УДК 532.517.45

О СПЕКТРЕ РАЗВИТОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НЕСЖИМАЕМЫХ УПРУГО-ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В. А. ГОРОДЦОВ

(*Москва*)

Показано, что мелкомасштабные турбулентные движения упруго-вязкой жидкости затухают, как в вязкой жидкости с некоторой эффективной вязкостью, зависящей от масштаба движения. Упругость формоизменения приводит к уменьшению диссипативности турбулентности и тем самым к удлинению высокочастотного хвоста спектра при заданном притоке энергии.

1. Отличительная особенность течений упруго-вязких жидкостей (упругость существенна для течений растворов и расплавов полимеров) состоит в релаксации напряжений и последействии скоростей деформации, т. е. в некоторой «памяти» среды. При их модельном описании необходимы по крайней мере две [1)] константы: коэффициент вязкости ν и время локальной релаксации θ. Соответственно этому движения масштаба l с характерной скоростью v_l будут зависеть от двух безразмерных комплексов: числа Рейнольдса $R_l = v_l l / \nu$ и так называемого числа Вайссенберга $W_l = \theta v_l / l$. Если параметр W_l мал, то движения не будут отличаться от движений вязкой жидкости.

При турбулентном течении жидкости с малой упругостью, когда для основного течения $W = \theta V / L \ll 1$, крупномасштабные движения не испытывают влияния упругости. Тем не менее в развитой турбулентности упругость жидкости может сильно влиять на мелкомасштабные движения, для которых величина параметра W_l достигает единицы. Действительно, используя формулу теории турбулентности [1, 2] вязкой жидкости $l / L \sim \sim (R_l / R)^{3/4}$, где $R = VL / \nu$, получим $W_l \sim W(R / R_l)^{1/2}$. Из этих соотношений видно, что с уменьшением масштаба число Рейнольдса R_l уменьшается, а число Вайссенберга W_l увеличивается. Поскольку для наиболее мелкомасштабных турбулентных движений $R_l \sim 1$, то влияние упругости на турбулентность может стать значительным, когда число $WR^{1/2}$ по порядку величины достигает единицы, т. е. в достаточно развитой турбулентности.

С нелинейным характером релаксации и последействия движущейся упруго-вязкой среды связаны важные гидродинамические особенности. При ее течении напряженное состояние оказывается более сложным, чем в обычной вязкой жидкости, и даже при простом сдвиговом течении появляются неравные нормальные напряжения («эффект нормальных напряжений»). Можно ввести различные вязкости, определяя их как отношения различных напряжений к скоростям деформации, причем такие вязкости будут зависеть от скоростей деформации («неньютоновская вязкость») [2].

---

[1] В дальнейшем жидкости считаются несжимаемыми, а единицы измерения выбираются так, что плотность равняется единице.

[2] Неньютоновская вязкость и эффект нормальных напряжений характерны не только для упруго-вязких жидкостей, но и для таких сред без релаксации, как нелинейно-вязкая жидкость с нелинейной связью между напряжениями и скоростями деформации [2].

В развитой турбулентности меньшим движениям соответствуют, вообще говоря, большие скорости деформации $(\sim v_l/l)$, так что в случае монотонно меняющейся неньютоновской вязкости наиболее сильно будет меняться вязкость мелкомасштабных движений, для которых $1/\theta \sim v_l/l$, т. е. параметр Вайссенберга порядка единицы. Для таких движений можно говорить о некоторой эффективной вязкости, зависящей от масштаба движения. Что касается дополнительных нормальных напряжений, отличных от гидростатического давления и обычных напряжений Рейнольдса, то они увеличиваются с ростом упругости жидкости и также оказывают влияние прежде всего на мелкомасштабные движения.

Распространяя представления теории локально-изотропной турбулентности вязкой жидкости [2] на упруго-вязкую жидкость, можно для спектров кинетической и упругой энергии движений равновесного интервала волновых чисел k написать

$$E_1(k) = \langle\varepsilon\rangle^{2/3}k^{-5/3}f_1(k\eta,\ kl_\theta) \tag{1.1}$$

$$E_2(k) = \langle\varepsilon\rangle^{2/3}l_\theta^2k^{1/3}f_2(k\eta,\ kl_\theta) \tag{1.2}$$

Здесь f_1, f_2 — безразмерные универсальные функции двух переменных $k\eta$ и kl_θ (или $k\eta$ и l_θ/η), $\langle\varepsilon\rangle$ — полная диссипация энергии в тепло [1], $\eta = \nu^{3/4}\langle\varepsilon\rangle^{-1/4}$ — характерная длина диссипативных турбулентных движений и, наконец, $l_\theta = (\nu\theta)^{1/2}$ характеризует размер зоны влияния релаксационного процесса (упругого отклика среды).

В жидкостях с малой упругостью, если $l_\theta \lesssim \eta$, для крупномасштабных равновесных движений $(k\eta \ll 1)$ локальная и вязкая релаксации заканчиваются за время, малое по сравнению со временем жизни движения, и спектр кинетической энергии в инерционном интервале волновых чисел не будет зависеть от упругости среды. Упругость жидкости оказывает существенное влияние прежде всего на мелкомасштабные движения диссипативного интервала, для которых $kl_\theta \gtrsim 1$.

2. Мелкомасштабные турбулентные движения $(k\eta \gg 1)$. Мелкомасштабные диссипативные движения находятся в состоянии равновесия под действием искажающего влияния более крупных движений и диссипации энергии в тепло [2, 3]. Поэтому задачу о поведении таких движений можно свести к задаче о поведении малых возмущений в поле скорости $a_{i\alpha}x_\alpha$. В системе координат, вращающейся вместе с жидкой частицей, тензор a_{ij} — постоянный симметричный тензор скоростей деформации, для главных значений которого

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \qquad 0 < a_1 > a_2 > a_3 < 0 \tag{2.1}$$

Малые пульсации скорости $v_i(\mathrm{x},\ t)$ в системе координатных осей, связанных с главными осями тензора a_{ij}, удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{2.2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a_\alpha x_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) v_i + a_i v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} \tag{2.3}$$

Здесь p — давление, σ_{ij} — тензор напряжений; по повторяющимся индексам, обозначаемым греческими буквами, здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование.

Уравнение для завихренности

$$\omega_i = \delta_{i\alpha\beta}\frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}$$

[1] Теорию локально-изотропной турбулентности можно уточнить, если учесть флуктуации диссипации [2].

давления p не содержит (δ_{ijl} — единичный полностью антисимметричный тензор)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+a_\alpha x_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\omega_i-a_i\omega_i=\delta_{i\alpha\beta}\frac{\partial^2\sigma_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha\partial x_\gamma} \quad (2.4)$$

Чтобы замкнуть рассматриваемую систему уравнений, необходимо найти связь напряжений со скоростями для мелкомасштабных движений, используя определяющие уравнения среды. Для большого класса упруговязких жидкостей определяющие уравнения можно записать в виде операторного соотношения связи между тензором напряжений, тензором скоростей деформации и дифференциальным оператором Яуманна $\Delta/\Delta t$, который действует на тензор τ_{ij} следующим образом:

$$\left(\frac{\Delta\tau}{\Delta t}\right)_{ij}\equiv\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial t}+v_\alpha\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_\alpha}-\frac{1}{2}\omega_\alpha(\delta_{i\alpha\beta}\tau_{\beta j}+\delta_{j\alpha\beta}\tau_{\beta i}) \quad (2.5)$$

Для малых возмущений, наложенных на однородные скорости деформации a_i и однородные напряжения b_{ij}, после линеаризации определяющих уравнений получим уравнения вида

$$L_{ij\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}=M_{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta}+N_{ij\alpha}\omega_\alpha \quad (2.6)$$

в которых операторы L, M, N зависят от тензоров a_{ij}, b_{ij} и дифференциального оператора $\partial/\partial t+a_\alpha x_\alpha\partial/\partial x_\alpha$. Временным изменением величин a_{ij}, b_{ij} пренебрегаем, что можно делать для возмущений $k\gg\eta^{-1}$ и временным масштабом, несоизмеримым с θ. К тому же учет временной зависимости этих величин не меняет качественных результатов (для случая вязкой жидкости см. [2, 3]).

Зависимость от x входит в уравнение (2.6) только через оператор $\partial/\partial t+a_\alpha x_\alpha\partial/\partial x_\alpha$, который возникает при линеаризации оператора Яуманна. Например, после линеаризации $\Delta(a+e)/\Delta t$ и $\Delta(b+\sigma)/\Delta t$ переходят в выражения

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial}{\partial t}+a_\alpha x_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)e_{ij}+\frac{1}{2}\delta_{ij\alpha}(a_j-a_i)\omega_\alpha\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+a_\alpha x_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)\sigma_{ij}+\frac{1}{2}\delta_{ij\alpha}(b_j-b_i)\omega_\alpha\end{gathered} \quad (2.7)$$

причем постоянные b_i можно выразить через a_i, используя определяющие уравнения.

В силу этого решение уравнений (2.2) — (2.4), (2.6) можно искать в виде волны с волновым вектором, зависящим от времени

$$\omega_i(\mathbf{x},t)=\omega_i^\circ(t)\exp[i\mathbf{k}(t)\mathbf{x}],\quad \sigma_{ij}(\mathbf{x},t)=\sigma_{ij}^\circ(t)\exp[i\mathbf{k}(t)\mathbf{x}] \quad (2.8)$$

и т. д., причем уравнения для $\mathbf{k}(t)$

$$\frac{dk_i}{dt}+a_ik_i=0 \quad (2.9)$$

имеют простые решения $k_i(t)=k_{i0}\exp(-a_it)$, согласно которым при больших временах волновой вектор $\mathbf{k}(t)$ асимптотически разворачивается в направлении оси наибольшего сжатия жидкой частицы (третья координатная ось по (2.1)).

Уравнения несжимаемости, количества движения и завихренности (2.2) — (2.4) примут вид

$$k_\alpha v_\alpha^\circ=0 \quad (2.10)$$

$$\left(\frac{d}{dt}+a_i\right)v_i^\circ+ik_ip^\circ=ik_\alpha\sigma_{i\alpha}^\circ \tag{2.11}$$

$$\left(\frac{d}{dt}-a_i\right)\omega_i^\circ=-\delta_{i\alpha\beta}k_\alpha k_\gamma\sigma_{\beta\gamma}^\circ \tag{2.12}$$

К обыкновенному дифференциальному уравнению приведется и линеаризованное определяющее уравнение (2.6)

$$l_{ij\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}^\circ=m_{ij\alpha\beta}e_{\alpha\beta}^\circ+n_{ij\alpha}\omega_\alpha^\circ \tag{2.13}$$

где операторы l, m, n зависят от тензора a_{ij} и оператора d/dt (см. (3.2), (4.12)).

3. Спектр энергии мелкомасштабных движений в жидкости с последействием. Рассмотрим теперь простейшие модели упруговязких жидкостей и прежде всего модели с линейными по σ_{ij}, e_{ij} и $\Delta/\Delta t$ определяющими уравнениями. Такая модель жидкости, пригодная для описания последействия, имеет определяющие уравнения

$$\sigma_{ij}=2\nu e_{ij}+2\nu\theta\left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)_{ij} \tag{3.1}$$

которые для малых возмущений (2.8) примут вид (ср. (2.13))

$$\sigma_{ij}^\circ=2\nu\left(1+\theta\frac{d}{dt}\right)e_{ij}^\circ+\nu\theta(a_j-a_i)\delta_{ij\alpha}\omega_\alpha^\circ \tag{3.2}$$

Используя (2.10), (2.12), (3.2), уравнение для слабой завихренности в поле однородной деформации можно записать

$$\left[\frac{d}{dt}-a_i+\nu k^2(1-2\theta a_\alpha k_\alpha^2k^{-2})(1+\nu\theta k^2)^{-1}\right]\omega_i^\circ=0 \tag{3.3}$$

Отсюда следует, что вектор завихренности при больших временах поворачивается в направлении наибольшего растяжения жидкой частицы.

Рассматривая турбулентные движения с масштабами, меньшими η, будем предполагать, что они успевают приспосабливаться к деформационному полю [2, 3] и можно волновой вектор считать повернутым в направлении наибольшего сжатия $(0,\ 0,\ k)\exp[-a_3t]$, а вектор завихренности — наибольшего растяжения частицы $(\omega^\circ,\ 0,\ 0)\exp[ikx_3]$. При этом уравнения (3.3) упрощаются

$$\frac{1}{\omega^\circ}\frac{d\omega^\circ}{dt}=a_1-\mu(k)k^2 \tag{3.4}$$

$$\mu(k)=\nu(1-2\theta a_3)(1+\nu\theta k^2)^{-1} \tag{3.5}$$

Согласно этим формулам поведение мелкомасштабных движений аналогично их поведению в вязкой жидкости с некоторым эффективным коэффициентом вязкости $\mu(k)$, зависящим от волнового числа. Эффективная вязкость вида (3.5) определяет и затухание турбулентных движений на конечной стадии [4, 5]. Некоторое различие заключается в том, что эффективная вязкость мелкомасштабных движений в развитой турбулентности зависит также от характеристик более крупных движений (a_3) [1].

Для равновесного спектра энергии асимптотически ориентированной завихренности согласно [2, 3] имеем

$$dE/E=-\left\{3+2\left\langle a_3^{-1}\frac{1}{\omega^\circ}\frac{d\omega^\circ}{dt}\right\rangle\right\}dk/k \tag{3.6}$$

[1] Следует отметить, что понятие эффективной вязкости возникает и при анализе развитой турбулентности нелинейно-вязкой жидкости [6].

и в частности в жидкости с последействием, используя (3.4), (3.5), для спектра кинетической энергии мелкомасштабной турбулентности получим

$$E(k) \sim k^{2\sigma-3}(1+k^2 l_\theta^2)^{-2-\alpha\eta^2/l_\theta^2} \qquad (3.7)$$
$$\sigma = -\langle a_1 a_3^{-1}\rangle, \qquad \alpha = -\nu\eta^{-2}\langle a_3^{-1}\rangle$$

где σ и α — числа порядка единицы.

Таким образом, спектр мелкомасштабной турбулентности ($k\eta \gg 1$) в жидкости с последействием имеет степенной характер убывания и лишь при $(kl_\theta)^2 \ll 1$ он сближается с экспоненциальной зависимостью, характерной для вязкой жидкости

$$E(k) \sim k^{2\sigma-3}\exp\left[-\alpha(k\eta)^2\right] \qquad (3.8)$$

Необходимо еще выяснить, как меняются величины η, σ и α при переходе от вязкой жидкости к жидкости с последействием. Изменение $\eta \sim \langle\varepsilon\rangle^{-1/4}$, очевидно, зависит от типа турбулентности. Рассмотрим здесь однородную изотропную турбулентность. При этом $\langle \mathbf{v}\rangle = 0$, а для средних дополнительных напряжений $\langle\sigma_{ij}\rangle$ из (3.1) получим

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \nu\theta\langle\delta_{i\alpha\beta}\omega_\beta e_{\alpha j} + \delta_{j\alpha\beta}\omega_\beta e_{\alpha i}\rangle = 0 \qquad (3.9)$$

В изотропной турбулентности изменение кинетической энергии пульсаций вызывается притоком энергии от внешнего источника (член $\langle f_\alpha v_\alpha\rangle$) и диссипацией энергии в тепло $\langle q\rangle \equiv \langle\sigma_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}\rangle$

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{v_\alpha^2}{2}\right\rangle = \langle f_\alpha v_\alpha\rangle - \langle q\rangle \qquad (3.10)$$

Такое уравнение получается из уравнения сохранения количества движения. Из определяющего уравнения (3.1) получаем соотношение

$$\langle q\rangle = \left(1+\frac{\theta}{2}\frac{d}{dt}\right)\langle\varepsilon_0\rangle \qquad (3.11)$$

$$\varepsilon_0 \equiv 2\nu e_{\alpha\beta}^2 \qquad (3.12)$$

которое показывает, что при росте турбулентности жидкость с последействием оказывается более диссипативной, чем вязкая жидкость с таким же коэффициентом вязкости, а при затухании наоборот. В случае стационарной турбулентности выражения для диссипации в обеих жидкостях совпадают $\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon_0\rangle = 2\nu\langle e_{\alpha\beta}^2\rangle$. Числовые характеристики диссипативных движений σ и α тогда также можно считать одинаковыми и можно видеть, сравнивая (3.7), (3.8), что в жидкости с малым последействием ($l_\theta < \eta$) кинетическая энергия движений с волновыми числами, для которых $k\eta > 2(\alpha + l_\theta^2/\eta^2)^{1/2}$, больше энергии соответствующих движений в вязкой жидкости. Имеется лишь небольшая область $k\eta \sim 1$, при которых спектр жидкости с последействием лежит ниже спектра вязкой жидкости (эта область будет расширяться с ростом упругости жидкости).

Если в модельных уравнениях жидкости с последействием принять во внимание еще квадратичные по скорости деформации члены

$$\sigma_{ij} = 2\nu e_{ij} + 2\nu\theta(\Delta e/\Delta t)_{ij} + 2\varkappa\theta e_{i\alpha}e_{\alpha j}, \qquad (3.13)$$

то при $\varkappa > -\nu$ для асимптотически повернутого поля завихренности получим уравнение (3.4) с эффективной вязкостью

$$\mu(k) = \nu(1-2\theta a_3 - \theta\varkappa\nu^{-1}a_1)(1+\nu\theta k^2)^{-1} \qquad (3.14)$$

Вид спектра мелкомасштабной турбулентности будет отличаться от (3.7) заменой показателя степени $-2-\alpha\eta^2/l_\theta^2$ на $-2-\alpha\eta^2/l_\theta^2+\sigma\varkappa/\nu$. В стационарной изотропной турбулентности

$$\langle q\rangle = 2\nu\langle e_{\alpha\beta}^2\rangle + 2\varkappa\theta\langle e_{\alpha\beta}e_{\beta\gamma}e_{\gamma\alpha}\rangle \tag{3.15}$$

и если корреляция $\langle e_{\alpha\beta}e_{\beta\gamma}e_{\gamma\alpha}\rangle$, как и в вязкой жидкости, отрицательна [1], то согласно (3.15) жидкость типа (3.13) с $\varkappa < 0$ будет более диссипативной, чем обычная вязкая жидкость. Таким образом, добавление членов с коэффициентом вязкости $\varkappa$ приводит как к изменению спектра, так и к изменению интегральных характеристик.

При $(kl_\theta)^2 \ll 1$ спектр такой жидкости будет близок экспоненциальному спектру нелинейно-вязкой жидкости, определяющие уравнения которой получаются из (3.13) при $\nu\theta \to 0$ и конечном $\varkappa\theta$

$$E(k) \sim k^{2\sigma-3}\exp\left[-\alpha(k\eta)^2 + \sigma\varkappa\nu^{-1}(kl_\theta)^2\right] \tag{3.16}$$

Добавление отрицательного при $\varkappa < 0$ слагаемого под знаком экспоненты увеличивает скорость спадания спектра (ср. [6]).

4. Спектр энергии мелкомасштабных движений в жидкости с малой упругостью формоизменения. Несжимаемая упруго-вязкая жидкость со свободной энергией, зависящей квадратичным образом от обратимых деформаций, имеет определяющие уравнения

$$\theta_1\left(\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right)_{ij} + \sigma_{ij} = 2\nu e_{ij} + 2\nu\theta_2\left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)_{ij}, \qquad \theta_1 > \theta_2 > 0 \tag{4.1}$$

которые описывают как релаксацию напряжений, так и последействие [7]. Эти уравнения, вводя «упругие» напряжения s_{ij} и два коэффициента вязкости ν_1, ν_2, удобно писать в другом виде

$$\theta_1\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{ij} + s_{ij} = 2\nu_2 e_{ij}, \qquad s_{ij} = \sigma_{ij} - 2\nu_1 e_{ij} \tag{4.2}$$

$$\nu_1 = \nu\theta_2/\theta_1, \qquad \nu_2 = \nu(1-\theta_2/\theta_1) \tag{4.3}$$

В однородной изотропной турбулентности, как нетрудно убедиться, осредняя (4.1), среднее напряжение $\langle\sigma_{ij}\rangle$ экспоненциально быстро обращается в нуль. Пренебрегая начальным напряжением, для упругой энергии турбулентных движений $\langle w\rangle = \theta_1/(4\nu_2)\langle s_{\alpha\beta}^2\rangle$ из (4.2) получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\langle w\rangle = \langle q\rangle - \langle\varepsilon\rangle \tag{4.4}$$

$$\langle q\rangle = \langle\varepsilon\rangle + \frac{\theta_1}{2}\frac{d}{dt}\langle\varepsilon_2\rangle \tag{4.5}$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon_1\rangle + \langle\varepsilon_2\rangle = 2\nu_1\langle e_{\alpha\beta}^2\rangle + \frac{1}{2\nu_2}\langle s_{\alpha\beta}^2\rangle \tag{4.6}$$

Здесь (4.4), (4.5) — две разных записи одного уравнения. Из (4.4) видно, что изменение упругой энергии происходит за счет диссипации энергии в тепло $\langle\varepsilon\rangle$ и перекачивания в кинетическую энергию $\langle q\rangle$ (см. (3.10)). В стационарной турбулентности вся подводимая энергия диссипирует в тепло и $\langle q\rangle = \langle\varepsilon\rangle$. При росте турбулентности часть энергии запасается в виде упругой энергии формоизменения и $\langle q\rangle$ больше истинной диссипации $\langle\varepsilon\rangle$. Напротив, при затухании турбулентности эта энергия высвобождается и поддерживает течение. Важное свойство рассматриваемой модели жидкости отражается равенством

$$\langle w\rangle = {}^1/_2\theta_1\langle\varepsilon_2\rangle \tag{4.7}$$

из которого следует, что в жидкости с малой упругостью упругая энергия запасается в наиболее мелкомасштабных диссипативных движениях.

Используя неравенство $|\langle s_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}\rangle|^2 \leqslant \langle s_{\alpha\beta}^2\rangle\langle e_{\mu\nu}^2\rangle$, из (4.5) получим

$$\langle\varepsilon_2\rangle + \theta_1\frac{d}{dt}\langle\varepsilon_2\rangle + \frac{\theta_1^2}{2}\left(\frac{d}{dt}\sqrt{\langle\varepsilon_2\rangle}\right)^2 \leqslant \langle\varepsilon_{20}\rangle \tag{4.8}$$

и, в частности, в случае стационарной турбулентности

$$\langle\varepsilon_2\rangle \leqslant \langle\varepsilon_{20}\rangle \equiv 2\nu_2\langle e_{\alpha\beta}^2\rangle$$

т. е. диссипативность жидкости с упругостью не больше, чем вязкой жидкости с таким же коэффициентом вязкости. Чтобы уточнить изменение диссипативности, рассмотрим уравнение

$$\langle\varepsilon_{20}\rangle - \langle\varepsilon_2\rangle - \theta_1\frac{d}{dt}\langle\varepsilon_2\rangle = \frac{\theta_1^2}{2\nu_2}\left\langle\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2_{\alpha\beta}\right\rangle \tag{4.9}$$

которое следует из (4.2). В случае стационарной турбулентности величина $\langle(\Delta s/\Delta t)_{\alpha\beta}^2\rangle$ зависит от уровня упругих напряжений $\langle s_{\alpha\beta}^2\rangle$ и собственного времени турбулентных движений $\langle e_{\alpha\beta}^2\rangle^{-1/2}$. Предполагая, что $\langle(\Delta s/\Delta t)_{\alpha\beta}^2\rangle$ зависит только от этих характеристик, с помощью соображений размерности получим

$$\left\langle\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2_{\alpha\beta}\right\rangle = c^2\langle s_{\alpha\beta}^2\rangle\langle e_{\mu\nu}^2\rangle \tag{4.10}$$

где c — безразмерная постоянная порядка единицы.

Таким образом, в случае стационарной турбулентности

$$\langle\varepsilon_2\rangle = \frac{2\nu_2\langle e_{\alpha\beta}^2\rangle}{1 + c^2\theta_1^2\langle e_{\alpha\beta}^2\rangle} \tag{4.11}$$

и диссипативность может существенно уменьшаться, если отношение времени локальной релаксации ко времени турбулентной релаксации мелкомасштабных диссипативных движений не слишком мало. Уменьшение диссипативности должно приводить к увеличению энергии мелкомасштабных движений по сравнению с турбулентностью вязкой жидкости.

Спектр энергии мелкомасштабных движений при $k\eta \gg 1$ получим, как и в п. 3. Для малых волновых возмущений вида (2.8) определяющие уравнения (4.1) дают уравнения

$$\left(1 + \theta_1\frac{d}{dt}\right)\sigma_{ij}^\circ = 2\nu\left(1 + \theta_2\frac{d}{dt}\right)e_{ij}^\circ + \nu(\theta_1 - \theta_2)(a_i - a_j)\delta_{ij\alpha}\omega_\alpha^\circ \tag{4.12}$$

которые вместе с (2.10), (2.12) позволяют получить для завихренности, ориентированной в направлении наибольшего растяжения жидкой частицы, уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + [q^2(t) - p^2(t)]\varphi = 0 \tag{4.13}$$

где

$$\omega^\circ = \varphi\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\theta_1} + 2a_3 - a_1 + \nu_1 k^2\right)dt\right\} \tag{4.14}$$

$$4p^2 = \left(\frac{1}{\theta_1} + 2a_3 + a_1 + \nu_1 k^2\right)^2, \qquad q^2 = \nu k^2\left(\frac{1}{\theta_1} + 2a_3 + a_1 - \frac{\nu_1}{\nu}a_3\right)$$

причем во всяком случае для $2\theta_1|a_3| < 1$ (слабая упругость) величина $q^2(t)$ положительна ($p^2(t) > 0$ всегда).

Для возмущений с волновыми числами, удовлетворяющими неравенствам $1 \ll k^2 l_{\theta_1}{}^2 \ll \theta_1 / \theta_2$, уравнение (4.13) имеет осциллирующие решения, которые в квазиклассическом приближении можно записать в виде

$$\omega^{\circ 2} \sim \exp\left\{-\int\left(\frac{1}{\theta_1}+2a_3-a_1+\nu_1 k^2\right)dt\right\}\frac{\sin^2\int\sqrt{q^2-p^2}\,dt}{\sqrt{q^2-p^2}} \tag{4.15}$$

После подстановки в (3.6) быстроосциллирующее выражение выпадает при усреднении, и для спектра кинетической энергии получим

$$E(k) \sim k^{\sigma-1-\alpha\eta^2/l_\theta{}^2}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\frac{\theta_2}{\theta_1}k^2\eta^2\right) \tag{4.16}$$

спектр, который в рассматриваемом интервале волновых чисел убывает медленнее, чем спектр для вязкой жидкости.

В других предельных случаях, когда $p^2 > q^2$, мелкомасштабные возмущения будут изменяться плавно, без осцилляций. Определяющим в затухании турбулентных движений с волновыми числами, удовлетворяющими неравенству $k^2 l_{\theta_1}{}^2 \gg \theta_1 / \theta_2$, будет последействие с характерным временем θ_2, и для спектра таких мелкомасштабных движений получается формула, аналогичная (3.7), т. е. имеет место степенная асимптотическая зависимость от волнового числа.

5. Баланс энергии движений различных масштабов в жидкости с упругостью формоизменения. В упруго-вязкой жидкости с определяющими уравнениями (4.2) кинетическая энергия не только диссипируется в тепло, но и переходит в энергию упругих колебаний. Остановимся подробнее на анализе баланса энергии. Будем считать турбулентность изотропной с нулевыми средними характеристиками. Используя для пульсационных полей представления Фурье

$$v_i(\mathbf{x}) = \int v_i(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})\,d^3k, \qquad s_{ij}(\mathbf{x}) = \int s_{ij}(\mathbf{k})\exp(i\mathbf{k}\mathbf{x})\,d^3k \tag{5.1}$$

и т. д., систему уравнений для компонент фурье-пульсаций, поддерживаемых соленоидальной внешней силой, можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_1 k^2\right)v_i(\mathbf{k})+ik_i p(\mathbf{k})+ik_\alpha\{v_\alpha(\boldsymbol{\mu})v_i(\mathbf{k}-\boldsymbol{\mu})-s_{\alpha i}(\mathbf{k})\}=f_i(\mathbf{k}) \tag{5.2}$$

$$k_\alpha v_\alpha(\mathbf{k})=0, \qquad k_\alpha f_\alpha(\mathbf{k})=0 \tag{5.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\theta_1}\right)s_{ij}(\mathbf{k})+ik_\alpha v_\alpha(\boldsymbol{\mu})s_{ij}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\mu})+\frac{1}{2}\omega_\beta(\boldsymbol{\mu})\{\delta_{i\alpha\beta}s_{\alpha j}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\mu})+$$

$$+\delta_{j\alpha\beta}s_{\alpha i}(\mathbf{k}+\boldsymbol{\mu})\}=i\frac{\nu_2}{\theta}\{k_i v_j(\mathbf{k})+k_j v_i(\mathbf{k})\} \tag{5.4}$$

Здесь по повторяющимся аргументам, обозначенным греческой буквой μ, подразумевается интегрирование.

Из уравнений (5.3), (5.4), в частности, следует:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{\theta_1}\right)s_{\alpha\alpha}(\mathbf{k})+ik_\beta v_\beta(\boldsymbol{\mu})s_{\alpha\alpha}(\mathbf{k}-\boldsymbol{\mu})=0$$

так что, пренебрегая начальным изменением, можно считать

$$s_{\alpha\alpha}(\mathbf{k})=0 \tag{5.5}$$

Используя (5.2), (5.3), для пульсаций давления получаем

$$p(\mathbf{k}) = k_\alpha k_\beta k^{-2}\{s_{\alpha\beta}(\mathbf{k}) - v_\alpha(\boldsymbol{\mu}) v_\beta(\mathbf{k}-\boldsymbol{\mu})\} \tag{5.6}$$

Из (5.2) можно получить уравнение для спектрального тензора $\langle v_i(\mathbf{k}) v_j(\mathbf{q})\rangle = R_{ij}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{q})$, из которого в свою очередь следует уравнение для спектра кинетической энергии $E_1(k) = 2\pi k^2 R_{\alpha\alpha}(k)$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_1 = \Phi - 2\nu_1 k^2 E_1 - \Psi + T_1 \tag{5.7}$$

Согласно этому уравнению кинетическая энергия движений с волновым числом k изменяется за счет притока энергии от внешней силы $\Phi(k)$, вязкой диссипации в тепло $2\nu_1 k^2 E_1$, перетока в энергию упругих колебаний $\Psi(k)$ и обмена кинетической энергией с пульсационными движениями с другими волновыми числами $T_1(k)$.

Интегрированием уравнения (5.7) по всем волновым числам получается уравнение (3.10). Член с T_1 выпадает благодаря свойству

$$\int_0^\infty T_1(k)\,dk = 0 \tag{5.8}$$

а между остальными членами уравнений (3.10) и (5.7) имеет место следующее соответствие:

$$\frac{1}{2}\langle v_\alpha{}^2\rangle = \int_0^\infty E_1(k)\,dk, \qquad \langle v_\alpha f_\alpha\rangle = \int_0^\infty \Phi(k)\,dk \tag{5.9}$$

$$\langle q\rangle \equiv \langle \sigma_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}\rangle = \int_0^\infty \Psi(k)\,dk + 2\nu_1 \int_0^\infty E_1(k) k^2\,dk$$

Используя уравнение (5.4), можно получить уравнение для спектрального тензора напряжений $\langle s_{ij}(\mathbf{k}) s_{lm}(\mathbf{q})\rangle = R^{ijlm}(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}+\mathbf{q})$, которое, в частности, для спектральной плотности упругой энергии

$$E_2(k) = \frac{\theta_1}{\nu_2}\pi k^2 R^{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{k}) \tag{5.10}$$

имеет вид уравнения баланса

$$\frac{\partial}{\partial t} E_2 = \Psi - \frac{2}{\theta_1} E_2 + T_2 \tag{5.11}$$

Упругая энергия колебаний с данным волновым числом k изменяется за счет перехода в кинетическую энергию, диссипативного затухания и обмена энергией с другими колебаниями. Член T_2 описывает обмен упругой энергией между движениями с различными волновыми числами

$$\int_0^\infty T_2(k)\,dk = 0 \tag{5.12}$$

Соответствие между различными членами уравнения баланса упругой энергии (4.4) и (5.11) устанавливается при помощи соотношений

$$\langle w\rangle = \int_0^\infty E_2(k)\,dk \tag{5.13}$$

$$\langle \varepsilon\rangle = 2\nu_1 \int_0^\infty k^2 E_1(k)\,dk + \frac{2}{\theta_1}\int_0^\infty E_2(k)\,dk \tag{5.14}$$

Если сложить уравнения (5.7) и (5.11), то получится уравнение баланса суммарной (кинетической и упругой) энергии турбулентных движений с волновым числом k, причем член $\Psi(k)$ автоматически выпадает.

Используя неравенство

$$|\langle s_{\alpha\beta}(\mathbf{k})e_{\alpha\beta}(-\mathbf{k})\rangle|^2 \leqslant \langle|s_{\alpha\beta}(\mathbf{k})|^2\rangle\langle|e_{\mu\nu}(\mathbf{k})|^2\rangle,$$

можно оценить сверху величину $\Psi(k)$

$$|\Psi| \leqslant 2\sqrt{\nu_2\theta_1^{-1}k^2E_1E_2} \leqslant \nu_2k^2E_1 + \theta_1^{-1}E_2 \tag{5.15}$$

При помощи (5.2) — (5.4) можно получить и уравнение для Ψ

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\left(\frac{1}{\theta_1} + \nu_1k^2\right)\Psi + 2\frac{\nu_2}{\theta_1}k^2(E_1 - U) + \Phi^{(s)} + J_1 \tag{5.16}$$

В это уравнение входят такие новые величины, как $\Phi^{(s)}(k)$, описывающая спектральную связь случайной внешней силы с полем напряжений, $J_1(k)$, объединяющая кубические по амплитуде возмущений члены, и, наконец, величина

$$U(k) = 2\pi\theta_1\nu_2^{-1}k_\alpha k_\beta R^{\alpha\gamma\beta\gamma}(\mathbf{k}) \tag{5.17}$$

Уравнение для U можно получить при помощи (5.4) так же, как получено уравнение (5.11)

$$\frac{\partial}{\partial t}U = \Psi - \frac{2}{\theta_1}U + J_2 \tag{5.18}$$

причем $T_2(k)$ из (5.11) и $J_2(k)$ выражаются через один и тот же тензор (ср. (5.10), (5.17))

$$T_2(k) = \pi\theta_1\nu_2^{-1}k^2T^{\alpha\beta\alpha\beta}(\mathbf{k}), \qquad J_2(k) = 2\pi\theta_1\nu_2^{-1}k_\alpha k_\beta T^{\alpha\gamma\beta\gamma}(\mathbf{k}) \tag{5.19}$$

для которого имеет место интегральное соотношение ((5.12) — частный случай)

$$\int_0^\infty T^{ijlm}(\mathbf{k})\,d^3k = 0 \tag{5.20}$$

Спектральные функции $E_2(k)$, $U(k)$ (T_2, J_2), представляя собой характеристики поля «упругих» напряжений, достигают максимума в одной и той же области больших волновых чисел и можно предположить, что в грубом приближении они пропорциональны. Сравнивая же (5.11) и (5.18), можно видеть, что из предположения о пропорциональности следует вывод об их равенстве. Поэтому предположим

$$E_2 = U, \qquad J_2 = T_2 \tag{5.21}$$

В развитой турбулентности спектральные распределения для равновесных движений стационарны, и предполагая, что внешняя сила непосредственно взаимодействует с крупномасштабными движениями, при помощи уравнений (5.7), (5.11), (5.16) и (5.21) получим соотношения

$$T_1 = 2\nu\frac{1+\nu\theta_2k^2}{1+\nu\theta_1k^2}k^2E_1 + \frac{\theta_1J_1 - \nu(\theta_1-\theta_2)k^2T_2}{1+\nu\theta_1k^2} \tag{5.22}$$

$$E_2 = \frac{\nu(\theta_1-\theta_2)k^2}{1+\nu\theta_1k^2}E_1 + \frac{\theta_1}{2}\,\frac{\theta_1J_1 + (1+\nu\theta_2k^2)T_2}{1+\nu\theta_1k^2}$$

Простыми соотношениями описывается турбулентность и на конечной стадии затухания, когда в уравнениях для спектральных функций E_1, $E_2, \ldots$ можно пренебречь кубическими по амплитуде возмущений членами. Для такой слабой турбулентности, поддерживаемой на стационарном уровне случайной внешней силой, из уравнений (5.7), (5.11), (5.16), (5.22) следует равенство (5.21) и формулы (ср. (5.22))

$$\Phi = 2\nu \frac{1+\nu\theta_2 k^2}{1+\nu\theta_1 k^2} k^2 E_1, \qquad E_2 = \frac{\nu(\theta_1 - \theta_2)k^2}{1+\nu\theta_1 k^2} E_1 \tag{5.23}$$

Энергия Φ, поступающая от внешней силы, диссипирует в слабой турбулентности упруго-вязкой жидкости так же, как в вязкой жидкости с эффективной вязкостью $\nu(1+\nu\theta_2 k^2)(1+\nu\theta_1 k^2)^{-1}$. Из (5.23) следует, что спектр упругой энергии движений с масштабами, большими $l_{\theta_1} = (\nu\theta_1)^{1/2}$, ведет себя как $\nu\theta k^2 E_1(k)$, т. е. упругая энергия крупномасштабных движений мала по сравнению с их кинетической энергией. Для мелкомасштабных движений с волновыми числами $k \gg l_{\theta_1}^{-1}$ имеем $E_2(k) \approx \approx (1-\theta_1/\theta_1)E_1(k)$ и в случае максвелловской модели ($\theta_2 = 0$) упруговязкой жидкости имеет место равнораспределение упругой и кинетической энергии.

Наконец, используя (5.6), можно получить уравнение, связывающее спектральную характеристику поля давления $\langle p(\mathbf{k})p(\mathbf{q})\rangle$ со спектральными характеристиками поля скоростей и напряжений. В случае изотропной турбулентности для жидкостей, для которых можно принять (5.5), спектральные характеристики, содержащие напряжения, из уравнения выпадут и спектр давления оказывается связанным со спектральными характеристиками скоростей так же, как и в обычной вязкой жидкости.

6. Заключительные замечания. Упругость жидкости оказывает существенное влияние как на скорость затухания, так и на нелинейные взаимодействия турбулентных движений с масштабами, меньшими размера зоны упругого отклика среды (см. (5.22)). Асимптотическое поведение спектра при очень больших волновых числах становится степенным в отличие от экспоненциального характера поведения спектра в вязкой жидкости. Такой результат получается, если пренебречь флуктуациями диссипации энергии в турбулентном потоке. Можно ожидать в соответствии с результатами работы [8], что учет этих флуктуаций не изменит степенного характера спадания спектра.

Выше рассматривалось влияние упругости либо на однородную изотропную турбулентность, либо на равновесные турбулентные движения развитой турбулентности, которые также обладают однородностью и изотропией. Влияние упругости на турбулентность сдвигового течения при не слишком больших числах Рейнольдса может существенно отличаться от рассмотренного случая. Особый интерес представляет в такой турбулентности автоколебательный характер вязкого подслоя в пристеночных течениях и дополнительные нормальные напряжения в жидкости, которые могут приводить к изменению величины полной диссипации, баланса энергии и затухания различных движений, а тем самым и к изменению интегральных характеристик типа гидродинамического сопротивления и профиля средней скорости.

Автор благодарен Г. И. Баренблатту за постоянное внимание к работе.

Поступило 14 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
3. Новиков Е. А. О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 2.
4. Городцов В. А., Мясников В. П. Конечный период вырождения турбулентных движений упруго-вязких жидкостей. ПМТФ, 1965, № 4.
5. Chow P. L., Saibel E. Final period of decay for a viscoelastic fluid in isotrópic turbulence. ZAMM, 1969, vol. 49, No. 7.
6. Lumley J. L. Turbulence in non-newtonian fluids. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 3.
7. Городцов В. А., Леонов А. И. О кинематике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязко-упругости. ПММ, 1968, т. 32, № 1.
8. Келлер Б. С., Яглом А. М. О влиянии флуктуаций диссипации энергии на форму спектра турбулентности в крайней коротковолновой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.