоторому промежуточному случаю.

В силу предположения о постоянстве характеристик течения на линии 7, соответствующей концу перехода к турбулентности, отношение критического числа Рейнольдса при течении в магнитном поле  $R_*$  к соответствующей величине в отсутствие магнитного поля  $R_{*0}$  определится в виде

$$\frac{R_*}{R_{*0}} = \frac{R_{l*}}{R_{l*0}} \quad (3.4)$$

Здесь  $R_{l*}/R_{l*0}$  — отношение локальных критических чисел Рейнольдса в присутствии и в отсутствие магнитного поля, являющееся функцией локального числа Стюарта  $S_l$ .

Связь между числом Стюарта  $S$ , определенным по средним параметрам течения в трубе ( $S = \sigma B^2 d / \rho \bar{U}$ ), и  $S_l$  в двух рассматриваемых случаях имеет соответственно следующий вид:

$$S = \frac{(n+1)(2n+1)}{n^3(1-y/a)^{4-1/n}} S_l, \quad S = 8 \frac{y}{a} S_l \quad (3.5)$$

Для  $y/a = 0.5$ , что примерно соответствует минимальному критическому числу Рейнольдса (см. фиг. 8)<sup>1</sup>, и  $n = 6$  соотношения (3.5) примут вид

$$S = 0.75 S_l, \quad S = 4 S_l \quad (3.6)$$

Таким образом, из соотношений (3.4), (3.6) с учетом  $R_{l*}/R_{l*0} = f(\alpha_0 S_l)$  (см. п.1) можно получить зависимость критического числа Рейнольдса перехода  $R_*$  от числа Стюарта перехода  $S_*$  при течении в трубе в продольном магнитном поле

дольном магнитном поле. На фиг. 9 представлен график зависимости  $R_*/R_{*0}$  от  $S_*$  для двух предельных случаев (кривые 1 и 2 соответственно). Значение эмпирической постоянной  $\alpha_0$  в зависимости  $R_{l*}/R_{l*0} = f(\alpha_0 S_l)$  при этом взято равным соответствующей величине при турбулентном течении в трубе в продольном магнитном поле [5] ( $\alpha_0 = 0.146$ ). Там же нанесены экспериментальные точки Фрейма и Хейзера [10]. Как видно, опытные данные действительно соответствуют некоторому промежуточному состоянию между кривыми 1 и 2.

Чтобы получить более близкие к действительности результаты, необходимо выполнить детальное исследование характеристик течения в области квазитурбулентного и переходного режима течения. Не располагая такими данными, совпадения расчета с экспериментом можно достичь для каждого из рассмотренных выше случаев путем соответствующего подбора эмпирической константы  $\alpha_0$ .

<sup>1</sup> В случае параболического профиля скорости легко показать, что зависимость  $R_l/R$  также имеет максимум (что соответствует минимальному  $R_*$ ) при  $y/a \approx 0.5$ .



Автор благодарит О. А. Ухлину, выполнившую решение системы уравнений (1.7), (1.8) на ЭВМ, И. Г. Паневина, С. А. Регирера и участников семинара Г. А. Любимова за полезные обсуждения.

Поступило 3 IV 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. О распространении колебаний в вязкой жидкости и возникновении турбулентности. Тр. ЦАГИ, 1938, вып. 345.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1. М., «Наука», 1965.
3. Левин В. Б. О стабилизирующем влиянии вращения потока на турбулентность. Теплофизика высоких температур, 1964, т. 2, № 6.
4. Левин В. Б. О переходе к турбулентности в магнитогидродинамических течениях при конечных возмущениях. Магнитная гидродинамика, 1970, № 3.
5. Ковнер Д. С., Луцки В. Г. О турбулентном течении проводящей жидкости в продольном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
6. Rotta J. Statistische theorie nicht homogener turbulenz, 1. Z. Physik, 1951, Bd 129, Nr 6, S. 547—572.
7. Навознов О. И., Павельев А. А. О переходе к турбулентности в спутных струях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
9. Брановер Г. Г. Турбулентные магнитогидродинамические течения в трубах. Рига, «Зинатне», 1967.
10. Fraim F. W., Heiser W. H. The effect of a strong longitudinal magnetic field on the flow of mercury in a circular tube. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt. 2, p. 397.
11. Генин Л. Г., Жилин В. Г., Манчха С. П. Влияние продольного магнитного поля на устойчивость течения электропроводной жидкости. Теплофизика высоких температур, 1970, № 2.