

УДК 541.12.011.3

К ТЕОРИИ ДИСКОВОЙ ЭКСТРУЗИИ ПОЛИМЕРОВ

А. Н. ПРОКУНИН

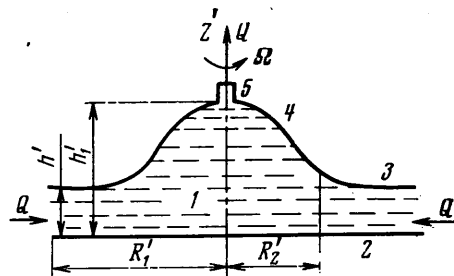
(Москва)

Теория дисковой экструзии в безынерционном приближении в изотермических условиях рассмотрена на примере четырехконстантной модели Олдройда.

Для экструзии расплавов и растворов полимеров делаются попытки использовать так называемый «дисковый» (беспнековый) экструдер, принцип действия которого основан на эффекте Вейссенберга. Впервые данный метод экструзии расплавов полимеров экспериментально изучался в работе [1]. В работе [2] эксперимент проводился на растворах полимеров. Выражение для производительности экструдера было теоретически получено при помощи энергетического подхода в работе [3]. Правильной качественной картины оно не дает, а расхождение количественных результатов с экспериментальными достигает двух порядков.

Схематично дисковый экструдер показан на фигуре. В зазоре шириной h' между двумя параллельными дисками радиуса R_1' находится упруго-вязкая жидкость 1. Верхний диск 3 вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси z' , нижний 2 — неподвижен. В центральной части верхнего диска находится расширение 4 с характерными размерами R_2' и h_1' и капилляр 5 длины L' и диаметра d' . Под действием нормальных напряжений, возникающих в зазоре, жидкость, поступающая с торцов дисков, выдавливается через капилляр с расходом Q . Для перечисленных линейных размеров обычно выполняются следующие неравенства: $h_1' \gg h'$ и $R_1' \gg R_2' \gg h'$, так что основное течение жидкости осуществляется в зазоре между дисками (в зоне больших скоростей сдвига). В расширенной зоне движение жидкости медленное, поэтому давление в ней можно считать постоянным.

Рассмотрим стационарное течение в безынерционном приближении (медленное движение высоковязкой жидкости) в изотермических условиях. Предполагаем, что реологическое поведение несжимаемой упруго-вязкой жидкости описывается уравнениями, предложенными в работе [4]



$$\theta_1 \left(\frac{\Delta S^{km}}{\Delta t} \right) + \theta_1 (1 + \varepsilon) \left\{ S^{k\alpha} e_{\alpha}^m + S^{m\alpha} e_{\alpha}^k - \right. \quad (1)$$

$$\left. - \frac{2}{3} g^{km} (e^{\alpha\beta} S_{\beta\alpha}) \right\} + S^{km} = 2\eta \left(1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) e^{km}$$

$$S^{km} = \tau^{km} - 2\eta \frac{\theta_2}{\theta_1} e^{km} \quad (2)$$

$$\frac{\Delta S^{km}}{\Delta t} = \frac{\partial S^{km}}{\partial t} + v^\alpha \nabla_\alpha S^{km} + \omega_{\alpha}^{k'} S^{\alpha m} - S^{k\alpha} \omega_{\alpha}{}^{m'} \quad (3)$$

$$\tau_{km}' = -p' \delta_{km} + \tau_{km} \quad (4)$$

$$e_{km} = 1/2 (\nabla_k v_m' + \nabla_m v_k'), \quad \omega_{km} = 1/2 (\nabla_k v_m' - \nabla_m v_k') \quad (5)$$

Здесь τ_{km}' , e_{km} и ω_{km} — компоненты тензоров напряжения, скорости деформации и вихря; g_{km} и v_k' — компоненты фундаментального метрического тензора и вектора скорости; δ_{km} — символ Кронекера; P' — изотропное давление; $\Delta S^{km} / \Delta t$ — ямановская тензорная производная; ∇_k — символ ковариантного дифференцирования; ε — безразмерный параметр; θ_1 и θ_2 — времена релаксации и ретордации; η — начальная (ньютоновская) вязкость. На параметры ε , θ_1 , θ_2 и η накладываются следующие ограничения [4]:

$$\eta > 0, \quad \theta_1 \geq \theta_2 > 1/3 \theta_1, \quad -1 - \sqrt{3} < \varepsilon < -1/7 \quad (6)$$

Введем цилиндрические координаты r' , φ' и z' , направив ось z' перпендикулярно дискам (см. фигуру). Реологические уравнения (1) — (4), записанные в этих координатах с учетом угловой симметрии, совместно с уравнениями движения среды и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \quad (7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) = 0 \quad (10)$$

представляют собой замкнутую систему уравнений.

Здесь и далее введены следующие безразмерные величины:

$$r = \frac{r'}{h'}, \quad z = \frac{z'}{h'}, \quad R_1 = \frac{R_1'}{h'}, \quad R_2 = \frac{R_2'}{h'}, \quad L = \frac{L'}{h'}$$

$$d = \frac{d'}{h'}, \quad \theta = \frac{\theta_2}{\theta_1}, \quad \sigma_{km} = \frac{\tau_{km} \theta_1}{\eta}, \quad P = \frac{P' \theta_1}{\eta}$$

$$P_0 = \frac{P_0' \theta_1}{\eta}, \quad v_k = \frac{v_k' \theta_1}{h'}, \quad \omega = \Omega \theta_1, \quad q = \frac{Q \theta_1}{(h')^3}, \quad M = \frac{M' \theta_1}{\eta (h')^3}$$

Для составляющих скорости v_r , v_z , v_φ потребуем выполнения условия прилипания на твердых поверхностях.

Решение данной системы в случае движения жидкости между двумя дисками неограниченного радиуса при условиях прилипания $v_\varphi = \omega r$ при $z = 1$ и $v_\varphi = 0$ при $z = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} v_r = v_z = 0, \quad v_\varphi = \omega r z, \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0 \\ \sigma_{\varphi z} = (r\omega + \theta r^3 \omega^3 n) (1 + r^2 \omega^2 n)^{-1} \\ \sigma_{kk} = [(\theta - 1) r^2 \omega^2 m_k] (1 + r^2 \omega^2 n)^{-1} \quad (k = r, \varphi, z) \\ m_\varphi = 1/3 (\varepsilon - 2), \quad m_r = -2/3 (1 + \varepsilon) \\ m_z = 1/3 (\varepsilon + 4), \quad n = 1/3 (-\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 2) \end{aligned} \quad (11)$$

В указанном выше диапазоне изменения ε величина $n > 0$.

При наличии капилляра в зазоре между дисками возникает вторичное течение с радиальным расходом q . Жидкость из зазора поступает в расширенную зону и далее выдавливается через капилляр. Так как движение в расширенной зоне медленное, можно считать, что в ней реализуется постоянное давление. Таким образом, имеются две области с постоянным давлением: расширенная зона и зона подачи жидкости в зазор (см. фигуру). Рассмотрев движение жидкости между дисками и через капилляр при постоянном давлении в предвходовой (расширенной) зоне, будем сопрягать решения этих задач при условии постоянства давления в расширенной зоне с учетом постоянства расхода.

Будем искать решение задачи (1) — (10) при наличии радиального течения для $\sqrt{n} \omega r > 1$ и $r > 1$ в виде рядов

$$\begin{aligned}
 v_k &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{v_k^{(-l)}}{r^l}, & v_\varphi &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{v_\varphi^{(-l)}}{r^l} + \omega r z & (k = r, z) \\
 \sigma_{rk} &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{rk}^{(-l)}}{r^l} & (k = z, \varphi) \\
 \sigma_{\varphi z} &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\varphi z}^{(-l)}}{r^l} + \left[(1 - \theta) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{(\omega r)^{2l+1} n^l} + \theta \omega r \right] & (12) \\
 \sigma_{hk} &= \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{hk}^{(-l)}}{r^l} + (\theta - 1) m_k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+2}}{(\omega r)^{2l+1} n^{l+1}} & (k = r, \varphi, z)
 \end{aligned}$$

Вторые слагаемые в правых частях (12) есть решение задачи для основного течения (11), представленное в виде ряда при $\sqrt{n} \omega r > 1$. Здесь должны выполняться следующие граничные условия:

$$v_k^{(-l)}|_{z=0} = v_k^{(-l)}|_{z=1} = 0 \quad (k = r, \varphi, z) \quad (13)$$

Из условия постоянства расхода получаем

$$-2\pi \int_0^1 v_r^{(-l)} dz = q \delta_{l1} \quad (14)$$

где q — расход, δ_{l1} — символ Кронекера.

Подставляя (12) в уравнения (1) — (10) и приравнивая члены при одинаковых степенях r , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon - 2) \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} \left(\sigma_{rz}^{(-1)} - \theta \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} \right) + 2(1 + \varepsilon) \left[\frac{(\theta - 1)(2 + \varepsilon)}{n} v_r^{(-1)} - \right. \\
 \left. - \omega \left(\sigma_{\varphi z}^{(-3)} - \theta \frac{dv_\varphi^{(-3)}}{dz} \right) \right] + 3\sigma_{rr}^{(-2)} = -6v_r^{(-1)} \\
 (\varepsilon - 2) \omega \left(\sigma_{\varphi z}^{(-3)} - \theta \frac{dv_\varphi^{(-3)}}{dz} \right) + 2(1 + \varepsilon) \left[\frac{2(1 - \theta)}{n} v_r^{(-1)} - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sigma_{rz}^{(-1)} - \theta \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} \right) \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} \Big] + 3\sigma_{\varphi\varphi}^{(-2)} = 6v_r^{(-1)} \\
(\varepsilon + 4) & \left[\omega \left(\sigma_{\varphi z}^{(-3)} - \theta \frac{dv_\varphi^{(-3)}}{dz} \right) + \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} \left(\sigma_{rz}^{(-1)} - \theta \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} \right) \right] + \\
& + \frac{2\varepsilon(1+\varepsilon)(1-\theta)}{n} v_r^{(-1)} + 3\sigma_{zz}^{(-2)} = 0 \\
\varepsilon & \left[\frac{(1-\theta)}{\omega n} \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} + \omega \sigma_{rz}^{(-3)} - \omega \theta \frac{\partial v_r^{(-3)}}{\partial z} \right] + 2\sigma_{r\varphi}^{(-2)} = 0 \\
\frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 4}{6n} (1-\theta) & \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} + \omega \frac{\varepsilon + 2}{2} \sigma_{r\varphi}^{(-2)} + \sigma_{rz}^{(-1)} = \frac{dv_r^{(-1)}}{dz} \\
\varepsilon \sigma_{zz}^{(-2)} + (\varepsilon + 2) \sigma_{\varphi\varphi}^{(-2)} & = 2\theta(\varepsilon + 2) v_r^{(-1)} \\
\sigma_{rz}^{(-1)} = \theta \frac{dv_r^{(-1)}}{dz}, \quad \sigma_{\varphi z}^{(-3)} = \text{const}, \quad \frac{d\sigma_{rz}^{(-1)}}{dz} & = \text{const} \\
2\sigma_{zz}^{(-2)} - \sigma_{rr}^{(-2)} - \sigma_{\varphi\varphi}^{(-2)} + \frac{d\sigma_{rz}^{(-3)}}{dz} = \text{const}, \quad 2v_r^{(-3)} = \frac{dv_z}{dz}
\end{aligned} \tag{15}$$

При $l > 0$ здесь выписаны уравнения для отличных от нуля коэффициентов разложения $\sigma_{hk}^{(-l)}(z)$ и $v_k^{(-l)}(z)$.

Можно показать, что для $l < 0$ имеет место $v_i^{(-l)} \equiv 0$ и $\sigma_{ik}^{(-l)} \equiv 0$, а для $l > 0$ отличные от нуля компоненты $\sigma_{\varphi z}$, σ_{rz} , v_φ и v_r стоят при нечетных обратных степенях r , для остальных σ_{hk} и v_k — при четных.

Решение системы (15) с учетом (13) и (14) суть

$$\begin{aligned}
v_r^{(-1)} & = c(z^2 - z), \quad v_r^{(-3)} = \frac{\theta - 1}{\theta} ck \left(-\frac{z^4}{12} + \frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{10} + \frac{z}{60} \right) \\
v_\varphi^{(-3)} & = c \frac{\theta - 1}{\theta \omega} \frac{\varepsilon t}{n^2} \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z}{6} \right) \\
v_z^{(-4)} & = 2 \frac{\theta - 1}{\theta} ck \left(-\frac{z^5}{60} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{30} + \frac{z^2}{120} \right) \\
\sigma_{rz}^{(-1)} & = c\theta(2z - 1), \quad \sigma_{rz}^{(-3)} = c(1 - \theta) \left\{ \frac{2z - 1}{\omega^2 n} + \right. \\
& \left. + k \left(\frac{z^3}{3} - \frac{z^2}{2} + \frac{z}{5} - \frac{1}{60} \right) \right\} \\
\sigma_{\varphi z}^{(-3)} & = c \frac{\theta - 1}{6\omega} \frac{\varepsilon t}{n^2}, \quad \sigma_{r\varphi}^{(-2)} = \frac{c(\theta - 1)\varepsilon}{\omega n} (2z - 1) \\
\sigma_{\varphi\varphi}^{(-2)} & = 2c \left\{ \frac{1 - \theta}{3} \left[\frac{(2 - \varepsilon)\varepsilon t}{2n^2} - \frac{2(1 + \varepsilon)}{n} \right] + 1 \right\} (z^2 - z)
\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(-2)} &= 2c \left\{ \frac{(1-\theta)(1+\varepsilon)}{3} \left[\frac{\varepsilon t}{n^2} + \frac{2+\varepsilon}{n} \right] - 1 \right\} (z^2 - z) \\ \sigma_{zz}^{(-2)} &= 2c \frac{(\theta-1)\varepsilon}{3} \left(\frac{4+\varepsilon}{2} \frac{t}{n^2} + \frac{1+\varepsilon}{n} \right) (z^2 - z) \\ k &= \frac{\varepsilon t(\varepsilon+4)}{n^2} + \frac{2\varepsilon(1+\varepsilon)}{n} \leq 0, \quad t = 1/3(2\varepsilon^2 + 7\varepsilon + 8) > 0 \end{aligned}$$

Здесь c — постоянная интегрирования, которая будет определена ниже. Подставляя выражения для $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{rr} и σ_{rz} в (7) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} P &= \left(2c\theta + \frac{(1-\theta)\varepsilon}{n} \right) \ln r - \frac{(1-\theta)(\varepsilon+4)}{6\omega^2 r^2 n^2} - \\ &- \frac{c(1-\theta)}{nr^2} \left\{ \frac{2}{3} \varepsilon \left[\frac{4+\varepsilon}{2} \frac{t}{n} + 1 + \varepsilon \right] (z^2 - z) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{10} \left[\frac{\varepsilon t}{n} (\varepsilon+4) + 2\varepsilon(1+\varepsilon) \right] + \frac{1}{\omega^2} \right\} + c_1 \end{aligned} \quad (17)$$

Усредняя (17) по z и полагая $P|_{r=R_1} = 0$, находим усредненное давление P^*

$$\begin{aligned} P^* &= - \left[20c + \frac{(1-\theta)\varepsilon}{n} \right] \ln \frac{R_1}{r} - \frac{(1-\theta)(\varepsilon+4)}{6\omega^2 n^2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) - \\ &- \frac{c(1-\theta)}{n} \left[\frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{n} (\varepsilon+2)^2 + \frac{1}{\omega^2} \right] \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Воспользуемся теперь зависимостью расхода $q(P)$ при течении упруго-вязкой жидкости по капилляру, где P — давление в расширенной (предвходовой) зоне

$$q = \pi \int_0^{d/2} y^2 \lambda \left(\frac{Py}{2L} \right) dy = \frac{\pi P d^3}{128L\nu}, \quad 1 < \nu < \theta \quad (19)$$

где λ — функция, обратная к $\sigma_{\varphi\varphi}(\omega r)$, определенной (11), ν — безразмерная усредненная эффективная вязкость.

Из условия постоянства расхода в зазоре между дисками следует, что

$$q = -2\pi \int_0^1 v_r^{(-1)} dz = \frac{\pi c}{3} \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19) и полагая $P = P^*$ при $r = R_2$ в (18), получим для константы интегрирования c следующее выражение:

$$\begin{aligned} c &= (1-\theta) \left[-\frac{\varepsilon}{n} \ln \frac{R_1}{R_2} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\varepsilon+4}{6n^2} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] \times \\ &\times \left[\frac{128L\nu}{3d^3} + 20 \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{n^2} (\varepsilon+2)^2 (1-\theta) \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{(1-\theta)}{n\omega^2} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (21)$$

Формулу для давления в расширенной зоне получим, подставляя (20) и (21) в (19)

$$P^* = (\theta - 1) \left[\frac{\varepsilon}{n} \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\varepsilon + 4}{6n^2\omega^2} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] \times \quad (22)$$

$$\times \left\{ 1 + \frac{d^4}{128\nu L} \left[6\theta \ln \frac{R_1}{R_2} + 3(1 - \theta) \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \left(\frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{n^2} (\varepsilon + 2)^2 + \frac{1}{n\omega^2} \right) \right] \right\}^{-1}$$

Рассмотрим решение для больших и малых значений d . Из выражения (22) видно, что в этих случаях $Pd/2L$ мало, т. е. в капилляре реализуется ньютоновское течение. Поэтому в дальнейшем положим $\nu = 1$. Расход q найдем, подставляя выражение для s из (21) при $\nu = 1$ в (20)

$$q = \pi(\theta - 1) \left[\frac{\varepsilon}{n} \ln \frac{R_1}{R_2} + \frac{\varepsilon + 4}{6n^2\omega^2} \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] \times$$

$$\times \left\{ \frac{128L}{d^4} + 6\theta \ln \frac{R_1}{R_2} + 3(1 - \theta) \left(\frac{1}{R_2^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \left[\frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{n^2} (\varepsilon + 2)^2 + \frac{1}{n\omega^2} \right] \right\}^{-1} \quad (23)$$

Используя соотношение (16), получим выражение для момента на вращающемся валу экструдера

$$M = \pi \left\{ \theta\omega \frac{R_1^4 - R_2^4}{2} + \frac{(1 - \theta)(R_1^2 - R_2^2)}{n\omega} - \frac{2(1 - \theta)}{\omega n} \left(c \frac{\varepsilon t}{6} + \frac{1}{\omega^2} \right) \ln \frac{R_1}{R_2} \right\} \quad (24)$$

Рассмотрим теперь решение задачи (1) — (10) при наличии радиального течения для $\omega \rightarrow 0$. Учитывая, что $\sigma_{\varphi z}$, $\sigma_{\varphi r}$ и v_{φ} четны, а остальные компоненты нечетны по ω и удерживая члены порядка малости до ω^2 включительно, перепишем реологические уравнения (1) — (3) в следующем виде:

$$(\varepsilon + 2) \left[\sigma_{r\varphi} \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right) - \theta \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (1 + \varepsilon) I + \sigma_{rr} = 2 \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r}, \quad \sigma_{\varphi z} = \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z}$$

$$(\varepsilon + 2) \left[\frac{\sigma_{z\varphi}}{2} \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right) + \frac{\sigma_{r\varphi}}{2} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z} - \theta \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial z} \left(\frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right) \right] + \sigma_{rz} = \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \left\{ \sigma_{z\varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \sigma_{r\varphi} \left(\frac{v_\varphi}{r} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} \right) - \theta \left[\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} - \\ - \frac{2}{3} (1 + \varepsilon) I + \sigma_{\varphi\varphi} = 2 \frac{v_r}{r} \\ (\varepsilon + 2) \left[\sigma_{z\varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \theta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} (1 + \varepsilon) I + \sigma_{zz} = 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ I = \sigma_{r\varphi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) + \sigma_{z\varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \theta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

Решая совместно (25) и (7) — (10), получим

$$\begin{aligned} v_\varphi = \omega r z, \quad v_r = c(z^2 - z)r^{-1}, \quad v_z = 0 \\ \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{z\varphi} = \omega r, \quad \sigma_{rz} = c(2z - 1)r^{-1} \\ \sigma_{zz} = 1/3(\theta - 1)(\varepsilon + 4)\omega^2 r^2 \\ \sigma_{\varphi\varphi} = 1/3(\theta - 1)(\varepsilon - 2)\omega^2 r^2 + 2c(z^2 - z)r^{-2} \\ \sigma_{rr} = 2/3(1 - \theta)(\varepsilon + 1)\omega^2 r^2 - 2c(z^2 - z)r^{-2} \end{aligned} \quad (26)$$

При отсутствии радиального течения, когда $v_r = 0$ ($c = 0$), формулы (26) соответствуют первым членам разложения по малым $\sqrt{n} \omega r$ выражений (11). Подставляя σ_{rz} , σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ из (26) в (7) с учетом того, что $P|_{r=R_1} = 0$, находим

$$P = \frac{7\varepsilon + 4}{6} (\theta - 1) \omega^2 (R_1^2 - r^2) - 2c \ln \frac{R_1}{r} \quad (27)$$

Применяя для нахождения c , q , P^* и M те же рассуждения, что и в случае, когда $\sqrt{n} \omega r > 1$ и $r > 1$ (см. (19) — (24)), получим

$$c = \frac{7\varepsilon + 4}{6} (\theta - 1) \omega^2 (R_1^2 - R_2^2) \left(\frac{128L}{3d^4} + 2 \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^{-1} \quad (28)$$

Здесь $v \equiv 1$, так как рассматривается асимптотика $\omega \rightarrow 0$

$$q = \pi \frac{7\varepsilon + 4}{6} (\theta - 1) \omega^2 (R_1^2 - R_2^2) \left(\frac{128L}{d^4} + 6 \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^{-1} \quad (29)$$

$$P^* = \frac{7\varepsilon + 4}{6} (\theta - 1) \omega^2 (R_1^2 - R_2^2) \left(1 + \frac{6d^4}{128L} \ln \frac{R_1}{R_2} \right)^{-1} \quad (30)$$

$$M = \frac{\pi}{2} \omega (R_1^4 - R_2^4) \quad (31)$$

Эксперименты на сдвиговых приборах для расплавов и растворов полимеров показывают, что $|\sigma_{rr} - \sigma_{zz}| \ll |\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}|$. Здесь выражения для $\sigma_{\varphi\varphi}$ даны в (11). Учитывая это, в работе [3] нашли, что $\varepsilon \approx -2$.

В заключение отметим, что в выражениях для расхода (23) и (29) в числителе с точностью до постоянного множителя стоят первые члены разложения по большому и малому $\sqrt{n} \omega r$ давления, которое создается в расширенной части дискового экструдера при закрытом капилляре. При $\varepsilon = -2$ это давление суть

$$P_0^* = 3(1 - \theta) \left[\frac{1}{3 + 2\omega^2 R_2^2} - \frac{1}{3 + 2\omega^2 R_1^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{3 + 2\omega^2 R_1^2}{3 + 2\omega^2 R_2^2} \right]$$

Учитывая это, выражения (23) и (29) могут быть объединены в одно.

Перейдем к обсуждению результатов и сравнению их с экспериментом.

В работе [1] использовалась экспериментальная установка, схема которой аналогична приведенной на фигуре. Графики, полученные в этой работе, были перестроены в вышеуказанных безразмерных величинах в интервале температур 160—250° С с учетом температурной инвариантности [5].

Экспериментальная зависимость $q(\omega)$ представляла собой монотонно возрастающую функцию, стремящуюся к постоянной величине при больших ω , что качественно согласуется с зависимостями (23) и (29) при больших и малых ω .

Из выражений (18), (27) или из (22), (30) следует, что давление без радиального течения ($d = 0$, $c = 0$) больше, чем с последним ($c > 0$). Из (22) и (30) видно, что при больших и малых ω давление $P(\omega)$ представляет собой монотонно возрастающую функцию. Вводя новые безразмерные параметры h'/R_1' , L'/R_1' и d'/R_1' , из выражений (23) и (29) получаем, что $q(h) \rightarrow \text{const}$ при $h \rightarrow 0$ и $q(h) \rightarrow 0$ при больших h . Вышеприведенные результаты находятся в полном соответствии с экспериментальными зависимостями $P(\omega)$ и $q(h)$.

Из формул (24) и (31) для крутящего момента видно, что при больших и малых ω он представляет собой монотонно возрастающую функцию. При наличии радиального течения ($c > 0$) момент больше, чем без него.

Технические возможности бесшнекового экструдера ограничены, ибо расход, как функция от угловой скорости, — величина ограниченная, что следует из (23).

В заключение отметим, что количественное согласование с экспериментальными данными работы [2] получено не было. Это объясняется тем, что в [2] экспериментальная кривая течения совпадает с кривой течения, определяемой из используемой модели лишь при малых скоростях сдвига. В исследуемой же области отличие кривых могло достигать 600%. Таким образом, пользоваться в расчетах характерными временами, определенными по кривой течения, следующей из рассматриваемой модели, как это сделано в работе [2], некорректно.

Автор благодарен А. И. Леонову за постановку и обсуждение работы.

Поступило 3 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Maxwell B. B., Scalor A. J. The elastic melt extruder-works without serew. Mod. Plastics, 1959, vol. 37, No. 2.
2. Tomita Y., Kato H. A study on the elastodynamic pump (1-st Report, Normal Stress Effect). Bull. JSME, 1967, Bd 10, Nr 39.
3. Kato H. A study on the elastodynamic pump (2-nd Report, Pump Performance). Bull. JSME, 1967, Bd 10, Nr 39.
4. Oldroyd J. G. Non — newtonian effects in steady motion of some idealized elasto-viscous liquids. Proc. Roy. Soc. A-245, 1958, No. 1241.
5. Винogradов Г. В., Малкин А. Я. Реологические свойства полимеров в текущем состоянии. ПМТФ, 1964, № 5.