ность приближенного решения, как отмечалось выше, увеличивается с уменьшением h/l.

Таким образом, гидравлическая теория дает наиболее точные результаты для достаточно малых и больших соотношений мощности пропластков h_2/h_1 в широком диапазоне изменения h/l.

Поступило 12 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Добрынин В. М. Физические свойства нефтегазовых коллекторов в глубоких скважинах. М., «Недра», 1965.
2. Николаевский В. Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа. ПМТФ, 1961, № 4.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.— Л., Физматгиз, 1962.

УДК 532.58.82

ОБТЕКАНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАДАННЫМ НА СФЕРЕ КОНЕЧНОГО РАДИУСА

Ю. Г. ОВСЕЕНКО

(*Новочеркасск*)

В нелинейной постановке рассматривается установившееся неосесимметричное обтекание вращающейся сферы потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса, когда векторы скорости потока и угловой скорости вращения сферы не коллинеарны. Вычисляются момент сопротивления вращению и проекции силы сопротивления в виде рядов по степеням числа Рейнольдса. Косое обтекание вращающейся сферы приводит к меньшему моменту сопротивления вращению, чем осесимметричное.

Одной и той же реальной задаче может соответствовать несколько математических моделей.

Так обстоит дело и с задачей обтекания сферы потоком. Классическая модель — обтекание сферы потоком, равномерным на бесконечности, до сих пор строго не решена. Рассматриваемая в статье модель обтекания сферы предложена К. И. Страховичем [1]. Суть ее в том, что поток задается на сфере конечности радиуса r_1. Это дает возможность найти точное решение задачи методом малого параметра. В этой постановке решены задачи об обтекании неподвижной сферы [2], об обтекании вращающейся сферы в случае, когда вектор скорости потока коллинеарен вектору угловой скорости вращения сферы [3]. Сравнение результатов, полученных в работах [2, 3], с классическими указывает на то, что обе модели, математически совершенно разные, приводят к одинаковым физическим выводам: силы сопротивления в обоих случаях имеют один и тот же порядок. Невозможность предельного перехода $a \to \infty$ в полученных формулах связана с тем, что решение указанных выше задач в классической постановке ($a = \infty$) не может быть найдено методом малого параметра, что известно еще со времени Уайтхеда (1889 г.). Объяснение парадокса Уайтхеда дано в работах [1, 4].

1. Постановка задачи. Пусть сфера радиуса r_1, вращающаяся вокруг оси, которая проходит через ее центр, с угловой скоростью ω, обтекается потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса r_2, причем задаваемые векторы скорости $\mathbf{v}_0$ и $\boldsymbol{\omega}$ образуют между собой угол β. Без ограничения общности, можно считать, что вектор ω направлен по оси z, а $\mathbf{v}_0$ ортогонален оси y. Граничные условия задачи в сферической системе координат таковы:

$$v_\varphi = \omega r_1 \sin\theta, \qquad v_r = v_\theta = 0 \qquad (r = r_1)$$

$$v_\varphi = -v_0 \sin\beta \sin\varphi$$

$$v_\theta = v_0(\sin\beta\cos\theta\cos\varphi - \cos\beta\sin\theta) \qquad (r = r_2) \qquad (1.1)$$

$$v_r = v_0(\sin\beta\sin\theta\cos\varphi + \cos\beta\cos\theta)$$

Запишем уравнения Навье — Стокса, уравнение неразрывности и предельные условия (1.1) в безразмерных величинах [5]

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\Delta v-\frac{2v}{x^2}-\frac{2\tau w}{x^2\sqrt{1-\tau^2}}-\frac{2}{x^2\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+\frac{2\sqrt{1-\tau^2}}{x^2}\frac{\partial w}{\partial \tau}=$$

$$=R\left(Lv-\frac{u^2+w^2}{x}\right) \tag{1.2}$$

$$\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{x}\frac{\partial p}{\partial \tau}+\Delta w-\frac{w}{x^2(1-\tau^2)}-\frac{2\tau}{x^2(1-\tau^2)}\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{2\sqrt{1-\tau^2}}{x^2}\frac{\partial v}{\partial \tau}=$$

$$=R\left(Lw+\frac{vw}{x}-\frac{\tau u^2}{x\sqrt{1-\tau^2}}\right)$$

$$-\frac{1}{x\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial p}{\partial \varphi}+\Delta u-\frac{u}{x^2(1-\tau^2)}+\frac{2\tau}{x^2(1-\tau^2)}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+\frac{2}{x^2\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial v}{\partial \varphi}=$$

$$=R\left(Lu+\frac{vu}{x}+\frac{\tau uw}{x\sqrt{1-\tau^2}}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2v}{x}-\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{x}\frac{\partial w}{\partial \tau}+\frac{\tau w}{x\sqrt{1-\tau^2}}+\frac{1}{x\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0$$

$$\left(L=v\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{x}w\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{u}{x\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\partial}{\partial \varphi},\right.$$

$$\left.\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1-\tau^2}{x^2}\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}-\frac{2\tau}{x^2}\frac{\partial}{\partial \tau}+\frac{1}{x^2(1-\tau^2)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)$$

$$u=\frac{v_1}{v_0}\sqrt{1-\tau^2},\qquad v=w=0\qquad (x=1)$$

$$u=-\sin\beta\sin\varphi,\qquad v=\sin\beta\cos\varphi\sqrt{1-\tau^2}+\tau\cos\beta \tag{1.3}$$

$$w=\tau\sin\beta\cos\varphi-\cos\beta\sqrt{1-\tau^2}\qquad (x=a)$$

$$\left(x=\frac{r}{r_1},\quad a=\frac{r_2}{r_1},\quad R=\frac{r_1v_0}{\nu},\quad \tau=\cos\theta,\quad v_1=r_1\omega\right)$$

Здесь R — число Рейнольдса, $v_r=v_0v$, $v_\theta=v_0w$, $v_\varphi=v_0u$ — проекции скорости, $P=\mu v_0 p r_1^{-1}$ — гидродинамическое давление, ν, μ — коэффициенты вязкости; так как за характерную скорость выбрана скорость потока v_0, то считаем $v_1\leqslant v_0$.

2. **Решение задачи.** Методом Фурье можно показать, что решение системы (1.2) нужно искать в виде рядов следующей структуры:

$$u=\sum_{k=0}^{\infty}R^{2k}\left\{\sum_{n=0}^{2k}\sum_{i=0}^{k+1}u_{2k,n,2i}(x)\frac{P_{2i}^{n}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\cos n\varphi+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{2k+1}\sum_{i=0}^{k}\bar{u}_{2k+1,n,2i+1}(x)\frac{P_{2i+1}^{n}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\sin n\varphi\right\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-1}\left\{\sum_{n=0}^{2k-1}\sum_{i=0}^{k}u_{2k-1,n,2i+1}(x)\frac{P_{2i+1}^{n}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\cos n\varphi+\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{2k}\sum_{i=1}^{k}\bar{u}_{2k,n,2i}(x)\frac{P_{2i}{}^n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\sin n\varphi\Bigg\}$$

$$w=\sum_{k=0}^{\infty}R^{2k}\Bigg\{\sum_{n=0}^{2k+1}\sum_{i=0}^{k+1}w_{2k+1,n,2i}(x)\frac{P_{2i}{}^n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{2k}\sum_{i=0}^{k}\bar{w}_{2k,n,2i+1}(x)\frac{P_{2i+1}^{n}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\sin n\varphi\Bigg\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-1}\Bigg\{\sum_{n=0}^{2k}\sum_{i=0}^{k}w_{2k,n,2i+1}(x)\frac{P_{2i+1}^{n}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{2k-1}\sum_{i=1}^{k}\bar{w}_{2k-1,n,2i}(x)\frac{P_{2i}{}^n(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\sin n\varphi\Bigg\} \qquad (2.1)$$

$$v=\sum_{k=0}^{\infty}R^{2k}\Bigg\{\sum_{n=0}^{2k+1}\sum_{i=0}^{k}v_{2k+1,n,2i+1}(x)P_{2i+1}^{n}(\tau)\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{2k}\sum_{i=1}^{k}\bar{v}_{2k,n,2i}(x)P_{2i}{}^n(\tau)\sin n\varphi\Bigg\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-1}\Bigg\{\sum_{n=0}^{2k}\sum_{i=0}^{k}v_{2k,n,2i}(x)P_{2i}{}^n(\tau)\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{2k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\bar{v}_{2k-1,n,2i+1}(x)P_{2i+1}^{n}(\tau)\sin n\varphi\Bigg\}$$

$$p=\sum_{k=0}^{\infty}R^{2k}\Bigg\{\sum_{n=0}^{2k+1}\sum_{i=0}^{k}p_{2k+1,n,2i+1}(x)P_{2i+1}^{n}(\tau)\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{2k}\sum_{i=1}^{k}\bar{p}_{2k,n,2i}(x)P_{2i}{}^n(\tau)\sin n\varphi\Bigg\}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}R^{2k-1}\Bigg\{\sum_{n=0}^{2k}\sum_{i=0}^{k}p_{2k,n,2i}(x)P_{2i}{}^n(\tau)\cos n\varphi+$$

$$+\sum_{n=1}^{2k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\bar{p}_{2k-1,n,2i+1}(x)P_{2i+1}^{n}(\tau)\sin n\varphi\Bigg\}+\text{const}$$

Здесь $P_m{}^n(\tau)$ — присоединенные функции Лежандра.

Известно, что ряды (2.1) при малых числах Рейнольдса, сходятся вместе со своими производными до порядка, обусловленного уравнениями (1.2) [6, 7].

Подставляя значения u, v, w, p (2.1) в (1.2), (1.3), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях числа Рейнольдса слева и справа, а затем при одинаковых $P_m{}^n(\tau)$, получим бесконечную последовательность систем дифференциальных уравнений типа Эйлера с соответствующими граничными условиями. Решая эту систему, можно найти рекуррентные формулы для коэффициентов рядов (2.1) точно так же, как это сделано в работах [2, 3, 7]. Однако ввиду громоздкости выкладок и формул, ограничимся нахождением только тех коэффициентов рядов (2.1), которые необходимы для определения силовых характеристик с точностью до R^2 включительно.

Запишем необходимую для этого систему уравнений

$$\frac{d^2u_{0,0,0}}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du_{0,0,0}}{dx}-\frac{2}{x^2}u_{0,0,0}=0, \qquad u_{0,0,2}=-u_{0,0,0}$$

$$x^2\frac{d^4v_{1,i,1}}{dx^4}+8x\frac{d^3v_{1,i,1}}{dx^3}+8\frac{d^2v_{1,i,1}}{dx^2}-\frac{8}{x}\frac{dv_{1,i,1}}{dx}=0 \tag{2.2}$$

$$P_{1,i,1}=\frac{1}{2}\left(x^2\frac{d^3x_{1,i,1}}{dx^3}+6x\frac{d^2v_{1,i,1}}{dx^2}+4\frac{dv_{1,i,1}}{dx}\right) \qquad (i=0,1)$$

$$w_{1,i,2}=\frac{2-i}{6x}\frac{d}{dx}(x^2v_{1,i,1}), \qquad w_{1,0,0}=-w_{1,0,2}, \qquad \bar{u}_{1,1,1}=-3w_{1,1,2}$$

$$v_{2,0,0}=0, \qquad \frac{dp_{2,0,0}}{dx}=-f_{2,0,0}$$

$$x^2\frac{d^4v_{2,i,2}}{dx^4}+8x\frac{d^3x_{2,i,2}}{dx^3}-\frac{24}{x}\frac{dv_{2,i,2}}{dx}+\frac{24}{x^2}v_{2,i,2}=\frac{15}{3-i}(x\varphi_{2,i,3})'-6f_{2,i,2}$$

$$p_{2,i,2}=\frac{1}{6}\left(x^2\frac{d^3v_{2,i,2}}{dx^3}+6x\frac{d^2v_{2,i,2}}{dx^2}-\frac{15}{3-i}x\varphi_{2,i,3}\right), \qquad i=0,1,2$$

$$w_{2,i,3}=\frac{3-i}{15x}\frac{d}{dx}(x^2v_{2,i,2}), \qquad w_{2,0,1}=-w_{2,0,3}, \qquad w_{2,1,1}=-\frac{9}{4}w_{2,1,3}$$

$$\bar{u}_{2,1,2}=-\frac{5}{4}w_{2,1,3}, \qquad \bar{u}_{2,2,2}=-5w_{2,2,3} \tag{2.3}$$

$$x^2\frac{d^4\bar{v}_{1,1,1}}{dx^4}+8x\frac{d^3\bar{v}_{1,1,1}}{dx^3}+8\frac{d^2\bar{v}_{1,1,1}}{dx^2}-\frac{8}{x}\frac{d\bar{v}_{1,1,1}}{dx}=\frac{1}{4}(9x\bar{\varphi}_{1,1,2}+5x\psi_{1,1,1})'-2\bar{f}_{1,1,1}$$

$$\bar{p}_{1,1,1}=\frac{1}{2}\left[x^2\frac{d^3\bar{v}_{1,1,1}}{dx^3}+6x\frac{d^2\bar{v}_{1,1,1}}{dx^2}+4\frac{d\bar{v}_{1,1,1}}{dx}-\frac{x}{4}(9\bar{\varphi}_{1,1,2}+5\psi_{1,1,1})\right]$$

$$\frac{d^2u_{1,i,3}}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du_{1,i,3}}{dx}-\frac{6}{x^2}u_{1,i,3}=\psi_{1,i,3}, \qquad i=0,1$$

$$\frac{d^2u_{1,0,1}}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{du_{1,0,1}}{dx}+\frac{6}{x^2}u_{1,0,3}=\psi_{1,0,1}$$

$$u_{1,1,1}=\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}(x^2\bar{v}_{1,1,1})-\frac{9}{4}u_{1,1,3}, \qquad \bar{w}_{1,1,2}=\frac{1}{6x}\frac{d}{dx}(x^2\bar{v}_{1,1,1})+\frac{5}{4}u_{1,1,3}$$

Аналогично выглядят уравнения для определения функций $v_{3,i,j}$, $p_{3,i,j}$, $\bar{v}_{2,i,2}$, $\bar{p}_{2,i,2}$, $w_{3,i,j}$, $\bar{w}_{2,i,j}$, $u_{2,i,j}$, $\bar{u}_{3,i,j}$.

Граничные условия

$$u_{0,0,0}(1)=\frac{2v_1}{3v_0}, \qquad u_{0,0,0}(a)=0, \qquad u_{0,0,2}(1)=-\frac{2v_1}{3v_0}, \qquad u_{0,0,2}(a)=0$$

$$v_{1,0,1}(1)=0, \quad v_{1,0,1}(a)=\cos\beta, \quad w_{1,0,2}(1)=0, \quad w_{1,0,2}(a)={}^2/_3\cos\beta \tag{2.4}$$

$$v_{1,1,1}(1)=0, \quad v_{1,1,1}(a)=-\sin\beta, \quad w_{1,1,2}(1)=0, \quad w_{1,1,2}(a)=-{}^1/_3\sin\beta$$

$$\bar{u}_{1,1,1}(1)=0, \quad \bar{u}_{1,1,1}(a)=\sin\beta, \quad w_{1,0,0}(1)=0, \quad w_{1,0,0}(a)=-{}^2/_3\cos\beta$$

Граничные условия для остальных функций нулевые.

Решение системы (2.2), удовлетворяющее условиям (2.4)

$$u_{0,0,0}=\frac{2v_1(a^3x^{-2}-x)}{3v_0(a^3-1)}$$

$$v_{1,0,1}=\frac{\cos\beta}{(a-1)^3\delta}(\alpha_1-3\alpha_2x^2-6\alpha_3x^{-1}+2\alpha_4x^{-3})$$

$$w_{1,0,0}=\frac{2\cos\beta}{3(a-1)^3\delta}(-\alpha_1+6\alpha_2x^2+3\alpha_3x^{-1}+\alpha_4x^{-3})$$

$$\alpha_1=4a^5+4a^4+4a^3+9a^2+9a,\qquad \alpha_2=a^2+a,\qquad \alpha_3=a^5+a^4+a^3+a^2+a$$

$$\alpha_4=a^5+a^4+a^3,\qquad \delta=4a^2+7a+4 \tag{2.5}$$

$$u_{0,0,2}=-u_{0,0,0},\qquad v_{1,1,1}=-v_{1,0,1}\operatorname{tg}\beta,\qquad w_{1,1,2}={}^1/_2w_{1,0,0}\operatorname{tg}\beta$$

$$w_{1,0,2}=-w_{1,0,0},\qquad \bar u_{1,1,1}=-{}^3/_2w_{1,0,0}\operatorname{tg}\beta$$

Теперь приведем значения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x)$, входящих в правые части уравнений системы (2.3), после упрощений на основе (2.5)

$$f_{2,0,0}(x)=\frac{1}{6\cos^2\beta}\left(2v_{1,0,1}\frac{dv_{1,0,1}}{dx}-\frac{9}{x}w_{1,0,0}^2-\frac{6}{x}w_{1,0,0}v_{1,0,1}\right)-\frac{3}{2x}u_{0,0,0}^2$$

$$f_{2,0,2}(x)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\beta\right)f_2(x)+\frac{3}{2x}u_{0,0,0}^2,\qquad f_{2,1,2}(x)=-\frac{1}{6}\operatorname{tg}\beta f_2(x)$$

$$f_{2,2,2}(x)=\frac{1}{24}\operatorname{tg}^2\beta f_2(x),\qquad f_2(x)=4v_{1,0,1}\frac{dv_{1,0,1}}{dx}+\frac{9}{x}w_{1,0,0}^2+\frac{6}{x}w_{1,0,0}v_{1,0,1} \tag{2.6}$$

$$\bar f_{1,1,1}(x)={}^3/_2\operatorname{tg}\beta(3w_{1,0,0}+v_{1,0,1})u_{0,0,0}/x$$

$$\varphi_{2,0,1}(x)=\frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\beta\right)\varphi_2(x)-\frac{9}{10x}u_{0,0,0}^2,\qquad \varphi_{2,0,3}(x)=-\varphi_{2,0,1}(x)$$

$$\varphi_{2,1,1}(x)=-{}^9/_{20}\operatorname{tg}\beta\,\varphi_2(x),\qquad \varphi_{2,1,3}(x)={}^1/_5\operatorname{tg}\beta\,\varphi_2(x),\qquad \varphi_{2,2,3}(x)=-{}^1/_{40}\operatorname{tg}^2\beta\,\varphi_2(x)$$

$$\bar\varphi_{1,1,2}(x)=\frac{3}{4x}\operatorname{tg}\beta u_{0,0,0}w_{1,0,0},\qquad \varphi_2(x)=2v_{1,0,1}\frac{dw_{1,0,0}}{dx}+\frac{2}{x}v_{1,0,1}w_{1,0,0}+\frac{3}{x}w_{1,0,0}^2$$

$$\psi_{1,0,1}(x)=\frac{3}{5}\psi_2(x),\qquad \psi_2(x)=v_{1,0,1}\frac{du_{0,0,0}}{dx}+\frac{1}{x}v_{1,0,1}u_{0,0,0}+\frac{3}{x}w_{1,0,0}u_{0,0,0}$$

$$\psi_{1,0,3}(x)=-\psi_{1,0,1}(x)\psi_{1,1,1}(x)=$$

$$=-\frac{3}{20}\operatorname{tg}\beta\left(8v_{1,0,1}\frac{du_{0,0,0}}{dx}+\frac{8}{x}v_{1,0,1}u_{0,0,0}+\frac{9}{x}w_{1,0,0}u_{0,0,0}\right)$$

$$\psi_{1,1,3}(x)={}^1/_5\operatorname{tg}\beta\,\psi_2(x),\qquad \bar\psi_{2,1,2}(x)=-{}^1/_4\operatorname{tg}\beta\,\varphi_2(x),\qquad \bar\psi_{2,2,2}(x)={}^1/_8\operatorname{tg}^2\beta\,\varphi_2(x)$$

Подставляем (2.5) в (2.6), затем решаем систему (2.3) и удовлетворяем граничным условиям

$$v_{2,0,0}=0,\qquad v_{2,0,2}=6B(1-{}^1/_2\operatorname{tg}^2\beta)v_2(x)+A\bar v_2(x)$$

$$v_{2,1,2}=-6B\operatorname{tg}\beta\,v_2(x),\qquad v_{2,2,2}={}^3/_2B\operatorname{tg}^2\beta\,v_2(x)$$

$$A=-\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\frac{12a^3}{(a^3-1)^2},\qquad B=-\frac{6a(a^5-1)\cos^2\beta}{(a-1)^7\delta^2}$$

$$\Delta=4a^6+16a^5+40a^4+55a^3+40a^2+16a+4$$

$$v_2=aC[x^{-4}(-8a^{10}-4a^9-3a^8-35a^7-70a^6-42a^5+4a^4+8a^3)+$$
$$+2x^{-3}(4a^{10}+20a^9+60a^8+111a^7+135a^6+111a^5+60a^4+20a^3+4a^2)-$$
$$-x^{-2}(8a^{10}+100a^9+315a^8+547a^7+650a^6+622a^5+470a^4+270a^3+128a^2+40a)+$$
$$+6x^{-1}(4a^{10}+20a^9+60a^8+115a^7+155a^6+167a^5+155a^4+115a^3+60a^2+20a+4)-$$

$$-(16a^{10}+80a^9+240a^8+480a^7+720a^6+948a^5+1095a^4+935a^3+520a^2+180a+36)+$$
$$+2x(12a^9+39a^8+85a^7+155a^6+269a^5+363a^4+346a^3+220a^2+80a+6)-$$
$$-3x^2(4a^7+20a^6+56a^5+95a^4+95a^3+56a^2+20a+4)+$$
$$+2x^3(-4a^7-5a^6+9a^5+35a^4+30a^3+4a^2+6)]$$

$$\bar{v}_2=C[x^{-4}(-2a^9-8a^8-20a^7-16a^6-a^5+2a^4)+x^{-3}a^3\Delta-$$
$$-x^{-2}(2a^9+8a^2+20a^7+48a^6+57a^5+40a^4+25a^3+10a^2)+\Delta+$$
$$+x(5a^6+2a^5-15a^4-32a^3-35a^2-24a-6)+x^3(-3a^4-2a^3+5a^2+8a+2)]$$

$$\bar{v}_{1,1,1}=D[x^{-4}(-4a^7-11a^6-15a^5-11a^4-4a^3)+x^{-3}(24a^7+54a^6+57a^5+$$
$$+57a^4+54a^3+24a^2)-x^{-2}(36a^7+99a^6+135a^5+135a^4+135a^3+99a^2+36a)+$$
$$+x^{-1}(16a^7+80a^6+159a^5+195a^4+195a^3+159a^2+80a+16)-$$
$$-(24a^6+66a^5+150a^4+195a^3+150a^2+66a+24)+$$
$$+x(36a^4+99a^3+99a^2+36a)+x^2(8a^4-14a^3-33a^2-14a+8)]$$

$$C=-\frac{1}{24\Delta},\qquad D=\frac{v_1}{v_0}\frac{a^3\sin\beta}{4(a^3-1)(a-1)^3\delta^2}$$

$$u_{1,1,3}=E[x^{-3}(-28a^{12}-56a^{11}-84a^{10}-217a^9-107a^8+66a^7-16a^6-98a^5)+$$
$$+x^{-2}(84a^{12}+168a^{11}+252a^{10}+336a^9+420a^8+336a^7+252a^6+168a^5+$$
$$+84a^4)-x^{-1}(56a^{12}+112a^{11}+168a^{10}+322a^9+476a^8+448a^7+392a^6+$$
$$+336a^5+182a^4+28a^3)+x(147a^9+294a^8+336a^7+378a^6+420a^5+$$
$$+273a^4+126a^3+84a^2+42a)+x^2(56a^9-131a^8-290a^7-234a^6-178a^5-$$
$$-199a^4-122a^3-108a^2-54a)+x^4(12a^6+24a^5+24a^4+24a^3+24a^2+12a)]$$

$$u_{1,0,3}=F[x^{-3}(28a^{12}+28a^{11}+28a^{10}+133a^9-110a^8-173a^7+82a^6+82a^5-$$
$$-98a^4)-84x^{-2}(a^{12}+a^{11}+a^{10}+a^9+a^8-a^7-a^6-a^5-a^4-a^3)+$$
$$+14x^{-1}(4a^{12}+4a^{11}+4a^{10}+11a^9+11a^8-2a^7-4a^6-4a^5-11a^4-$$
$$-11a^3-2a^2)+21x(-7a^9-7a^8-2a^7-2a^6-2a^5+7a^4+7a^3+2a^2+$$
$$+2a+2)+x^2(-56a^9+187a^8+159a^7-56a^6-56a^5+21a^4-77a^3-$$
$$-14a^2-54a-54)+12x^4(-a^6-a^5+a+1)]$$

$$u_{1,0,1}=-u_{1,0,3}$$

$$E=-\frac{v_1}{v_0}\frac{\sin\beta}{210(a^5-1)(a^3-1)(a-1)^2\delta},\qquad F=E\frac{3a\operatorname{ctg}\beta}{a-1}$$

Функции $w_{2,i,1}$, $w_{2,i,3}$, $\bar{w}_{1,1,2}$, $u_{1,1,1}$, $\bar{u}_{2,i,2}$ определяются найденными по формулам (2.3).

Совершенно аналогично находятся необходимые для дальнейшего функции $u_{2,0,0}$, $v_{3,1,1}$, $v_{3,0,1}$, значения которых приводить не будем.

3. Момент сопротивления. Момент сопротивления вращению сферы будет определяться формулой

$$M_z=\mu v_0 r_1^2\int_0^\pi \sin^2\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}p_{r\varphi}|_{x=1}\,d\varphi,\qquad p_{r\varphi}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{x}\right)\tag{3.1}$$

Переходя в (3.1) к переменной $\tau=\cos\theta$, затем подставляя значение $u(x,\tau,\varphi)$ (2.1), учитывая, что

$$\int_{-1}^{1}P_n(\tau)\,d\tau=\begin{cases}2, & n=0\\ 0, & n\neq 0\end{cases}\tag{3.2}$$

получим

$$M_z=4\pi\mu v_0 r_1^2\sum_{k=0}^{\infty}R^{2k}\frac{d}{dx}\left(\frac{u_{2k,0,0}}{x}\right)\Bigg|_{x=1}\tag{3.3}$$

Ограничиваясь первыми двумя членами ряда (3.3), подставляя в них значения $u_{0,0,0}(x)$ и $u_{2,0,0}(x)$, будем иметь

$$M_z=-8\pi\mu v_1 r_1^2\gamma_0\left\{1+R^2\left[\gamma_1\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2+\gamma_2\gamma_3+\frac{\gamma_4}{\gamma_5}+\left(\gamma_2\gamma_6+\frac{\gamma_7}{\gamma_5}\right)\sin^2\beta\right]\right\}\tag{3.4}$$

$$\gamma_0 = \frac{a^3}{a^3-1}, \quad \gamma_1 = \frac{a^3(a-1)^7(a^5+11a^4+66a^3+146a^2+136a+45)}{300(a^3-1)^3\Delta},$$

$$\gamma_2 = \frac{9a^2(a^5-1)\ln a}{40(a-1)^7(a^3-1)\delta^2}$$

$$\gamma_3 = 16(3a^4+3a^3+a^2+a+1)$$

$$\gamma_4 = 4a^2\delta(17\,584a^{20}+22\,232a^{19}-99\,306a^{18}-1\,091\,224a^{17}-5\,086\,862a^{16}-$$
$$-16\,041\,816a^{15}-37\,680\,051a^{14}-70\,264\,462a^{13}-108\,698\,708a^{12}-$$
$$-143\,188\,894a^{11}-163\,967\,236a^{10}-167\,588\,344a^9-154\,644\,158a^8-$$
$$-126\,172\,912a^7-88\,789\,251a^6-54\,621\,666a^5-30\,265\,712a^4-$$
$$-14\,732\,074a^3-5\,802\,156a^2-1\,709\,368a-295\,616)$$

$$\gamma_5 = 33\,600(a-1)^4(a^3-1)(a^5-1)\Delta\delta^3, \qquad \gamma_6 = 33a^4+33a^3-14a^2-14a-14$$

$$\gamma_7 = -a^2(59\,776a^{22}+159\,456a^{21}+197\,376a^{20}+10\,841\,740a^{19}+72\,795\,660a^{18}+$$
$$+277\,196\,796a^{17}+739\,627\,876a^{16}+1\,477\,274\,471a^{15}+2\,317\,817\,430a^{14}+$$
$$+3\,003\,789\,920a^{13}+3\,297\,871\,106a^{12}+2\,981\,877\,036a^{11}+2\,016\,997\,856a^{10}+$$
$$+733\,539\,920a^9-389\,119\,320a^8-1\,074\,711\,079a^7-1\,277\,464\,274a^6-$$
$$-1\,083\,578\,004a^5-695\,986\,590a^4-340\,378\,760a^3-125\,032\,224a^2-$$
$$-32\,206\,344a-4\,569\,824)$$

Чтобы иметь представление о порядке величин, входящих в формулу (3.4), для некоторых a приведем значения коэффициента

$$m(a) = \frac{M_z}{-8\pi\mu v_1 r_1^2}\left\{\begin{array}{l} m(2) = 1.143\left\{1+\left[0.00006\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2+0.0053-0.00111\sin^2\beta\right]R^2\right\} \\ m(3) = 1.038\left\{1+\left[0.00026\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2+0.0135-0.00233\sin^2\beta\right]R^2\right\} \\ m(4) = 1.016\left\{1+\left[0.00043\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2+0.0156-0.00258\sin^2\beta\right]R^2\right\} \\ m(\infty) = 1.000\left\{1+\left[0.00083\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2+0.0327-0.00695\sin^2\beta\right]R^2\right\} \end{array}\right.$$

Видно, что наибольший момент сопротивления будет в случае осесимметричного обтекания сферы ($\beta = 0$), наименьший — в случае поперечного обтекания вращающейся сферы ($\beta = 90°$). Косое обтекание вращающейся сферы приводит к меньшему моменту сопротивления вращению, чем осесимметричное.

4. Сила сопротивления. Проекции силы сопротивления на оси декартовой системы координат будут иметь такие значения:

$$R_x = \mu v_0 r_1 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} (p_{rr}\sin\theta\cos\varphi + p_{r\theta}\cos\theta\cos\varphi - p_{r\varphi}\sin\varphi)|_{x=1}\, d\varphi$$

$$R_y = \mu v_0 r_1 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} (p_{rr}\sin\theta\sin\varphi + p_{r\theta}\cos\theta\sin\varphi + p_{r\varphi}\cos\varphi)|_{x=1}\, d\varphi \qquad (4.1)$$

$$R_z = \mu v_0 r_1 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} (p_{rr}\cos\theta - p_{r\theta}\sin\theta)|_{x=1}\, d\varphi$$

причем

$$p_{rr} = -p + 2\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad p_{r\theta} = -\frac{\sqrt{1-\tau^2}}{x}\frac{\partial v}{\partial \tau} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w}{x}\right)$$

Переходя в (4.1) к переменной $\tau = \cos\theta$, затем подставляя значение функций p, v, w, u (2.1) и учитывая величины интегралов

$$\int_{-1}^{1} \tau P_n(\tau)\,d\tau = \begin{cases} 2/3, & n=1 \\ 0, & n\neq 1 \end{cases}, \quad \int_{-1}^{1} \frac{P_n^1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau = \begin{cases} 0, & n=2m \\ -2, & n=2m+1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} P_n^1(\tau)d\tau = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 0, & n=2m+1, \\ -0, & n=2m\neq 0 \end{cases} \quad \int_{-1}^{1} \sqrt{1-\tau^2}\,P_n^1(\tau)d\tau = \begin{cases} -4/3, & n=1 \\ 0, & n\neq 1 \end{cases}$$

получим

$$R_x = \frac{2\pi\mu v_0 r_1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} R^{2k} \Bigg[2p_{2k+1,1,1}(x) - 4\frac{dv_{2k+1,1,1}}{dx} - $$

$$-3\sum_{i=1}^{k+1} \frac{d}{dx}\left(\frac{w_{2k+1,1,2i}}{x}\right) + 3\sum_{i=0}^{k} \frac{d}{dx}\left(\frac{\bar{u}_{2k+1,1,2i+1}}{x}\right)\Bigg]_{x=1}$$

$$R_y = -\frac{2\pi\mu v_0 r_1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} R^{2k-1} \Bigg[2\bar{p}_{2k-1,1,1}(x) - 4\frac{d\bar{v}_{2k-1,1,1}}{dx} - $$

$$-3\sum_{i=1}^{k} \frac{d}{dx}\left(\frac{\bar{w}_{2k-1,1,2i}}{x}\right) - 3\sum_{i=0}^{k} \frac{d}{dx}\left(\frac{u_{2k-1,1,2i+1}}{x}\right)\Bigg]_{x=1}$$

$$R_z = -\frac{4\pi\mu v_0 r_1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} R^{2k} \left[p_{2k+1,0,1}(x) - 2\frac{dv_{2k+1,0,1}}{dx} + 3\frac{d}{dx}\left(\frac{w_{2k+1,0,0}}{x}\right)\right]_{x=1} \tag{4.2}$$

Сохраняя в (4.2) только члены, обеспечивающие точность до R^2, учитывая (2.2), (2.3), граничные условия (2.4) и следствия из них

$$\varphi_{3,0,2}(1) = \varphi_{3,1,2}(1) = \varphi_{3,1,4}(1) = \bar{\varphi}_{1,1,2}(1) = \psi_{1,1,1}(1) = \bar{\psi}_{3,1,1}(1) = 0$$

будем иметь

$$R_x = \frac{2\pi\mu v_0 r_1}{3}(kv_{1,1,1} + R^2 k v_{3,1,1})\,|_{x=1}, \qquad R_y = \frac{2\pi\mu v_0 r_1}{3} R k \bar{v}_{1,1,1}\,|_{x=1} \tag{4.3}$$

$$R_z = -\frac{2\pi\mu v_0 r_1}{3}(kv_{1,0,1} + R^2 k v_{3,0,1})\,|_{x=1}, \qquad k = \frac{d^3}{dx^3} + 4\frac{d^2}{dx^2}$$

Подставим в (4.3) значения функций $v_{i,j,1}$, $\bar{v}_{1,1,1}$

$$R_x = 6\pi\mu v_0 r_1 \sin\beta\delta_0 \left\{ 1 + R^2 \left[\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 \left(\frac{\delta_1}{8\delta_2} + \frac{\delta_3}{4\delta_4}\right) + \frac{\delta_5}{\delta_6} + \frac{\delta_7}{\delta_8}\right]\right\}$$

$$R_y = -\pi\mu v_1 r_1 \sin\beta\gamma_0 R \tag{4.4}$$

$$R_z = 6\pi\mu v_0 r_1 \cos\beta\delta_0 \left\{ 1 + R^2 \left[\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 \left(\frac{\delta_9}{\delta_2} + \frac{\delta_{10}}{3\delta_4}\right) + \frac{\delta_5}{\delta_6} + \frac{\delta_7}{\delta_8}\right]\right\}$$

Здесь

$$\delta_0 = \frac{4a(a^5-1)}{(a-1)^4\delta}, \qquad \delta_1 = -3a^4(5a^4 + 5a^3 + 2a^2 + 2a + 2)\ln a$$

$$\delta_2 = 5(a-1)^3(a^3-1)^2\delta, \quad \delta_4 = 29\,400(a^5-1)^2(a^3-1)^2\Delta\delta, \quad \delta_8 = 5(a-1)^9\delta^3$$

$$\delta_3 = -15\,848a^{24} + 79\,016a^{23} + 278\,922a^{22} + 3\,039\,998a^{21} + 15\,951\,274a^{20} +$$
$$+ 54\,739\,962a^{19} + 128\,622\,677a^{18} + 224\,942\,589a^{17} + 322\,526\,606a^{16} +$$
$$+ 407\,072\,263a^{15} + 454\,134\,437a^{14} + 436\,133\,958a^{13} + 356\,079\,086a^{12} +$$
$$+ 249\,407\,954a^{11} + 151\,073\,152a^{10} + 78\,906\,507a^{9} + 34\,348\,364a^{8} + 11\,622\,873a^{7} +$$
$$+ 2\,783\,532a^{6} + 673\,936a^{5} + 164\,942a^{4} + 55\,360a^{3} + 25\,280a^{2} + 3160a$$

$$\delta_5 = -18a^3(4a^{12} + 12a^{11} + 24a^{10} + 44a^9 + 72a^8 + 92a^7 + 105a^6 + 111a^5 + 100a^4 + 72a^3 + 48a^2 + 27a + 9)\ln a$$

$$\delta_7 = 720a^{21} + 14\,344a^{20} + 80\,201a^{19} + 273\,396a^{18} + 675\,728a^{17} + 1\,367\,032a^{16} + 2\,392\,100a^{15} + 3\,660\,679a^{14} + 4\,916\,244a^{13} + 5\,887\,648a^{12} + 6\,337\,651a^{11} + 6\,079\,168a^{10} + 5\,149\,464a^9 + 3\,850\,024a^8 + 2\,507\,120a^7 + 1\,366\,597a^6 + 586\,388a^5 + 181\,656a^4 + 32\,336a^3 + 1504a^2$$

$$\delta_8 = 100(a-1)^8\Delta\delta^3, \quad \delta_9 = a^4(5a^4 + 5a^3 + 4a^2 + 4a + 4)\ln a$$

$$\delta_{10} = 23\,912a^{24} + 58\,996a^{23} - 79\,443a^{22} - 1\,075\,162a^{21} - 5\,419\,481a^{20} - 16\,659\,128a^{19} - 37\,664\,213a^{18} - 73\,092\,141a^{17} - 125\,242\,114a^{16} - 179\,855\,547a^{15} - 214\,469\,303a^{14} - 227\,314\,702a^{13} - 227\,947\,609a^{12} - 208\,312\,876a^{11} - 161\,651\,463a^{10} - 106\,285\,283a^9 - 61\,996\,066a^8 - 31\,816\,137a^7 - 13\,711\,758a^6 - 4\,161\,684a^5 - 780\,198a^4 + 55\,360a^3 + 25\,280a^2 + 3160a$$

Приведем для различных a значения коэффициентов сопротивления

$$f_x(a) = \frac{R_x}{6\pi\mu v_0 r_1}\quad \begin{cases} f_x(2) = 7.294\left\{1 + \left[0.3598\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2 + 0.0011\right]R^2\right\}\sin\beta \\ f_x(3) = 2.975\left\{1 + \left[0.0666\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2 + 0.0051\right]R^2\right\}\sin\beta \\ f_x(10) = 1.286\left\{1 + \left[-0.0002\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2 + 0.0896\right]R^2\right\}\sin\beta \end{cases}$$

$$f_y(a) = \frac{R_y}{-6\pi\mu v_1 r_1}\quad \begin{cases} f_y(2) = 0.1905R\sin\beta \\ f_y(3) = 0.1731R\sin\beta \\ f_y(10) = 0.1668R\sin\beta \end{cases}$$

$$f_z(a) = \frac{R_z}{6\pi\mu v_0 r_1}\quad \begin{cases} f_z(2) = 7.294\left\{1 + \left[0.0008\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2 + 0.0011\right]R^2\right\}\cos\beta \\ f_z(3) = 2.975\left\{1 + \left[0.0031\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2 + 0.0051\right]R^2\right\}\cos\beta \\ f_z(10) = 1.286\left\{1 + \left[0.0115\left(\dfrac{v_1}{v_0}\right)^2 + 0.0896\right]R^2\right\}\cos\beta \end{cases}$$

Случай $\beta = 0$ соответствует осесимметричному обтеканию вращающейся сферы, а $\beta = 0$, $v_1 = 0$ — обтеканию неподвижной сферы.

Поступило 15 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Страхович К. И. Механика вязкой жидкости. Изд. ЛГУ, 1940.
2. Овсеенко Ю. Г. Обтекание сферы потоком вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса. ПМТФ, 1968, № 2.
3. Овсеенко Р. И., Овсеенко Ю. Г. О лобовом сопротивлении вращающейся сферы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
4. Proudman I., Pearson J. R. Expansions at small Reynolds numbers for the flow pastasphere and a circular cylinder. J. Fluid Mech., 1957, No. 2, pt 3. (Рус. перев.: Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1958, № 2.)
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М., Гостехиздат, 1955.
6. Odqvist F. K. G. Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik Zäher Flüssigkeiten Math. Zeitschrift, 1930, Bd 32, Nr 3.
7. Овсеенко Ю. Г. О движении вязкой жидкости между двумя вращающимися сферами. Изв. вузов, Математика, 1963, № 4.