

Единственность показывается аналогично предыдущему случаю. В самом деле, если имеются два решения u_1, u_2 задачи, то функция $u = e^{-\xi}(u_1 - u_2)$ будет удовлетворять уравнению $u_{\xi\xi} + u_{\xi} = u$ и краевым условиям $u_{\xi} = 0$ при $\xi = 0$, $u_{\xi} = -u$ при $\xi = \tau$. Тогда для H из (2.3) получаем неравенство

$$H'(\tau) = -u^2(0, \tau) - 2 \int_0^{\tau} u_{\xi}^2 d\xi \leq 0$$

Значит $u \equiv 0$, а потому и $u_1 \equiv u_2$.

Несколько более длинные вычисления показывают, что $u \rightarrow 0$ при любом фиксированном ξ и $\tau \rightarrow \infty$.

На границе промачивания

$$u(\tau, \tau) = 1 - 2 \int_0^{\infty} \operatorname{sh} \frac{s}{2} g(s, \tau) f(s) ds$$

Отсюда можно получить, что при $\tau \rightarrow \infty$ граничное значение $u(\tau, \tau)$ растет не быстрее $\sqrt{\tau}$.

В заключение автор благодарит В. И. Пеньковского за постановку и неоднократное обсуждение задачи.

Поступило 20 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967)», М., «Наука», 1969.
2. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными, Изд. 3. Физматгиз, 1961, стр. 346.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. М., «Мир», 1964, стр. 204.

УДК 532.546.013.3

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В СЛОИСТОМ ПЛАСТЕ

Р. М. КАЦ

(Москва)

Рассматривается задача об установившемся движении жидкости в прямоугольном пласте, состоящем из двух сообщающихся пропластков с различной проницаемостью и разной зависимостью ее от давления.

Многочисленными экспериментальными исследованиями [1] установлено, что физические свойства нефтяных коллекторов в той или иной степени зависят от давления. В частности, проницаемость цементированных малопроницаемых пород существенно зависит от давления, а для чистых высокопроницаемых пород изменение проницаемости в широком диапазоне давлений незначительно. В связи с этим представляет интерес изучение фильтрации в неоднородном пласте с учетом зависимости его проницаемости от давления. Приводится пример расчета гипотетического пласта, оценивается точность полученных результатов.

1. Рассматривается фильтрация несжимаемой жидкости в бесконечном по ширине пласте длиной l , состоящем из двух пропластков. Проницаемость и мощность пропластков — соответственно k_1, k_2 и h_1, h_2 . Кровля и подошва пласта непроницаемы. На концах пласта поддерживаются постоянные давления p_+ и p_- соответственно, причем $p_+ > p_-$.

Проницаемости пропластков считаются заданными функциями давления. Влиянием давления на пористость породы пренебрегается. Фильтрация подчиняется нелинейному закону Дарси

$$v_i = - \frac{k_i(p_i)}{\mu} \operatorname{grad} p_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где v_i — скорость фильтрации, p_i — давление, μ — вязкость жидкости, i — индекс пропластка.

Очевидно, при решении задачи в принятой постановке достаточно рассмотреть картину течения в вертикальном сечении пласта, представляющем собой составной прямоугольник.

Подставляя (1.1) в уравнение неразрывности, получаем краевую задачу для уравнений

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[k_i(p_i) \frac{\partial p_i}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[k_i(p_i) \frac{\partial p_i}{\partial y} \right] = 0 \quad (1.2)$$

$$p_i(0, y) = p_+, \quad p_i(l, y) = p_-, \quad \partial p_1(x, h) / \partial y = \partial p_2(x, 0) / \partial y = 0 \quad (1.3)$$

и условия сопряжения

$$k_1 \partial p_1(x, h_2) / \partial y = k_2 \partial p_2(x, h_2) / \partial y, \quad p_1(x, h_2) = p_2(x, h_2) \quad (1.4)$$

Условия (1.4) означают непрерывность давления и нормальной составляющей скорости фильтрации на контакте пропластков ($y = h_2$).

Решение краевой задачи (1.2)–(1.4) дает распределение давления в пласте.

2. Чтобы избавиться от нелинейности в уравнениях (1.2), введем, как это обычно делается, потенциал скорости фильтрации

$$P_i = \mu^{-1} \int_0^{p_i} k_i(p_i) dp_i \quad (2.1)$$

и перейдем к нулевым граничным условиям на концах пласта ($x = 0, x = l$) при помощи соотношений

$$P_i = P_{i+} - U_i x + \Phi_i, \quad U_i = (P_{i+} - P_{i-}) / l \quad (2.2)$$

Теперь необходимо решить краевую задачу, связанную с уравнениями Лапласа

$$\Delta \Phi_i = 0 \quad (2.3)$$

где Δ — оператор Лапласа, и условиями

$$\begin{aligned} \Phi_i(0, y) = \Phi_i(l, y) = 0, \quad \partial \Phi_1(x, h) / \partial y = \partial \Phi_2(x, 0) / \partial y = 0 \\ \partial \Phi_1(x, h_2) / \partial y = \partial \Phi_2(x, h_2) / \partial y, \quad f_1[\Phi_1(x, h_2)] = f_2[\Phi_2(x, h_2)] \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь функция $f_i[\Phi_i(x, h_2)] = p_i(x, h_2)$ определяется как обратная для функции $\Phi_i(p_i)$ из (2.1) и (2.2).

Возьмем зависимость проницаемости от давления в виде [2]

$$k_i(p_i) = k_{0i} \exp(\alpha_i p_i) \quad (2.5)$$

где k_{0i} — проницаемость породы при давлении $p_i = 0$, α_i — коэффициент изменения проницаемости. В этом случае

$$P_i = \alpha_i^{-1} k_{0i} \mu^{-1} [\exp(\alpha_i p_i) - 1], \quad p_i = \alpha_i^{-1} \ln [1 + \alpha_i k_{0i}^{-1} \mu P_i] \quad (2.6)$$

Последнее условие (2.4) принимает вид

$$\alpha_1^{-1} \ln [1 + \alpha_1 k_{01}^{-1} \mu (\Phi_1 + P_{1+} - U_1 x)] = \alpha_2^{-1} \ln [1 + \alpha_2 k_{02}^{-1} \mu (\Phi_2 + P_{2+} - U_2 x)] \quad (2.7)$$

3. Рассмотрим практически интересный случай, когда проницаемость одного из пропластков постоянна или слабо зависит от давления ($\alpha_1 \approx 0, k_{01} = \text{const}$).

Тогда из (2.7)

$$\Phi_2 = \alpha_2^{-1} k_{02} \mu^{-1} \{ \exp[\alpha_2 k_{01}^{-1} \mu (\Phi_1 + P_{1+} - U_1 x)] - 1 \} + U_2 x - P_{2+} \quad (y = h_2) \quad (3.1)$$

Приближенное решение задачи можно получить, линеаризовав условие (3.1). Прежде чем перейти к линеаризации, отметим, что функция

$$k_{01}^{-1} \mu \Phi_1(x, h_2) = p_1'(x, h_2)$$

представляет собой отклонение давления на контакте пропластков от линейного распределения его по длине пласта (см. (2.1), (2.2)). Область изменения значений $p_1'(x, h_2)$ можно оценить, рассмотрев тот же пласт, но с непроницаемой «перегородкой» между слоями. Решая одномерную задачу (1.2), (1.3) или (2.3), (2.4) для каждого слоя в отдельности, получим

$$p_1(x) = p_+ - (p_+ - p_-) l^{-1} x, \quad p_2(x) = \alpha_2^{-1} \ln [e^{\alpha_2 p_+} - (e^{\alpha_2 p_+} - e^{\alpha_2 p_-}) l^{-1} x] \quad (3.2)$$

Из (3.2), в частности, следует, что $p_2(x) > p_1(x)$ в промежутке $0 < x < l$, т. е. давление во втором пропластке для фиксированного x , исключая концы пласта, выше, чем в первом.

Устранение перегородки естественно повлечет за собой перетоки из второго слоя в первый и некоторое выравнивание давления в них.

Следовательно, на границе $y = h_2$ установится некоторое промежуточное давление $p_1(x, h_2)$, т. е.

$$p_1(x) < p_1(x, h_2) = p_2(x, h_2) < p_2(x) \quad (3.3)$$

$$p_1(x, h_2) - p_1(x) = p_1'(x, h_2) < \Delta p(x) = p_2(x) - p_1(x) \quad (0 < x < l)$$

Расчеты показывают, что обычно максимальная величина произведения $\alpha_2 \Delta p(x)$ такова, что с достаточной точностью можно принять

$$\exp[\alpha_2 p_1'(x, h_2)] \approx 1 + \alpha_2 p_1'(x, h_2) \quad (3.4)$$

Подстановка (3.4) в (3.1) приводит к линеаризованному условию

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, h_2) - k_{01}^{-1} k_{02} \exp[\alpha_2 k_{01}^{-1} \mu (P_{1+} - U_1 x)] \Phi_1(x, h_2) = \\ = \alpha_2^{-1} k_{02} \mu^{-1} \{ \exp[\alpha_2 k_{01}^{-1} \mu (P_{1+} - U_1 x)] - 1 \} - P_{2+} + U_2 x \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Будем решать задачу (2.3)–(3.5) методом Фурье. Частные решения ищем в виде

$$\Phi_i = (B_i \operatorname{ch} \pi n y l^{-1} + C_i \operatorname{sh} \pi n y l^{-1}) \sin \pi n x l^{-1} \quad (i = 1, 2) \quad (4.1)$$

Очевидно, при любых B_i и C_i они удовлетворяют уравнениям (2.3) и первому условию (2.4). Второе условие (2.4) дает

$$C_1 = -B_1 \operatorname{th} \pi n h l^{-1}, \quad C_2 = 0$$

а из третьего следует:

$$B_2 = -B_1 \frac{\operatorname{sh} \pi n h_1 l^{-1}}{\operatorname{sh} \pi n h l^{-1} \operatorname{sh} \pi n h_2 l^{-1}}$$

Таким образом, решение задачи можно искать в виде суммы частных решений

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{ch} \pi n (h - y) l^{-1}}{\operatorname{ch} \pi n h l^{-1}} \sin \pi n x l^{-1} \quad (4.2)$$

$$\Phi_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \pi n h_1 l^{-1} \operatorname{ch} \pi n y l^{-1}}{\operatorname{ch} \pi n h l^{-1} \operatorname{sh} \pi n h_2 l^{-1}} \sin \pi n x l^{-1}$$

Постоянные коэффициенты A_n определяются из условия (3.5). Подставим (4.2) в соотношение (3.5), разложим правую часть его в ряд Фурье по синусам, а коэффициент при $\Phi_1(x, h_2)$ — по косинусам в промежутке $(0, l)$. После простых преобразований имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n R_n \sin \pi n x l^{-1} + \chi e^{\alpha_2 p_+} \sum_{m=1}^{\infty} A_m K_m \left[r^{-1} (e^{-r} - 1) + \right. \\ \left. + \frac{2r}{\pi^2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s e^{-r} - 1}{\pi^{-2} r^2 + s^2} \cos \pi s x l^{-1} \right] \sin \pi m x l^{-1} = \\ = 2 \frac{\chi r k_{01} e^{\alpha_2 p_+} (p_+ - p_-)}{\pi^3 \mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n e^{-r}}{n (\pi^{-2} r^2 + n^2)} \sin \pi n x l^{-1} \\ r = \alpha_2 (p_+ - p_-), \quad \chi = k_{02} k_{01}^{-1} \quad (4.3) \\ K_m = \frac{\operatorname{ch} \pi m h_1 l^{-1}}{\operatorname{ch} \pi m h l^{-1}} \quad R_n = \frac{\operatorname{sh} \pi n h_1 l^{-1} \operatorname{ch} \pi n h_2 l^{-1}}{\operatorname{ch} \pi n h l^{-1} \operatorname{sh} \pi n h_2 l^{-1}} \end{aligned}$$

Выражая в (4.3) произведение тригонометрических функций через сумму синусов и сравнивая коэффициенты при $\sin \pi n x l^{-1}$, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных

$$A_n [Rn + Kn\chi e^{\alpha_2 p + r^{-1}}(e^{-r} - 1)] + \chi \pi^{-2} r e^{\alpha_2 p} \left\{ \sum_{|m-s|=n} A_m K_m \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sign}(m-s) \left[\frac{(-1)^s e^{-r} - 1}{\pi^{-2} r^2 + s^2} \right] + \sum_{m+s=n} A_m K_m \left[\frac{(-1)^s e^{-r} - 1}{\pi^{-2} r^2 + s^2} \right] \right\} = \\ = \frac{2\chi r k_{01} e^{\alpha_2 p + (p_+ - p_-)} [(-1)^n e^{-r} - 1]}{\pi^3 \mu n (\pi^{-2} r^2 + n^2)} \quad (4.4)$$

Бесконечная система (4.4) приводится к вполне регулярной системе [3], откуда следует, что она имеет единственное ограниченное решение.

Для приближенного решения системы (4.4) можно ограничиться конечным числом n , т. е. искать решение соответствующей редуцированной системы. Согласно [3] решение редуцированной системы при $n \rightarrow \infty$ стремится к решению исходной системы.

5. Определим наиболее характерные потоки в пласте. Горизонтальная составляющая скорости фильтрации

$$v_{ix} = -\partial P_i / \partial x = U_1 - \partial \Phi_i / \partial x \quad (5.1)$$

в пропластке 1

$$v_{1x} = U_1 - \pi l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n n \frac{\operatorname{ch} \pi n (n-y) l^{-1}}{\operatorname{ch} \pi n h l^{-1}} \cos \pi n x l^{-1} \quad (5.2)$$

в пропластке 2

$$v_{2x} = U_2 + \pi l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n n \frac{\operatorname{sh} \pi n h_1 l^{-1} \operatorname{ch} \pi n y l^{-1}}{\operatorname{ch} \pi n h l^{-1} \operatorname{sh} \pi n h_2 l^{-1}} \cos \pi n x l^{-1} \quad (5.3)$$

Соответствующие расходы жидкости в пропластках на единицу ширины потока

$$q_{1x} = \int_{h_2}^h v_{1x} dy = q_1 - l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \pi n h_1 l^{-1}}{\operatorname{sh} \pi n h l^{-1}} \cos \pi n x l^{-1} \quad (5.4) \\ q_{2x} = \int_0^{h_2} v_{2x} dy = q_2 + l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \pi n h_1 l^{-1}}{\operatorname{sh} \pi n h l^{-1}} \cos \pi n x l^{-1}$$

Отсюда легко определяются расходы на границах пласта

$$q_{1\pm} = q_1 - l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\operatorname{sh} \pi n h_1 l^{-1}}{\operatorname{ch} \pi n h l^{-1}} (\pm 1)^n \quad (5.5) \\ q_{2\pm} = q_2 + l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi n h_1 l^{-1}}{\operatorname{ch} \pi n h l^{-1}} (\pm 1)^n$$

Верхний знак соответствует входному сечению ($x = 0$), нижний — выходному ($x = l$). Заметим, что первые слагаемые в правых частях (5.5) представляют собой расходы в пласте с изолированными пропластками.

В соответствии с (5.5) устранение непроницаемой перемычки между пропластками приводит к выравниванию профиля приемистости (расхода на входе) и, наоборот, увеличению неравномерности профиля притока (расхода на выходе). Суммарный расход жидкости остается неизменным.

Нормальная составляющая скорости фильтрации на контакте пропластков

$$v_n(x, h_2) = -\partial\Phi_1|\partial y|_{y=h_2} = -\partial\Phi_2|\partial y|_{y=h_2} = \pi l^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n n \frac{\text{sh } \pi n h l^{-1}}{\text{ch } \pi n h l^{-1}} \sin \pi n x l^{-1} \quad (5.6)$$

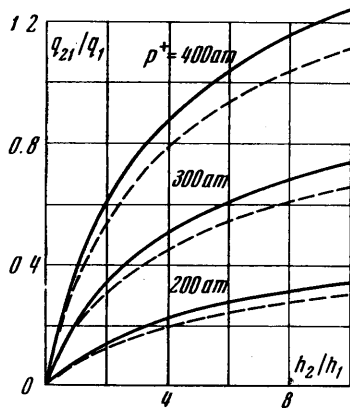
Суммарный переток из пропластка 2 в пропласток 1

$$q_{21} = \int_0^l v_n(x, h_2) dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n [1 - (-1)^n] \frac{\text{sh } \pi n h_1 l^{-1}}{\text{ch } \pi n h l^{-1}} \quad (5.7)$$

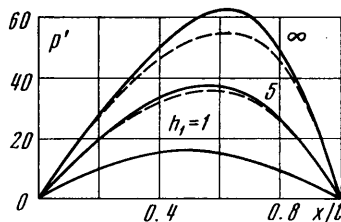
Очевидно, он может быть найден и другим способом

$$q_{21} = q_{1-} - q_{1+} = q_{2+} - q_{2-}. \quad (5.8)$$

6. Из предыдущего видно, что процесс фильтрации определяется пятью безразмерными параметрами. Это χ , r , α_2 , p_+ и два параметра из следующих трех: h/l , h_1/l , h_2/l . Когда мощность пласта мала по сравнению с его длиной, имеем $h/l \approx 0$. Раскрывая соответствующие неопределенности (например, в формулах (4.2)), получим, что при $h/l \rightarrow 0$ в качестве определяющего параметра можно взять любое из отношений h_1/h , h_2/h_1 и т. п.



Фиг. 1



Фиг. 2

Рассмотрим конкретный пример. В нефтяной пласт, представленный двумя соприкасающимися пропластками, нагнетается вода под давлением p_+ . Забойное давление во всех случаях неизменно ($p_- = 100 \text{ ат}$). Коэффициенты изменения проницаемости $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0.5 \cdot 10^{-2} \text{ ат}^{-1}$. Соотношение проницаемостей пропластков $\chi = 0.1$. Мощность пласта мала по сравнению с его длиной, т. е. $h/l \approx 0$. Физические свойства воды и нефти идентичны.

С помощью полученных выше формул определялись суммарный относительный переток и распределение давления в пропластках, причем при суммировании рядов удерживались первые три члена.

Коэффициенты A_1 , A_2 , A_3 отыскивались как решения соответствующей редуцированной системы (см. (4.4)). Безразмерные значения этих коэффициентов $A_n' = A_n k_{01}^{-1} \mu \times (p_+ - p_-)^{-1}$, рассчитанные для нескольких соотношений мощностей пропластков и $p_+ = 400 \text{ ат}$, даны в таблице.

$h_2 h_1^{-1}$	0,2	0,5	1	2
A_1^1	$0.13 \cdot 10^{-1}$	$0.301 \cdot 10^{-1}$	$0.52 \cdot 10^{-1}$	$0.828 \cdot 10^{-1}$
A_2^1	$0.98 \cdot 10^{-3}$	$0.15 \cdot 10^{-2}$	$0.1 \cdot 10^{-2}$	$-0.18 \cdot 10^{-2}$
A_3^1	$0.5 \cdot 10^{-3}$	$0.1 \cdot 10^{-2}$	$0.16 \cdot 10^{-2}$	$0.23 \cdot 10^{-2}$
$h_2 h_1^{-1}$	5	10	20	∞
A_1^1	0.129	0.158	0.179	0.205
A_2^1	$-0.107 \cdot 10^{-1}$	$-0.196 \cdot 10^{-1}$	$-0.266 \cdot 10^{-1}$	$0.379 \cdot 10^{-1}$
A_3^1	$0.39 \cdot 10^{-2}$	$-0.62 \cdot 10^{-2}$	$0.74 \cdot 10^{-2}$	$0.107 \cdot 10^{-1}$

На фиг. 1. приведены результаты расчетов (сплошные линии) суммарного относительного перетока в зависимости от соотношения мощностей пропластков. Результаты показывают, что перетоки в слоистых пластах могут достигать значительной величины.

Очевидно, если не учитывать изменение проницаемости пропластка 2 с давлением, расчетная величина перетока будет равна нулю. С уменьшением давления p_+ кривые приближаются к оси абсцисс. Аналогичное влияние на поведение кривых оказывает соотношение проницаемостей пропластков χ . Следует отметить также, что относительный суммарный переток растет при увеличении параметра h_2/h_1 , стремясь к некоторому пределу, в то же время абсолютная величина q_{21} имеет максимум и при $h_2/h_1 \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

На фиг. 2 приведены кривые отклонения давления в пласте от линейного закона в зависимости от безразмерной координаты x/l для $p_+ = 400$ ат. При $h_2/h_1 \rightarrow 0$ распределение давления стремится к линейному.

7. Точность полученных выше результатов оценивается достаточно просто, так как в случае $h/l \approx 0$ возможно точное решение задачи.

Устремляя h/l к нулю и сравнивая соотношения (4.2), получим

$$h_2^{-1} h_1^4 \Phi_1(x, 0) = -\Phi_2(x, 0) \quad (7.1)$$

Подставив (7.1) в (3.1), получим трансцендентное уравнение

$$\Phi_1 = -h_1^{-1} h_2^4 [\alpha_2^{-1} k_{02} \mu^{-1} \{ \exp[\alpha_2 k_{01}^{-1} \mu (\Phi_1 + P_{1+} - U_1 x)] - 1 \} + U_2 x - P_{2+}] \quad (7.2)$$

которое решается численно, например методом подбора.

На фиг. 2 приведены результаты решения (пунктирные кривые) уравнения (7.2) относительно функции $p'(x, 0) = k_{01}^{-1} \mu \Phi_1(x, 0)$.

Сравнение приближенного и точного решений показывает, что наибольшая относительная погрешность при определении давления в пласте не превышает 3%. Погрешность быстро уменьшается при увеличении h_2/h_1 .

Так, уже при $h_2/h_1 = 1$ точное и приближенное решения практически совпадают.

Определим точное значение перетоков в пласте. Проинтегрируем левую и правую части (7.2) по x . Решим полученное уравнение относительно $d\Phi_1/dx$, после чего найдем относительный расход через пропласток 1.

На входе

$$q_{1+}/q_1 = 1 - U_1^{-1} \frac{d\Phi_1(0, 0)}{dx} = 1 + \frac{r^{-1}(1 - e^{-r}) - 1}{T + 1}, \quad T = \frac{h_1}{h_2 \chi e^{\alpha_2 p_+}}, \quad q_1 = U_1 h_1 \quad (7.3)$$

на выходе

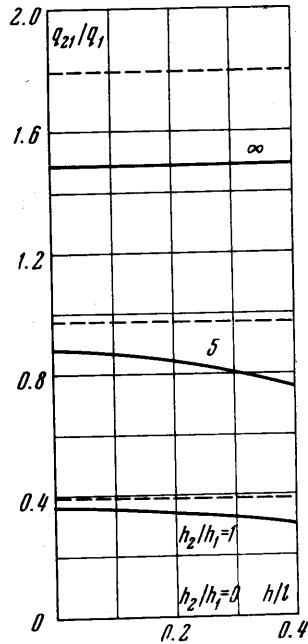
$$q_{1-}/q_1 = 1 - U_1^{-1} \frac{d\Phi_1(l, 0)}{dx} = 1 + \frac{r^{-1}(1 - e^{-r}) - e^{-r}}{T + e^{-r}} \quad (7.4)$$

Суммарный относительный переток определяется при помощи (5.8).

На фиг. 1 пунктирными кривыми приведены результаты расчетов q_{21}/q_1 при помощи формул (7.3), (7.4) и (5.8). Согласно этим расчетам максимальная относительная погрешность приближенного решения (сплошные линии) составляет $\sim 17\%$.

Погрешность приближенных решений при $h/l \neq 0$ меньше, чем в случае $h/l \rightarrow 0$, так как соответствующие ряды (см. (4.2), (5.2), (5.3)) сходятся тем быстрее, чем больше h/l . Поэтому оценки для случая $h/l = 0$, $h_2/h_1 \rightarrow \infty$ следует считать верхними оценками для всего диапазона изменения h/l и h_2/h_1 . Решение при $h/l = 0$ можно рассматривать как решение задачи в гидравлической постановке.

На фиг. 3 приведены зависимости суммарного относительного перетока от h/l для трех значений параметра h_2/h_1 и давления нагнетания $p_+ = 400$ ат, полученные с помощью приближенных решений. Пунктиром показаны решения задачи в гидравлической постановке. По-видимому, точные решения для $h_2/h_1 = 5$ и $h_2/h_1 = 1$ находятся между пунктирной и сплошной линиями, причем соответствующие кривые несколько круче, чем приведенные на фиг. 3, поскольку погреш-



Фиг. 3

ность приближенного решения, как отмечалось выше, увеличивается с уменьшением h/l .

Таким образом, гидравлическая теория дает наиболее точные результаты для достаточно малых и больших соотношений мощности пропластков h_2/h_1 в широком диапазоне изменения h/l .

Поступило 12 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Добрынин В. М. Физические свойства нефтегазовых коллекторов в глубоких скважинах. М., «Недра», 1965.
2. Николаевский В. Н. К построению нелинейной теории упругого режима фильтрации жидкости и газа. ПМТФ, 1961, № 4.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.

УДК 532.58.82

ОБТЕКАНИЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЫ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЗАДАННЫМ НА СФЕРЕ КОНЕЧНОГО РАДИУСА

Ю. Г. ОВСЕНКО

(Новочеркасск)

В нелинейной постановке рассматривается установившееся неосесимметричное обтекание вращающейся сферы потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса, когда векторы скорости потока и угловой скорости вращения сферы не коллинеарны. Вычисляются момент сопротивления вращению и проекции силы сопротивления в виде рядов по степеням числа Рейнольдса. Косое обтекание вращающейся сферы приводит к меньшему моменту сопротивления вращению, чем осесимметричное.

Одной и той же реальной задаче может соответствовать несколько математических моделей.

Так обстоит дело и с задачей обтекания сферы потоком. Классическая модель — обтекание сферы потоком, равномерным на бесконечности, до сих пор строго не решена. Рассматриваемая в статье модель обтекания сферы предложена К. И. Страховичем [1]. Суть ее в том, что поток задается на сфере конечности радиуса r_1 . Это дает возможность найти точное решение задачи методом малого параметра. В этой постановке решены задачи об обтекании неподвижной сферы [2], об обтекании вращающейся сферы в случае, когда вектор скорости потока коллинеарен вектору угловой скорости вращения сферы [3]. Сравнение результатов, полученных в работах [2, 3], с классическими указывает на то, что обе модели, математически совершенно разные, приводят к одинаковым физическим выводам: силы сопротивления в обоих случаях имеют один и тот же порядок. Невозможность предельного перехода $a \rightarrow \infty$ в полученных формулах связана с тем, что решение указанных выше задач в классической постановке ($a = \infty$) не может быть найдено методом малого параметра, что известно еще со времени Уайтхеда (1889 г.). Объяснение парадокса Уайтхеда дано в работах [1, 4].

1. **Постановка задачи.** Пусть сфера радиуса r_1 , вращающаяся вокруг оси, которая проходит через ее центр, с угловой скоростью ω , обтекается потоком несжимаемой вязкой жидкости, заданным на сфере конечного радиуса r_2 , причем задаваемые векторы скорости v_0 и ω образуют между собой угол β . Без ограничения общности, можно считать, что вектор ω направлен по оси z , а v_0 ортогонален оси y . Граничные условия задачи в сферической системе координат таковы:

$$\begin{aligned} v_r &= \omega r_1 \sin \theta, & v_r &= v_\theta = 0 & (r &= r_1) \\ v_\varphi &= -v_0 \sin \beta \sin \varphi \\ v_\theta &= v_0 (\sin \beta \cos \theta \cos \varphi - \cos \beta \sin \theta) & (r &= r_2) \\ v_r &= v_0 (\sin \beta \sin \theta \cos \varphi + \cos \beta \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.1)$$