УДК 532.517.3:538.4

ВЛИЯНИЕ ДЖОУЛЕВОЙ ДИССИПАЦИИ НА КОНВЕКТИВНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

О. А. ЭЙСМОНТ

(*Москва*)

Результаты работы [1] распространены на случай, когда джоулева диссипация приводит к нелинейному профилю невозмущенной температуры жидкости.

Конвективная неустойчивость проводящей жидкости с током в магнитном поле, направленном перпендикулярно току, при неоднородном в направлении действия электромагнитной силы распределении проводимости, зависящей от температуры, рассматривалась в [1] в пренебрежении джоулевой диссипацией. Такой подход позволил использовать уравнение энергии без электромагнитных членов, что в известной степени облегчило решение задачи. Во многих случаях, однако, джоулева диссипация значительна и может оказать существенное влияние на развитие конвективной неустойчивости. Так, без учета джоулева тепловыделения неустойчивость может возникать только при положительных значениях числа Рэлея, превышающих некоторую критическую величину, в то время как джоулева диссипация может привести к тому, что неустойчивость будет развиваться также и при отрицательных значениях числа Рэлея, т. е. и в тех случаях, когда состояние без выделения джоулева тепла абсолютно устойчиво.

1. Как и в работе [1], рассматривается плоский слой проводящей жидкости с приложенными внешними магнитным и электрическим полями (фиг. 1). Все предположения относительно свойств жидкости остаются в силе, сохраняются также все прежние обозначения. Уравнение для амплитуды возмущения компоненты скорости в направлении оси z имеет вид [1]

$$\begin{gathered}N^2(D^2-a^2)W-[AP^{-1/2}(D^2-a^2)W+(P^{1/2}+P^{-1/2})(D^2-a^2)^2W+\\ +H^2a_1^2P^{1/2}W]N+H^2a_1^2(D^2-a^2)W+A(D^2-a^2)^2W+\\ +(D^2-a^2)^3W-a^2(AH^2+M\zeta-R)W+2AH^2a_1^2a_2\psi/Bh=0\end{gathered}\tag{1.1}$$

$$N=\frac{nh^2}{\sqrt{\varkappa\nu}}\qquad H^2=\frac{\sigma_{00}B^2h^2}{\mu}\qquad P=\frac{\nu}{\varkappa}\qquad R=\frac{\sigma_{00}E_0B\alpha h^3(T_{02}-T_{01})}{\mu\varkappa}$$

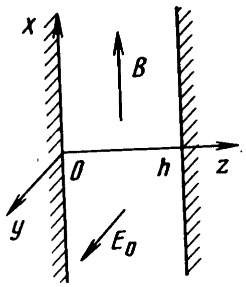
$$A=\frac{\sigma_{00}E_0^2\alpha h^4}{\lambda},\qquad M=\frac{\sigma_{00}^2E_0^3\alpha Bh^5}{\mu\lambda\varkappa},\qquad \zeta=\frac{z}{h}$$

где ψ — амплитуда возмущения потенциала.

Граничные условия для W записываются в прежнем виде

$$W=DW\quad(\text{либо}\quad D^2W)=[N(D^2-a^2)-P^{1/2}(D^2-a^2)^2]W=0,\quad \zeta=\pm 1/2.$$

Можно показать, что для выполнения исходного предположения работы [1] $|\alpha(T-T_{00})|\ll 1$ необходимо, чтобы $|A|\ll 1$. Тогда, имея в виду, что $a\sim 1$, всеми членами в уравнении (1.1), содержащими A, можно пренебречь. Таким образом, в рассматриваемой постановке влияние джоулевой диссипации сказывается лишь в нелинейности профиля невозмущенной температуры. Отметим, что решения уравнения (1.1) являются четными относительно параметра M, характеризующего уровень джоулевой диссипации.



Фиг. 1

Можно доказать, что принцип изменения устойчивости справедлив в случае свободных граничных поверхностей. При других граничных условиях доказать подобное утверждение не представляется возможным.

2. Рассмотрим сначала случай, когда вязкостью жидкости можно пренебречь ($\mu = 0$). При анализе устойчивости его можно считать предельным при $H \to \infty$. Уравнение (1.1) преобразуется тогда к виду

$$N_1^2(D^2 - a^2)W - [(D^2 - a^2)^2W + H_1^2a_1^2W]N_1 + \\ + H_1^2a_1^2(D^2 - a^2)W + a_1^2(R_1 - M_1\zeta)W = 0. \quad (2.1)$$

Здесь индекс 1 у безразмерных величин означает, что всюду в их определениях ν заменено на $\varkappa$.

Легко показать, что в невязком случае справедлив принцип изменения устойчивости. Кроме того, из уравнения (2.1) нетрудно получить следующее достаточное условие устойчивости:

$$H_1^2a^2 - R_1 + M_1\zeta \geqslant 0$$

Отсюда получается оценка сверху для величины волнового числа a при неустойчивости

$$a^2 \leqslant (R_1 + {}^1/_2|M_1|)H_1^{-2}.$$

На границе устойчивости имеем уравнение

$$D^2W = (a^2 - L_1 + L_2\zeta)W, \qquad L_1 = R_1H_1^{-2}, \qquad L_2 = M_1H_1^{-2}$$

Это уравнение заменой переменной

$$\xi = H_1^{4/3}M_1^{-2/3}(a^2 - L_1 + L_2\zeta)$$

приводится к известному уравнению Эйри

$$\frac{d^2W}{d\xi^2} = \xi W$$

с граничными условиями

$$W = 0, \qquad \xi = \xi_1, \xi_2, \qquad \xi_{1,2} = L_2^{-2/3}(a^2 - L_1 \mp {}^1/_2L_2)$$

Общее решение уравнения Эйри выражается через функции Эйри

$$W = C_1A_i(\xi) + C_2B_i(\xi).$$

Подставляя это выражение в граничные условия, получаем следующее вековое уравнение:

$$\frac{A_i(\xi_1)}{A_i(\xi_2)} = \frac{B_i(\xi_1)}{B_i(\xi_2)}$$

Используя асимптотические представления функций Эйри, можно показать, что при $|L_2| \gg 10^2$ условие нейтральной устойчивости с достаточной степенью точности имеет вид

$$L_1 = a^2 + 2.34 L_2^{2/3} - {}^1/_2 |L_2| \qquad (2.2)$$

На фиг. 2 приведена линия нейтральной устойчивости при $a = 0$, что соответствует минимуму L_1, пунктирной линией показана зависимость $L_1(L_2)$, полученная из выражения (2.2). Видно, что джоулева диссипация понижает устойчивость, однако при малых уровнях джоулева тепловыделения это снижение незначительно.

3. Возвращаясь теперь к вязкому случаю, предположим, что принцип изменения устойчивости справедлив и при жестких граничных поверхностях. Такое предположение может быть в некоторой степени оправдано справедливостью принципа изменения устойчивости в невязком случае, а также при наличии вязкости, когда граничные поверхности свободные. Представим тогда исходное уравнение на границе устойчивости в виде следующей системы:

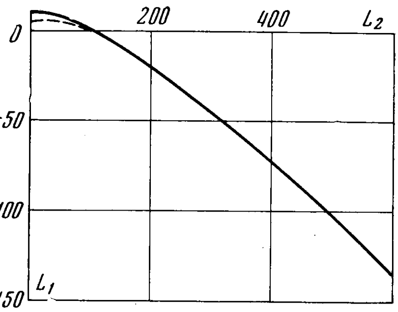
$$(D^2 - a^2)^2 W + H^2 a_1^2 W = \theta \qquad (3.1)$$

$$(D^2 - a^2)\theta + R^\circ a_1^2 (1 - S\zeta) W = 0$$

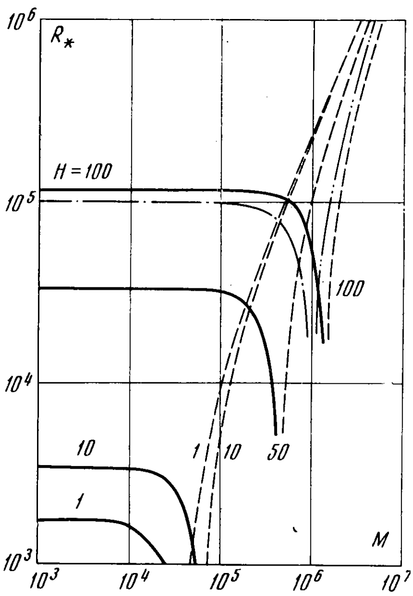
$$R^\circ = R + {}^1/_2 M, \quad S = M / R^\circ \qquad (3.2)$$

с граничными условиями

$$W = DW = \theta = 0, \qquad \zeta = 0.1.$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Следует отметить, что при $H = 0$ система уравнений (3.1), (3.2) оказывается сопряженной соответствующей системе уравнений в задаче об устойчивости движения жидкости между вращающимися цилиндрами в предположении малости зазора между цилиндрами [2], и эти системы имеют одинаковые собственные значения R° (собственные функции, естественно, различны).

Решение системы (3.1), (3.2) ищется с помощью разложения функции θ в ряд Фурье

$$\theta = \sum_m C_m \sin m\pi\zeta \qquad (3.3)$$

Функция W определяется следующим рядом:

$$W = \sum_m C_m W_m$$

где W_m находится из уравнения (3.1)

$$W_m = K_1 e^{\lambda_1 \zeta} \sin \lambda_2 \zeta + K_2 e^{\lambda_1 \zeta} \cos \lambda_2 \zeta + K_3 e^{-\lambda_1 \zeta} \sin \lambda_2 \zeta +$$

$$+ K_4 e^{-\lambda_1 \zeta} \cos \lambda_2 \zeta + \frac{a_1^2 \sin m\pi\zeta}{(m^2\pi^2 + a^2)^2 + H^2 a_1^2}$$

$$\lambda_{1,2} = [{}^1/_2 ((a^4 + a_1^2 H^2)^{1/2} \pm a^2)]^{1/2}$$

Константы интегрирования K_1, K_2, K_3, K_4 определяются из граничных условий.

Далее из условия ортогональности левой части уравнения (3.2) к выбранной системе функций $\sin m\pi\zeta$ получается однородная система уравнений относительно коэффициентов C_m. Условие существования нетривиального решения этой системы приводит к следующему вековому уравнению:

$$\left\| \int_0^1 (1 - S\zeta) W_m \sin n\pi\zeta \, d\zeta - \frac{m^2\pi^2 + a^2}{2R^\circ} \delta_{mn} \right\| = 0 \qquad (3.4)$$

Из (3.4) находится ряд собственных значений R°. Затем при фиксированных H и S в зависимости от a_1, a_2 находится минимальное положительное из этих значений, которое и определяет критическое число Рэлея, характеризующее начало конвекции $R_* = R^\circ_{\min}(1 - {}^1/_2 S)$, и соответствующую величину $M = R^\circ_{\min} S$.

При вычислениях, проводившихся на ЭВМ с использованием стандартной программы нахождения собственных значений и собственных векторов вещественной матрицы обобщенным методом вращений, использовались десять членов ряда (3.3), что обеспечивало достаточную точность определения критических значений числа Рэлея до величин $S \sim 5$. Оптимальное значение a_2, как и в задаче без учета джоулевой диссипации, оказывается равным нулю. На фиг. 3 показаны зависимости $R_*(M)$, определяющие нейтральную устойчивость, для различных значений числа Гартмана (пунктирные линии соответствуют отрицательным значениям числа Рэлея). Штрих-пунктирными линиями отмечена зависимость $R_*(M)$, соответствующая невязкому приближению, которое, начиная со значений числа Гартмана $\sim 10^2$, обеспечивает довольно хорошую точность в определении критического числа Рэлея.

Характер влияния джоулевой диссипации на устойчивость при учете вязкости качественно сохраняется таким же как и в случае отсутствия вязкости. Аналогичный вывод о влиянии внутреннего тепловыделения на устойчивость получен в работе [3] при анализе устойчивости слоя жидкости, подогреваемого снизу. Следует также отметить, что, начиная с достаточно больших значений параметра M, влияние числа Гартмана на устойчивость ослабляется.

Автор благодарит Г. А. Любимова и С. А. Регирера за внимание к работе и полезные замечания.

Поступило 27 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Эйсмонт О. А. О конвективном движении проводящей жидкости с током в поперечном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.
2. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.
3. Sparrow E. M., Goldstein R. J., Jonsson V. K. Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, pt 4.