УДК 538.4

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ ТИПА «КАТЯЩИЕСЯ ВОЛНЫ» В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

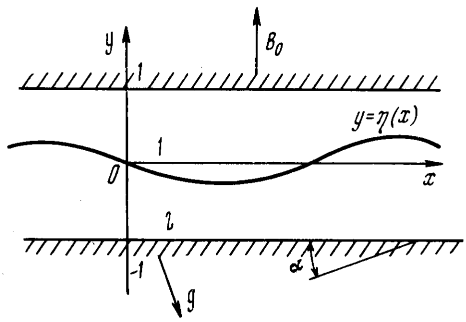
В. И. ВИШНЯКОВ, К. Б. ПАВЛОВ

(*Москва*)

Рассматривается движение двух взаимодействующих вязких сред с произвольной проводимостью в наклонном канале с непроводящими стенками, помещенными в поперечное магнитное поле. При решении применен асимптотический метод, предложенный в [1, 2], с помощью которого описывается установившееся течение с волновой поверхностью раздела сред. Получены зависимости формы волны и ее длины от определяющих параметров задачи; для некоторых из них проведены численные расчеты.

При решении ряда задач обычной гидродинамики эффективным оказался асимптотический метод «узких полос», развитый Н. Н. Моисеевым и его сотрудниками [1, 2]. В частности, на основе этого метода удалось построить теорию «катящихся волн» — установившихся длинных гравитационных волн, возникающих в наклонных открытых каналах [3], а также провести исследование других течений подобного типа [4, 5].

Исследование задач о «катящихся волнах» в поперечном магнитном поле можно проводить в безындукционном приближении или в точной постановке. В первом случае решение не сопровождается новыми принципиальными затруднениями по сравнению с обычной гидродинамикой, во втором — возникают значительные осложнения.



Фиг. 1

Пусть в плоском канале шириной $2h$, образованном двумя непроводящими пластинами, которые составляют с горизонтом угол α (фиг. 1), движутся две проводящие среды, плотность и вязкость одной из которых много меньше другой; однородное внешнее поле B_0 приложено перпендикулярно поверхностям канала, его направление принято за направление оси y; ось x совпадает с направлением движения обеих сред. Будем рассматривать установившиеся волновые течения, т. е. течения, при которых форма свободной поверхности раздела обеих сред остается неизменной в некоторой определенной системе отсчета, движущейся в направлении оси x с постоянной скоростью U относительно твердых стенок канала. В дальнейшем все величины, относящиеся к более плотной среде («жидкости»), будут отмечаться подстрочным индексом 1, а величины, относящиеся к менее плотной среде, («газу») — подстрочным индексом 2; кроме того, для упрощения выкладок предполагается, что средняя глубина жидкости и газа одинакова и равна h, она принимается за характерный размер задачи. Если в системе отсчета, связанной с твердыми стенками канала, средние расходы жидкости и газа равны соответственно Q_l, то за характерные скорости движения в обеих средах можно принять величины Q_l / h $(l = 1, 2)$.

Принимая за характерное магнитное поле индукцию внешнего поля B_0, описываем движение сред следующими безразмерными параметрами: числами Рейнольдса $R_l = Q_l / \nu_l$, где ν_l — кинематические вязкости сред; «магнитными» числами Рейнольдса $\mathrm{Rm}_l = Q_l / \vartheta_l$, где $\vartheta_l = (\mu_0 \sigma_l)^{-1}$ — «магнитная вязкость» среды, а σ_l — электропроводность среды; числами Альфвена $Al_l = B_0 h (Q_l \sqrt{\mu_0 \rho_l})^{-1}$, где ρ_l — плотность среды. Кроме того, движение жидкости характеризуется числом Фруда $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}^{-2} = gh^3 Q_1^{-2})$.

В системе отсчета, движущейся относительно твердых стенок канала с безразмерной скоростью $c = Uh / Q_1$, уравнения магнитной гидродинамики, записанные в безразмерной форме относительно функций тока ψ_l и магнитной силовой функции φ_l, имеют следующий вид:

$$\frac{D(\partial\psi_l/\partial y, \psi_l)}{D(x, y)} - \mathrm{Al}_l^2 \frac{D(\partial\varphi_l/\partial y, \varphi_l)}{D(x, y)} = -\frac{\partial P_l}{\partial x} + \frac{\delta_{l1}}{\mathrm{Fr}^2}\sin\alpha + \frac{1}{R_l}\frac{\partial\Delta\psi_l}{\partial y} \quad (1)$$

$$\frac{D(\partial\psi_l/\partial x, \psi_l)}{D(x, y)} - \mathrm{Al}_l^2 \frac{D(\partial\varphi_l/\partial x, \varphi_l)}{D(x, y)} = -\frac{\partial P_l}{\partial y} - \frac{\delta_{l1}}{\mathrm{Fr}^2}\cos\alpha - \frac{1}{R_l}\frac{\partial\Delta\psi_l}{\partial x} \quad (2)$$

$$\frac{D(\psi_l, \varphi_l)}{D(x, y)} + \frac{\Delta\varphi_l}{\mathrm{Rm}_l} = E_l = \mathrm{const}, \qquad P_l \equiv p_l + \frac{\mathrm{Al}_l^2}{2} B_l^2 \quad (3)$$

$$u_l^{(x)} = \frac{\partial\psi_l}{\partial y}, \quad u_l^{(y)} = -\frac{\partial\psi_l}{\partial x}, \quad B_l^{(x)} = \frac{\partial\varphi_l}{\partial y}, \quad B_l^{(y)} = -\frac{\partial\varphi_l}{\partial x}$$

Здесь P_l — обобщенное давление в средах, равное сумме обычного и «магнитного» давлений, E_l — напряженность электрического поля.

Исключая из уравнений (1) и (2) обобщенные давления, имеем

$$\frac{D(\Delta\psi_l, \psi_l)}{D(x, y)} - \mathrm{Al}_l^2 \frac{D(\Delta\varphi_l, \varphi_l)}{D(x, y)} = \frac{1}{R_l}\Delta\Delta\psi_l \quad (4)$$

На свободной поверхности раздела сред $y = \eta(x)$ имеют место условия непрерывности

касательных напряжений

$$\left\{ \frac{4}{R_l}\frac{\partial^2\psi_l}{\partial x\,\partial y}\frac{\eta_x}{1+\eta_x^2} + \frac{1}{R_l}\left(-\frac{\partial^2\psi_l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_l}{\partial x^2}\right)\frac{1-\eta_x^2}{1+\eta_x^2} + \right.$$
$$\left. + \mathrm{Al}_l^2\left[-\frac{\partial\varphi_l}{\partial x}\frac{\partial\varphi_l}{\partial y}\frac{1-\eta_x^2}{1+\eta_x^2} - \left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial y}\right)^2\frac{\eta_x}{1+\eta_x^2} + \left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x}\right)^2\frac{\eta_x}{1+\eta_x^2}\right]\right\} = 0 \quad (5)$$

нормальных напряжений

$$\left\{ -P_l - \frac{2}{R_l}\frac{\partial^2\psi_l}{\partial x\,\partial y}\frac{1-\eta_x^2}{1+\eta_x^2} + \frac{2}{R_l}\left(-\frac{\partial^2\psi_l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi_l}{\partial x^2}\right)\frac{\eta_x}{1+\eta_x^2} + \right.$$
$$\left. + \mathrm{Al}_l^2\left[2\frac{\partial\varphi_l}{\partial x}\frac{\partial\varphi_l}{\partial y}\frac{\eta_x}{1+\eta_x^2} + \left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial y}\right)^2\frac{\eta_x^2}{1+\eta_x^2} - \left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial x}\right)^2\frac{1}{1+\eta_x^2}\right]\right\} = 0 \quad (6)$$

касательной составляющей скорости

$$\left\{\frac{\partial\psi_l}{\partial y} - \frac{\partial\psi_l}{\partial x}\eta_x\right\} = 0 \quad (7)$$

нормальной составляющей скорости

$$\left(\frac{\partial\psi_l}{\partial y}\eta_x+\frac{\partial\psi_l}{\partial x}\right)=0 \qquad (8)$$

нормальной составляющей индукции магнитного поля

$$\left\{\frac{\partial\varphi_l}{\partial y}\eta_x+\frac{\partial\varphi_l}{\partial x}\right\}=0 \qquad (9)$$

тангенциальной составляющей индукции магнитного поля

$$\left\{\frac{\partial\varphi_l}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_l}{\partial x}\eta_x\right\}=0 \qquad (10)$$

тангенциальной составляющей напряженности электрического поля

$$\{E_l\}=0, \quad E_l\equiv E=\mathrm{const} \qquad (11)$$

Здесь $\eta_x\equiv d\eta/dx$, фигурные скобки обозначают разность значений величин, содержащихся внутри скобок, с обеих сторон поверхности раздела.

Учитывая (8) и (9), на поверхности раздела сред можно положить

$$\psi_l=\{\varphi_l\}=0 \qquad (12)$$

Тогда на твердых поверхностях канала $y_1=-1$, $y_2=1$ должны быть выполнены условия

$$\psi_1|_{y_1}=-q, \quad \psi_2|_{y_2}=\zeta, \quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right|_{y_1}=\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right|_{y_2}=-c \qquad (13)$$

причем величины q, c и ζ связаны одна с другой соотношениями

$$q=1-c, \qquad \zeta=Q_2/Q_1-c \qquad (14)$$

Граничные условия, накладываемые на функции φ_l на непроводящих твердых стенках канала y_l ($y_1=-1$, $y_2=1$), должны быть согласованы с решениями внешних по отношению к каналу электродинамических задач.

Можно показать, что в системе отсчета, движущейся относительно твердых стенок канала с безразмерной скоростью c, проекции вектора — потенциала электромагнитного поля Φ_l на ось z для внешних электродинамических задач ($l=1$, если $y\leqslant y_1$, $l=2$, если $y\leqslant y_2$) удовлетворяют уравнению Лапласа. Если безразмерная длина волны в канале λ, то можно получить следующее выражение Φ_l, обращающееся в нуль при $|y|\to\infty$

$$\Phi_l=\sum_{n=1}^{\infty}b_l^{(n)}\exp(-m_n|y|)\sin m_n x, \qquad m_n=\frac{2\pi}{\lambda}n \qquad (15)$$

Непрерывность касательных и нормальных составляющих магнитного поля при $y=y_l$ определяет условия, накладываемые на функции φ_l

$$\left.\frac{\partial\varphi_l}{\partial y}\right|_{y_l}=\frac{2}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{sign}(-y_l)\left[\int\limits_0^{\lambda}\left.\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial\xi}\right)\right|_{y_l}\cos m_n\xi\,d\xi\right]\sin m_n x \qquad (16)$$

Если $\lambda\gg1$, то можно считать

$$\left.\frac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial y}\right|_{y_{1,2}}=0 \qquad (17)$$

Отсюда следует, что все $b_l^{(n)} = 0$, поэтому на твердых поверхностях канала должны быть выполнены также условия

$$\varphi_{1,2}|_{y_{1,2}} = 0 \tag{18}$$

Следуя общей схеме метода «узких полос» [1, 6], сделаем замену $x \to x / \varepsilon$, тогда во всех записанных уравнениях и граничных условиях появится малый параметр ε, что позволяет искать решение системы (3), (4) в форме асимптотических разложений по этому параметру

$$\psi_l = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{(i)} \psi_{*l}^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_l^{(i)}, \qquad \varphi_l = -\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^{(i)} \varphi_{*l}^{(i)} = -x + \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_l^{(i)} \tag{19}$$

(выделение в разложениях φ_l (19) члена $-x$ связано с наличием внешнего магнитного поля B_0). С учетом разложений (19) для нулевого приближения имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{R_l}\frac{\partial^4 \psi_l^{(0)}}{\partial y^4} + \mathrm{Al}_l^2 \frac{\partial^3 \varphi_l^{(0)}}{\partial y^3} = 0, \qquad \frac{\partial \psi_l^{(0)}}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Rm}_l}\frac{\partial^2 \varphi_l^{(0)}}{\partial y^2} = E \tag{20}$$

решения которых можно записать в форме

$$\psi_l^{(0)} = C_l^{(1)} \exp(\mathrm{Ha}_l y) + C_l^{(2)} \exp(-\mathrm{Ha}_l y) - \frac{1}{\mathrm{Ha}_l^2}(C_l^{(3)} y + C_l^{(4)}) + Ey \tag{21}$$

$$\varphi_l^{(0)} = \frac{\mathrm{Rm}_l}{\mathrm{Ha}_l}\left[C_l^{(2)} \exp(-\mathrm{Ha}_l y) - C_l^{(1)} \exp(\mathrm{Ha}_l y) + \frac{C_l^{(3)} y^2}{2\mathrm{Ha}_l}\right] + C_l^{(5)} y + C_l^{(6)}$$

где $\mathrm{Ha}_l \equiv \mathrm{Al}_l (\mathrm{Rm}_l R_l)^{1/2}$ — число Гартмана, $C_l^{(1)}, C_l^{(2)}, \ldots, C_l^{(6)}$ — функции x, определяемые из условий (5), (7)—(12) на поверхности раздела, причем условия (5) и (18) в нулевом приближении соответственно записываются в виде

$$\varphi_{1,2}^{(0)}|_{y_{1,2}} = 0, \qquad \left\{\frac{1}{R_l}\frac{\partial^2 \psi_l^{(0)}}{\partial y^2}\right\}_{\eta(x)} = 0$$

Предполагая далее, что амплитуда искомой волны много меньше средней глубины жидкости h, т. е. $\eta(x) \ll 1$, каждую из функций $C_l^{(1)}, C_l^{(2)}, \ldots$ $\ldots, C_l^{(6)}$ можно представить выражением

$$C_l^{(n)} = A_l^{(n0)} + A_l^{(n1)} \eta + A_l^{(n2)} \eta^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots, 6) \tag{22}$$

где $A_l^{(n0)}, A_l^{(n1)}, A_l^{(n2)}$ — константы, выраженные через определяющие параметры задачи. Значения этих констант не выписываются из-за громоздкости.

Уравнения для первого приближения имеют вид

$$\frac{1}{R_l}\frac{\partial^4 \psi_l^{(1)}}{\partial y^4} + \mathrm{Al}_l^2 \frac{\partial^3 \varphi_l^{(1)}}{\partial y^3} = \frac{D(\partial^2 \psi_l^{(0)}/\partial y^2, \psi_l^{(0)})}{D(x,y)} - \mathrm{Al}_l^2 \frac{D(\partial^2 \varphi_l^{(0)}/\partial y^2\ \varphi_l^{(0)})}{D(x,y)}$$

$$\frac{\partial \psi_l^{(1)}}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Rm}_l}\frac{\partial^2 \varphi_l^{(1)}}{\partial y^2} = \frac{D(\varphi_l^{(0)}, \psi_l^{(0)})}{D(x,y)} \tag{23}$$

Решения этих уравнений (24)

$$\psi_l^{(1)} = K_l^{(1)}\exp(\mathrm{Ha}_l y) + K_l^{(2)}\exp(-\mathrm{Ha}_l y) - \frac{1}{\mathrm{Ha}_l^2}(K_l^{(3)}y + K_l^{(4)}) + \Pi_l(x, y)$$

$$\varphi_l^{(1)} = \frac{\mathrm{Rm}_l}{\mathrm{Ha}_l}\left[K_l^{(2)}\exp(-\mathrm{Ha}_l y) - K_l^{(1)}\exp(\mathrm{Ha}_l y) + \frac{K_l^{(3)}y^2}{2\mathrm{Ha}_l}\right] +$$

$$+ K_l^{(5)}y + K_l^{(6)} + \Gamma_l(x, y)$$

где $\Pi_l(x, y)$, $\Gamma_l(x, y)$ — частные решения неоднородных систем (23); $K_l^{(1)}$, $K_l^{(2)}, \ldots, K_l^{(6)}$ — функции x, определяемые из условий (5), (7)—(12) и граничных условий

$$\varphi_{1,2}^{(1)}\big|_{y_{1,2}} = \psi_{1,2}^{(1)}\Big|_{y_{1,2}} = \frac{\partial\psi_{1,2}^{(1)}}{\partial y}\Big|_{y_{1,2}} = 0 \tag{25}$$

Функции $K_l^{(1)}, K_l^{(2)}, \ldots, K_l^{(6)}$ можно представить в форме

$$K_l^{(n)} = G_l^{(n0)}\eta_x + G_l^{(n1)}\eta\eta_x \qquad (n = 1, 2, \ldots, 6) \tag{26}$$

где $\eta_x \equiv d\eta / dx$, $G_l^{(n0)}$, $G_l^{(n1)}$ — постоянные; значения этих постоянных также не выписаны из-за громоздкости.

Система уравнений второго приближения

$$\frac{1}{R_l}\frac{\partial^4\psi_l^{(2)}}{\partial y^4} + \mathrm{Al}_l^2\frac{\partial^3\varphi_l^{(2)}}{\partial y^3} = \frac{D(\partial^2\psi_l^{(1)}/\partial y^2, \psi_l^{(0)})}{D(x, y)} + \frac{D(\partial^2\psi_l^{(0)}/\partial y^2, \psi_l^{(1)})}{D(x, y)} -$$

$$-\mathrm{Al}_l^2\left[\frac{D(\partial^2\varphi_l^{(1)}/\partial y^2, \varphi_l^{(0)})}{D(x, y)} + \frac{D(\partial^2\varphi_l^{(0)}/\partial y^2, \varphi_l^{(1)})}{D(x, y)}\right] - 2\frac{\partial^4\psi_l^{(0)}}{\partial x^2\partial y^2} -$$

$$-\mathrm{Al}_l^2\frac{\partial^3\varphi_l^{(0)}}{\partial x^2\partial y}, \qquad \frac{\partial\psi_l^{(2)}}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Rm}_l}\frac{\partial^2\varphi_l^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{D(\psi_l^{(0)}, \varphi_l^{(1)})}{D(x, y)} - \frac{D(\psi_l^{(1)}, \varphi_l^{(0)})}{D(x, y)} \tag{27}$$

имеет решения

$$\psi_l^{(2)} = N_l^{(1)}\exp(\mathrm{Ha}_l y) + N_l^{(2)}\exp(-\mathrm{Ha}_l y) - \frac{1}{\mathrm{Ha}_l^2}(N_l^{(3)}y + N_l^{(4)}) + M_l(x, y)$$

$$\varphi_l^{(2)} = \frac{\mathrm{Rm}_l}{\mathrm{Ha}_l}\left[N_l^{(2)}\exp(-\mathrm{Ha}_l y) - N_l^{(1)}\exp(\mathrm{Ha}_l y) + \frac{N_l^{(3)}y^2}{2\,\mathrm{Ha}_l}\right] +$$

$$+ N_l^{(5)}y + N_l^{(6)} + S_l(x, y) \tag{28}$$

где $M_l(x, y)$ и $S_l(x, y)$ — частные решения неоднородных систем, $N_l^{(1)}$, $N_l^{(2)}, \ldots, N_l^{(6)}$ — функции x, определяемые из условий (5), (7)—(12) на поверхности раздела.

Таким образом, при построении решения использованы величины порядка $O(\varepsilon^2)$. Поэтому достаточно получить лишь коэффициенты $N_l^{(1)}$, $N_l^{(2)}$, $N_l^{(3)}$ и $N_l^{(4)}$; необходимые для их определения граничные условия имеют вид

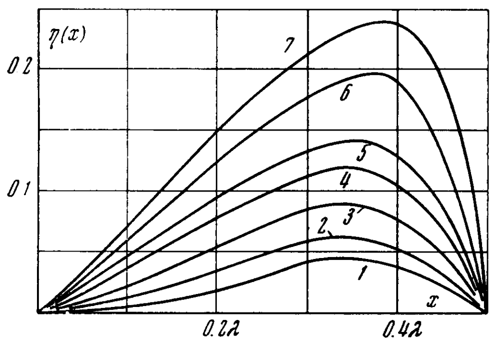
$$\psi_{1,2}^{(2)}\Big|_{\nu_{1,2}}=\frac{\partial\psi_{1,2}^{(2)}}{\partial y}\Big|_{\nu_{1,2}}=0 \qquad (29)$$

Функции $N_l^{(1)},\ldots,N_l^{(4)}$ можно представить в форме

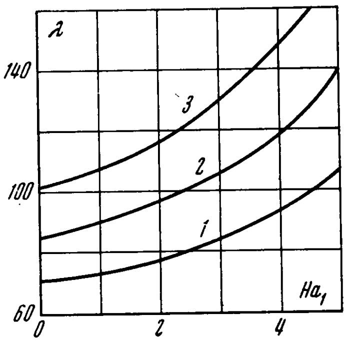
$$N_l^{(n)}=L_l^{(n0)}\eta_{xx},\qquad (n=1,2,3,4),\qquad \eta_{xx}\equiv\frac{d\eta^2}{dx^2} \qquad (30)$$

где $L_l^{(n0)}$ — постоянные.

Полученные асимптотические решения ψ_l и φ_l выражаются через неизвестную функцию $\eta(x)$, которая может быть найдена из условия непре-



Фиг. 2



Фиг. 3

рывности нормальных напряжений на поверхности раздела сред. Дифференцируя (6) вдоль свободной поверхности $\eta(x)$, получим с нужной степенью точности

$$\left\{\frac{\partial P_l}{\partial x}+\frac{\partial P_l}{\partial y}\eta_x+\frac{2}{R_l}\frac{\partial^3\psi_l^{(0)}}{\partial x^2\,\partial y}\right\}_{\eta(x)}=0 \qquad (31)$$

Значения производных, входящих в (31), находятся из (1) и (2)

$$\frac{\partial P_l}{\partial x}=\frac{1}{R_l}(C_l^{(1)}+K_l^{(1)}+N_l^{(1)})-\frac{1}{R_l}\frac{\partial^3\psi_l^{(0)}}{\partial x^2\,\partial y}-\mathrm{Al}_l^2\frac{\partial^2\varphi_l^{(0)}}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{\delta_{l1}}{\mathrm{Fr}^2}\sin\alpha+O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{\partial P_l}{\partial y}=-\frac{\delta_{l1}}{\mathrm{Fr}^2}\cos\alpha+O(\varepsilon^2) \qquad (32)$$

Подставляя (32) в (31), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$\eta_{xx}+F_1\eta_x+F_2\eta\eta_x+F_3\eta+F_4\eta^2+F_5=0 \qquad (33)$$

где $F_1, F_2,\ldots,F_5$ — постоянные, выраженные через определяющие параметры задачи.

В работе [4] исследован частный случай $\mathrm{Ha}_l = 0$, но принятое там ограничение в разложении для ψ_l первой степенью по ε неоправдано. Это связано с тем, что наличие в (33) члена η_{xx}, как видно из приведенных выше выкладок, требует учета в разложении (19) члена с ε^2.

Применение метода Боголюбова — Крылова [7] к решению уравнения (32) позволяет найти неизвестную функцию $\eta(x)$, определяющую поверхность раздела обеих сред.

В общее решение уравнения (33) $\eta(x)$ входят 14 безразмерных параметров, между которыми существует определенная связь. Действительно, связь между параметрами c, q и ζ определяется из (14), а связь между E, q и ζ — из (20). Проинтегрировав второе уравнение, входящее в систему (20) и представляющее собой закон Ома в дифференциальной форме, поперек канала с учетом (17) получим $E = {}^1/_2(q + \zeta)$. Кроме того, согласно работе [3] можно указать на три соотношения между коэффициентами уравнения (33), из которых могут быть найдены λ, Fr и амплитуда волны a.

Таким образом

$$\eta(x) = \eta(x, \alpha, c, R_1, R_2, \mathrm{Rm}_1, \mathrm{Rm}_2, \mathrm{Ha}_1, \mathrm{Ha}_2) \tag{34}$$

т. е. в решении (34) содержится восемь независимых безразмерных параметров.

Расчеты величины $\eta(x)$ были проведены на ЭВМ «Минск-2» для некоторых практически интересных значений определяющих параметров.

На фиг. 2 приведена зависимость формы профиля волны от параметра Ha_1, характеризующего индукцию внешнего магнитного поля в канале, Кривые *1*, *3*, *6*, построены для значений $r = R_2 / R_1 = 0.09$ и $r_m = \mathrm{Rm}_2 / \mathrm{Rm}_1 = 0.45 \cdot 10^{-3}$, кривые *2*, *5*, *7*,— при $r = 0.36$ и $r_m = 1.8 \cdot 10^{-3}$, кривая *4* — при $r = 0.18$ и $r_m = 0.9 \cdot 10^{-3}$. Кривым *1*—*7* соответствуют значения Ha_1, равные 0, 0, 1, 1, 1, 5 и 5. Угол наклона канала $\alpha = 20°$, $c = 2.5$. Зависимость длины волны от внешнего поля построена на фиг. 3. Кривым *1*—*3* на фиг. 3 соответствуют значения $r = 0.09$, 0.18 и 0.36 и $r_m = 0.45 \cdot 10^{-3}$, $0.9 \cdot 10^{-3}$, $1.8 \cdot 10^{-3}$; $\alpha = 20°$, $c = 2.5$.

Авторы благодарят Ю. П. Иванилова и Л. Д. Покровского за полезные обсуждения.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Поступило 16 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванилов Ю. П., Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Об асимптотическом характере формул М. А. Лаврентьева. Докл. АН СССР, 1953, т. 123, № 2, стр. 231.
2. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы типа узких полос. Сб. «Некоторые проблемы математики и механики», Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1961.
3. Иванилов Ю. П. Катящиеся волны в наклонном канале. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6, стр. 1061.
4. Петухов Ю. И. Установившиеся волны малой амплитуды на поверхности пленки вязкой жидкости в спутном потоке газа (наклонный канал). Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2, стр. 151.
5. Пашинина Л. В. Установившиеся течения в тонких пленках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3, стр. 80.
6. Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М. Исследование движения тяжелой жидкости при скоростях, близких к критической. Тр. Моск. физ.-техн. ин-та, 1959, № 3, стр. 25.
7. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику. Киев, Изд-во АН УССР, 1937.