УДК 532.546:532.72

О НЕКОТОРЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ В ЗАДАЧАХ РАССОЛЕНИЯ ГРУНТОВ

Ю. И. КАПРАНОВ

(*Новосибирск*)

Построены точные решения двух задач рассоления грунтов. На подвижной границе промачивания ставится условие, отражающее мгновенный переход солей из твердой фазы в раствор.

1. Рассмотрим цилиндрический образец грунта с постоянными пористостью m и коэффициентом объемного засоления n_0. Движение будем считать одномерным. Если на вход $(x = 0)$ сухого образца подавать пресную воду, то внутри него образуется область с подвижной границей $(0 \leqslant x \leqslant x_0(t))$, где происходит рассоление. Здесь следует учитывать одновременно и конвективную диффузию и кинетику растворения солей твердой фазы (см., например, [1]).

Необходимо рассматривать две зоны [1]: примыкающую к входу образца зону *1* с $0 \leqslant x \leqslant x_1(t)$ и соседнюю с ней зону *2*, где $x_1(t) \leqslant x \leqslant x_0(t)$. Зона *2* характеризуется тем, что в ней происходит полный переход солей из твердой фазы в раствор, а в зоне *1* имеет место лишь перераспределение концентрации $c(x, t)$ за счет диффузии. Это перераспределение описывается уравнением конвективной диффузии [1]

$$(Dc_x)_x - vc_x = mc_t \tag{1.1}$$

где v — скорость фильтрации, а D — коэффициент диффузии, которые предполагаются постоянными.

На входе образца можно ставить одно из следующих условий:

$$c = 0, \qquad Dc_x = vc \tag{1.2}$$

Граница промачивания $x = x_0(t)$ определяется формулой

$$mx_0(t) = vt$$

Если соли растворяются достаточно быстро, то ширину зоны *2* можно считать равной нулю, т. е. $x_1(t) = x_0(t) = vt / m$, а все ее влияние на зону *1* внести в граничное условие. Последнее записывается в виде

$$mDc_x = n_0 v, \qquad x = vt / m \tag{1.3}$$

В данной работе строятся точные решения задач (1.1), (1.3) при каждом из условий (1.2). Удобно ввести безразмерные переменные и функцию

$$D\xi = vx, \qquad mD\tau = v^2 t, \qquad n_0 u(\xi, \tau) = mc(x, t) \tag{1.4}$$

$$g(\xi, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\tau}\right) \tag{1.5}$$

Тогда задачи запишутся в следующем виде:

$$u_{\xi\xi} - u_\xi = u_\tau, \qquad 0 < \xi < \tau \tag{1.6}$$

$$u_\xi = 1, \qquad \xi = \tau > 0 \tag{1.7}$$

$$u = 0, \quad \xi = 0, \quad \tau > 0 \tag{1.8}$$

$$u_\xi = u, \qquad \xi = 0, \quad \tau > 0 \tag{1.9}$$

2. Пусть $u(\xi, \tau)$ продолжена на весь квадрант $\xi > 0$, $\tau > 0$ как решение уравнения (1.6) и пусть при $\tau = 0$ она принимает некоторые искомые значения $u(\xi, 0) = \rho(\xi)$, причем выполнено условие

$$\rho(0) = 0 \tag{2.1}$$

При определенных ограничениях на рост $\rho(\xi)$ единственное решение представляется в виде [2]

$$u(\xi, \tau) = \int_0^\infty \exp\left(\frac{\xi - s}{2} - \frac{\tau}{4}\right) [g(\xi - s, \tau) - g(\xi + s, \tau)]\, \rho(s)\, ds$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению (1.6) и краевому условию (1.8) при любом $\rho(\xi)$ с условием (2.1). Чтобы определить $\rho(\xi)$, вычислим u_ξ и подставим в граничное условие (1.7). В результате получим интегральное уравнение

$$\int_0^\infty sg(s,\tau)f(s)\,ds = 2\tau, \qquad f(s) = \rho(s)(1+e^{-s})$$

Если произвести один раз интегрирование по частям, используя (2.1), то это уравнение сведется к тривиальному

$$\int_0^\infty g(s,\tau)f'(s)\,ds = 1$$

решением которого будет $f'(\xi) = 2$.

С учетом (2.1) находим $f(\xi) = 2\xi$ и, следовательно

$$u(\xi,\tau) = \exp\left(\frac{\xi}{2} - \frac{\tau}{4}\right)\int_0^\infty \frac{s}{\operatorname{ch}(s/2)}[g(\xi-s,\tau) - g(\xi+s,\tau)]\,ds \tag{2.2}$$

Заметим, что непрерывное вместе с u_ξ в треугольной области $0 \leqslant \xi \leqslant \tau$ решение задачи единственно. В самом деле, пусть u_1 и u_2 — два решения. Тогда их разность u удовлетворяет уравнению (1.6) и однородным условиям (1.7), (1.8).

Вводим функцию [3]

$$H(\tau) = \int_0^\tau u^2(\xi,\tau)\,d\xi \tag{2.3}$$

Имеем

$$H'(\tau) = u^2(\tau,\tau) + [2uu_\xi - u^2]_{\xi=0}^{\xi=\tau} - 2\int_0^\tau u_\xi^2\,d\xi \leqslant 0$$

Из $H(0) = 0$ получаем $H(\tau) \equiv 0$, а потому и $u = 0$.

Представление (2.2) показывает, что при фиксированном x с ростом t концентрация очень быстро стремится к нулю. Однако на фронте $\xi = \tau$ при больших τ имеет место рост $u(\tau,\tau) = 2(\tau/\pi)^{1/2} + O(1)$. Это налагает ограничения на применимость рассматриваемой схемы при больших временах.

3. Опять считаем u продолженной на весь квадрант $\xi > 0$, $\tau > 0$ как решение уравнения (1.6) с искомым начальным значением $\rho(\xi)$, причем вместо (2.1) требуем

$$\rho'(0) - \rho(0) = 0 \tag{3.1}$$

Тогда функция

$$U(\xi,\tau) = \exp\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\tau}{4}\right)(ue^{-\xi})_\xi \tag{3.2}$$

в этом квадранте будет удовлетворять обычному уравнению теплопроводности и краевым условиям

$$U(0,\tau) = 0, \quad U(\xi,0) = f(\xi), \quad f(\xi) = [\rho(\xi)e^{-\xi}]'\exp\xi/2$$

причем $f(0) = 0$. При определенных ограничениях на рост $f(\xi)$ единственное решение имеет вид

$$U(\xi,\tau) = \int_0^\infty [g(\xi-s,\tau) - g(\xi+s,\tau)]f(s)\,ds \tag{3.3}$$

Поэтому

$$u(\xi,\tau) = e^\xi\left[\varphi(\tau) + \int_0^\xi \exp\left(-\frac{s}{2} - \frac{\tau}{4}\right)U(s,\tau)\,ds\right]$$

где $\varphi(\tau)$ — неизвестная функция, получившаяся в результате интегрирования соотношения (3.2) по ξ. Используя тот факт, что U есть решение уравнения теплопроводности, и применяя интегрирование по частям, находим, что

$$u_{\xi\xi} - u_\xi - u_\tau = -e^\xi [\varphi'(\tau) - U_\xi(0, \tau) \exp(-\tau/4)]$$

Поэтому

$$\varphi(\tau) = \varphi(0) + \int_0^\tau U_\xi(0, y) \exp(-y/4)\, dy$$

$$u(\xi, 0) = \rho(\xi) + [\varphi(0) - \rho(0)]e^\xi, \text{ т. е. } \varphi(0) = \rho(0)$$

Тем самым $\varphi(\tau)$ определена через $\rho(\xi)$ полностью и

$$u(\xi, \tau) = e^\xi \left[\rho(0) + \int_0^\tau U_\xi(0, y) e^{-y/4}\, dy + \int_0^\xi U(s, \tau) e^{-s/2-\tau/4}\, ds\right] \tag{3.4}$$

Осталось потребовать выполнения граничного условия (1.7). Оно приводит к довольно громоздкому интегральному уравнению на f

$$e^{-\tau} = \rho(0) + \int_0^\tau U_\xi(0, y) e^{-y/4}\, dy + \int_0^\tau U(s, \tau) e^{-s/2-\tau/4}\, ds + U(\tau, \tau) e^{-3\tau/4} \tag{3.5}$$

Из непрерывности всех подынтегральных функций в этом уравнении следует, что $\rho(0) = 1$.

Если продифференцировать (3.5) по τ, произвести интегрирование по частям и использовать условие $f(0) = 0$, то придем к существенно более простому интегральному уравнению

$$^3/_4 U(\tau, \tau) + 2U_\xi(\tau, \tau) + U_\tau(\tau, \tau) = -e^{-\tau/4} \tag{3.6}$$

которое содержит лишь однократные интегралы от f. Заметим теперь, что

$$U_\xi = \int_0^\infty [g(\xi - s, \tau) + g(\xi + s, \tau)] f'(s)\, ds$$

$$U_\tau = \int_0^\infty [g(\xi - s, \tau) - g(\xi + s, \tau)] f''(s)\, ds$$

Следовательно, (3.6) представляется в виде

$$\int_0^\infty g(s, \tau) \operatorname{sh}\frac{s}{2} \left[f'' + 2\operatorname{cth}\frac{s}{2} f' + \frac{3}{4} f\right] ds = -\frac{1}{2}$$

Рассуждая аналогично решению соответствующего интегрального уравнения в п.2, находим, что

$$\operatorname{sh}\frac{\xi}{2} f'' + 2\operatorname{ch}\frac{\xi}{2} f' + \frac{3}{4}\operatorname{sh}\frac{\xi}{2} f = -1, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{sh}\frac{\xi}{2} f' + \frac{3}{2}\operatorname{ch}\frac{\xi}{2} f = -\xi$$

При этом предположена ограниченность f' в нуле и использовано, что $f(0) = 0$. Единственным обращающимся в нуль при $\xi = 0$ решением полученного обыкновенного дифференциального уравнения будет

$$f(\xi) = -2\exp\left(-\frac{3}{2}\xi\right)(e^\xi - 1)^{-3} \int_0^\xi s e^{2s} (e^s - 1)^2\, ds \tag{3.7}$$

Так как $f(\xi)$ обладает требуемыми свойствами, то все предыдущие рассуждения оказываются законными и их можно обратить. Поэтому $u(\xi, \tau)$, определенная формулой (3.4), с $\rho(0) = 1$, где U задается представлением (3.3), есть точное решение задачи.

Единственность показывается аналогично предыдущему случаю. В самом деле, если имеются два решения u_1, u_2 задачи, то функция $u = e^{-\xi}(u_1 - u_2)$ будет удовлетворять уравнению $u_{\xi\xi} + u_\xi = u_\tau$ и краевым условиям $u_\xi = 0$ при $\xi = 0$, $u_\xi = -u$ при $\xi = \tau$. Тогда для H из (2.3) получаем неравенство

$$H'(\tau) = -u^2(0, \tau) - 2\int_0^\tau u_\xi^2\, d\xi \leqslant 0$$

Значит $u \equiv 0$, а потому и $u_1 \equiv u_2$.

Несколько более длинные вычисления показывают, что $u \to 0$ при любом фиксированном ξ и $\tau \to \infty$.

На границе промачивания

$$u(\tau, \tau) = 1 - 2\int_0^\infty \operatorname{sh}\frac{s}{2}\, g(s, \tau) f(s)\, ds$$

Отсюда можно получить, что при $\tau \to \infty$ граничное значение $u(\tau, \tau)$ растет не быстрее $\sqrt{\tau}$.

В заключение автор благодарит В. И. Пеньковского за постановку и неоднократное обсуждение задачи.

Поступило 20 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Сб. «Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917—1967)», М., «Наука», 1969.
2. Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными, Изд. 3. Физматгиз, 1961, стр. 346.
3. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. М., «Мир», 1964, стр. 204.

УДК 532.546.013.3

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В СЛОИСТОМ ПЛАСТЕ

Р. М. КАЦ

(*Москва*)

Рассматривается задача об установившемся движении жидкости в прямоугольном пласте, состоящем из двух сообщающихся пропластков с различной проницаемостью и разной зависимостью ее от давления.

Многочисленными экспериментальными исследованиями [1] установлено, что физические свойства нефтяных коллекторов в той или иной степени зависят от давления. В частности, проницаемость сцементированных малопроницаемых пород существенно зависит от давления, а для чистых высокопроницаемых пород изменение проницаемости в широком диапазоне давлений незначительно. В связи с этим представляет интерес изучение фильтрации в неоднородном пласте с учетом зависимости его проницаемости от давления. Приводится пример расчета гипотетического пласта, оценивается точность полученных результатов.

1. Рассматривается фильтрация несжимаемой жидкости в бесконечном по ширине пласте длиной l, состоящем из двух пропластков. Проницаемость и мощность пропластков — соответственно k_1, k_2 и h_1, h_2. Кровля и подошва пласта непроницаемы. На концах пласта поддерживаются постоянные давления p_+ и p_- соответственно, причем $p_+ > p_-$.

Проницаемости пропластков считаются заданными функциями давления. Влиянием давления на пористость породы пренебрегается. Фильтрация подчиняется нелинейному закону Дарси

$$v_i = -\frac{k_i(p_i)}{\mu}\operatorname{grad} p_i \qquad (i = 1, 2) \tag{1.1}$$

где v_i — скорость фильтрации, p_i — давление, μ — вязкость жидкости, i — индекс пропластка.