

УДК 533.6.011.8 : 535.2

## МЕТОД ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ РАДИАЦИОННОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В. В. АЛЕКСАНДРОВ

(Москва)

Одномерные задачи динамики излучающего газа интенсивно изучались в ряде работ, из которых отметим [1-5]. Эти задачи формулировались в виде уравнений для функций, зависящих от оптической толщины. Такая формулировка позволяет сравнительно легко получить решение при слабом влиянии излучения на движение среды. При сильном влиянии решение, зависящее от оптической толщины, обычно имеет пограничные слои. Это обстоятельство затрудняет численное решение, а при аналитическом подходе заставляет использовать технику срачиваемых асимптотических разложений [6].

В этой работе предлагается решать одномерные задачи в фазовой плоскости, в которой вдоль осей откладываются скорость газа и скорость выделения тепловой энергии в единице объема газа за счет излучения. Показаны преимущества такого подхода при наличии рассеяния и сильного взаимодействия излучения с движением газа.

Одномерные задачи радиационной газовой динамики формулируются в физических координатах и оптических толщинах. Описан метод фазовой плоскости для серого и селективного излучения. Вычислено значение температуры далеко за фронтом сильной ударной волны, идущей по холодному прозрачному нерассеивающему газу. Находится величина разрыва скорости в ударной волне, идущей по излучающему, поглощающему и рассеивающему газу при сильном влиянии излучения на движение. Проводится краткое обсуждение метода.

1. Рассмотрим плоское одномерное стационарное равновесное течение вязкого нетеплопроводного излучающего, поглощающего и рассеивающего газа. Допустим наличие локального термодинамического равновесия. Вкладом излучения во внутреннюю энергию среды, давлением и вязкостью лучистого поля пренебрежем.

В этих предположениях имеют место обычные интегралы массы и импульса

$$\rho u = \rho_* u_* = C_1, \quad p + \rho u^2 = p_* + \rho_* u_*^2 = C_1 C_2 \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $u$  — скорость газа. Звездочкой отмечены параметры в некотором характерном сечении  $x = x_*$ . Ось  $x$  ориентирована слева направо по направлению течения газа. Уравнение состояния можно записать в форме

$$p = R\rho T \quad (1.2)$$

в которой функция  $R(p, \rho)$  характеризует отклонение газа от совершенного;  $T$  — температура газа.

К уравнениям (1.1), (1.2) нужно присоединить уравнение энергии и кинетическое уравнение переноса излучения

$$\rho u \frac{d}{dx} \left( H + \frac{u^2}{2} \right) = Q$$

$$Q = 4\pi \int_0^\infty \kappa_\nu (1 - \lambda_\nu) \left( \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu - B_\nu \right) d\nu, \quad B_\nu = 2h\nu^3 c^{-2} (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1} \quad (1.3)$$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + \kappa_\nu I_\nu = \kappa_\nu \left[ (1 - \lambda_\nu) B_\nu + \frac{\lambda_\nu}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu \right] \quad (1.4)$$

$$\kappa_\nu = \kappa_{a\nu} + \kappa_{s\nu} = \kappa_\nu(p, \rho), \quad \lambda_\nu = \kappa_{s\nu}/\kappa_\nu = \lambda_\nu(p, \rho)$$

Здесь  $Q$  — объемная скорость увеличения энергии газа за счет излучения;  $H$  — энтальпия газа;  $\kappa_{a\nu}$  и  $\kappa_{s\nu}$  — объемные коэффициенты поглощения и рассеяния, представляющие собой функции частоты  $\nu$  и термодинамических параметров;  $I_\nu$  — интенсивность излучения, зависящая от частоты, координаты и косинуса  $\mu$  угла наклона луча к оси  $x$ ;  $B_\nu$  — функция Планка;  $c$  — скорость света;  $h$  — постоянная Планка;  $k$  — постоянная Больцмана. Величина  $\lambda_\nu$  характеризует роль рассеяния среди процессов, уменьшающих число фотонов при их движении вдоль луча. При  $\lambda_\nu \equiv 0$  рассеяние отсутствует, при  $\lambda_\nu \equiv 1$  отсутствует поглощение. В последнем случае взаимодействия между движением и излучением не существует. Рассеяние предполагается изотропным.

Допустим, что задача должна быть решена на интервале

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad (1.5)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  имеют конечную или бесконечную величину. Граничные условия для газодинамических величин определяются конкретной задачей. Обычные краевые условия для интенсивности излучения можно записать в форме

$$I_\nu(x_1, \mu) = I_{1\nu}(\mu), \quad 0 < \mu \leq 1; \quad I_\nu(x_2, \mu) = I_{2\nu}(\mu), \quad 0 > \mu \geq -1. \quad (1.6)$$

Если функции  $I_{1\nu}$ ,  $I_{2\nu}$  заданы, то известно распределение интенсивности внешних источников излучения, и индикатриса отражения излучения от границ течения тождественно равна нулю.

Для модели серого излучения функция  $Q$  и уравнение переноса имеют форму

$$Q = 4\kappa(1 - \lambda) \left( \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 I d\mu - \sigma T^4 \right) \quad (1.7)$$

$$\mu \frac{\partial I}{\partial x} + \kappa I = \kappa \left[ \frac{\sigma}{\pi} (1 - \lambda) T^4 + \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I d\mu \right] \quad (1.8)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана.

Из уравнений (1.1) можно определить плотность и давление через безразмерную скорость  $v$

$$\rho = \rho_* / v, \quad p = p_* + \rho_* u_*^2 (1 - v), \quad v = u / u_* \quad (1.9)$$

Пользуясь (1.9), введем безразмерную энтальпию  $h$ , температуру  $\theta$  и безразмерный оптический коэффициент  $k$

$$H(p, \rho) = u_*^2 h(v), \quad T = T_* \theta(v), \quad \kappa_\nu = kT (hu_*)^{-1} k(v, y) \quad (1.10)$$

Здесь безразмерная частота  $y$  введена при помощи временного масштаба  $h(kT_*)^{-1}$ . Безразмерная координата  $X$  вводится при помощи масштаба длины  $hu_* (kT_*)^{-1}$

$$y = hv (kT_*)^{-1}, \quad X = kT_* (hu_*)^{-1} x \quad (1.11)$$

Введем также безразмерную интенсивность излучения  $i$  и безразмерную функцию Планка  $P$

$$I_\nu = 2k^3 T_*^3 (hc)^{-2} i(y, X, \mu), \quad B_\nu = 2k^3 T_*^3 (hc)^{-2} P(y, \theta). \\ P(y, \theta) = y^3 (e^{y/\theta} - 1)^{-1} \quad (1.12)$$

Тогда уравнение энергии (1.3) и уравнение переноса (1.4) запишутся в безразмерном виде

$$B_s \frac{d}{dX} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) = q, \quad q = \int_0^\infty k(1-\lambda)(w - \pi P) dy \quad (1.13)$$

$$w = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 i d\mu, \quad B_s = \frac{\pi^5}{60} B_0, \quad B_0 = \frac{\rho_* u_*^3}{\sigma T_*^4}$$

$$\mu \frac{\partial i}{\partial X} + ki = k \left[ (1-\lambda)P + \frac{\lambda}{\pi} w \right] \quad (1.14)$$

Здесь число Больцмана  $B_0$  характеризует отношение конвективного и лучистого потоков энергии, величины  $q$  и  $w$  представляют собой безразмерную объемную скорость увеличения энергии газа за счет излучения и безразмерную плотность лучистой энергии соответственно. Краевые условия (1.6) также можно записать в безразмерной форме

$$i(y, X_1, \mu) = i_1(y, \mu), \quad 0 < \mu \leq 1; \quad i(y, X_2, \mu) = i_2(y, \mu), \quad 0 > \mu \geq -1. \quad (1.15)$$

Теперь задача сформулирована в виде двух уравнений (1.13), (1.14) для функций  $v$  и  $i$ .

Масштабы интенсивности  $I$  и координаты  $x$  для серого газа выбираются несколько иначе

$$i = (\sigma T_*^4)^{-1} I, \quad d\tau = \kappa dx \quad (1.16)$$

Здесь  $\tau$  — оптическая толщина газа для серого излучения. Учитывая (1.16), запишем аналоги уравнений (1.13), (1.14) для серого газа

$$B \frac{d}{d\tau} \left( h + \frac{v^2}{2} \right) = (1-\lambda)(w - \theta^4), \quad B = B_0/4 \quad (1.17)$$

$$\mu \frac{\partial i}{\partial \tau} + i = \frac{1-\lambda}{\pi} \theta^4 + \frac{\lambda}{\pi} w \quad (1.18)$$

При аппроксимации уравнения переноса методом сферических гармоник интегро-дифференциальное уравнение переноса заменяется системой дифференциальных уравнений для моментов интенсивности излучения. В простейшем, диффузионном приближении эта система может быть сведена к набору дифференциальных уравнений второго порядка для плотности излучения  $w$ , в которые частота  $y$  входит в качестве параметра. Для серого газа эта система сводится к одному уравнению [7]

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 w}{d\tau^2} = (1-\lambda)(w - \theta^4) \quad (1.19)$$

Точные краевые условия (1.6) в этом случае заменяются на интегральные, представляющие собой потоки лучистой энергии, которые входят слева и справа в рассматриваемый объем [8]

$$w - \frac{2}{3} \frac{dw}{d\tau} = 2\pi \int_0^1 i_1 \mu d\mu, \quad x = x_1; \quad w + \frac{2}{3} \frac{dw}{d\tau} = -2\pi \int_{-1}^0 i_2 \mu d\mu, \quad x = x_2 \quad (1.20)$$

2. Для краткости опишем обычный подход к решению сформулированной задачи только для серого газа. Этот подход состоит в введении уже описанной оптической толщины  $\tau$ . Координата  $x$  не входит явно в уравнения (1.17), (1.18). Поэтому можно считать, что искомые функции  $v$  и  $i$  зависят от оптической толщины. После решения задачи можно вычислить связь оптической толщины  $\tau$  с физической координатой  $x$ , интегрируя уравнение

$$d\tau / dx = \kappa [v(\tau)]$$

Однако до решения эта связь неизвестна. Поэтому заранее неясна величина оптической толщины слоя (1.5). Если точку  $x = x_1$  принять за начало отсчета оптической толщины,  $\tau_1 = 0$ , то величина  $\tau_2$ , соответствующая  $x = x_2$ , неизвестна. Поэтому вводить оптическую толщину в одномерную задачу неэффективно даже для серого газа, если плоский слой имеет конечную оптическую толщину.

Выбор оптической толщины в качестве независимого переменного удобен тогда, когда заранее известно, что оптическая толщина рассматриваемого объема равна бесконечности. К таким течениям относятся, например, плоская ударная волна, движущаяся с постоянной скоростью в неограниченном пространстве, если коэффициент поглощения нигде не обращается в нуль. В этом случае оптическая толщина газа равна бесконечности как вверх, так и вниз по потоку от ударной волны.

В качестве другого примера можно привести равномерное истечение горячего газа из плоской пористой стенки в неограниченное пространство. Если стенка холодная и ее отражающими свойствами можно пренебречь, то эту же задачу можно интерпретировать как охлаждение излучающего, поглощающего, рассеивающего газа, сжатого ударной волной, которая распространяется по абсолютно холодному неизлучающему, непоглощающему, нерассеивающему газу. Такое течение будет выбрано для иллюстрации метода в этом и следующем пунктах.

Выпишем краевые условия для этой задачи

$$v(0) = 1 \quad (2.1)$$

$$i(0, \mu) = i_1 = 0, \quad 0 < \mu \leq 1; \quad i(\infty, \mu) = i_2 = \theta^4 [v(\infty)] / \pi, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (2.2)$$

$$w(0) - \frac{2}{3} \left( \frac{dw}{d\tau} \right)_{\tau=0} = 0, \quad w(\infty) = \theta^4 [v(\infty)] \quad (2.3)$$

Условия (2.2) относятся к кинетическому уравнению переноса (1.18), а условия (2.3) — к диффузионному приближению (1.19). Второе из условий (2.2) и (2.3) означает, что на бесконечности имеет место полное термодинамическое равновесие. Излучение, выходящее через ударную волну, уносит энергию на бесконечность. Течение газа до ударной волны невозмущенное и представляет собой равномерный поток с заданной скоростью. Величины непосредственно за фронтом ударной волны приняты за характерные.

Уравнение (1.18) с условиями (1.15) можно проинтегрировать вдоль характеристик  $\mu = \text{const}$ , считая  $w(\tau)$  заданной величиной

$$i(\tau, \mu) = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\lambda w + (1 - \lambda)\theta^4}{\pi \mu} e^{-(\tau - \xi)/\mu} d\xi + i_0(\mu) e^{-(\tau - \tau_0)/\mu} \quad (2.4)$$

Здесь нужно положить  $i_0 = i_1$ ,  $\tau_0 = \tau_1$  при  $0 < \mu \leq 1$  и  $i_0 = i_2$ ,  $\tau_0 = \tau_2$  при  $0 > \mu \geq -1$ . Если используются условия (2.2), то  $\tau_2 = \infty$ , и для от-

рицательных  $\mu$  второе слагаемое обращается в нуль для любой конечной интенсивности  $i_2$ . Для положительных  $\mu$  второе слагаемое обращается в нуль в силу (2.2). После интегрирования интенсивности по полному телесному углу получим уравнение для плотности излучения

$$w(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{1 - \lambda[v(\xi)]\} \theta^4[v(\xi)] E_1(|\tau - \xi|) d\xi + \quad (2.5)$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \lambda[v(\xi)] w(\xi) E_1(|\tau - \xi|) d\xi, \quad E_n(\xi) = \int_1^{\infty} \eta^{-n} e^{-\eta\xi} d\eta, \quad \xi > 0$$

Уравнение (2.5), называемое в теории переноса нейтронов уравнением Пайерлса, линейно и может быть эффективно разрешено при известном значении  $\theta[v(\tau)]$  и  $\lambda = \text{const}$  [9].

Уравнения (1.17) и (2.5) с краевым условием (2.1) целиком описывают задачу о структуре ударной волны, идущей по холодному газу.

В диффузионном приближении роль интегрального уравнения (2.5) играет дифференциальное уравнение (1.19).

Для нерассеивающего газа  $\lambda \equiv 0$ , и уравнение (2.5) дает зависимость функции  $w$  от  $v$ . Подставляя  $w$  из (2.5) в (1.17), сведем задачу к решению одного интегро-дифференциального уравнения относительно неизвестной функции  $v(\tau)$

$$B \left( \frac{dh}{dv} + v \right) \frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \theta^4[v(\xi)] E_1(|\tau - \xi|) d\xi - \theta^4[v(\tau)] \quad (2.6)$$

Интегрируя (2.6) с краевым условием (2.1), получаем интегральное уравнение задачи

$$h[v(\tau)] - h(1) + [v^2(\tau) - 1/2] = \quad (2.7)$$

$$= - \frac{1}{2B} \int_0^{\infty} \theta^4[v(\xi)] [E_2(|\tau - \xi|) \text{sgn}(\tau - \xi) + E_2(\xi)] d\xi$$

Правая часть уравнения (2.7) описывает изменение полной энтальпии за счет излучения. При слабом влиянии излучения на движение среды, т. е. при  $B_0 \gg 1$ , отклонение безразмерной скорости от единицы невелико. Правая часть является сжимающим оператором. Решение уравнения (2.7) можно искать методом сжатых отображений. При  $B_0 \ll 1$ , т. е. при сильном влиянии излучения, скорость газа сильно уменьшается, причем наибольшее уменьшение происходит сразу за фронтом ударной волны. За ударной волной образуется пограничный слой. Норма оператора правой части велика. Поэтому численное решение уравнения (2.7) для всех значений  $\tau$  ( $0 \leq \tau < \infty$ ) затруднительно.

Однако задачу можно сформулировать по другому, не используя понятия оптической толщины. Покажем это вначале для серого газа, а затем исследуем селективное излучение.

3. Выразим из уравнения (1.17) дифференциал  $dx = d\tau / \kappa$  через дифференциал  $dv$

$$dx = \frac{B}{\kappa} K dv, \quad K = \frac{dh/dv + v}{(1 - \lambda)(w - \theta^4)} = K(v, w), \quad w = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 i d\mu \quad (3.1)$$

В кинетическом уравнении (1.18) заменим производную по  $x$  через производную по  $v$ , используя связь (3.1)

$$\mu \frac{\partial i}{\partial v} + BKi = \frac{B}{\pi} K[(1 - \lambda)\theta^4 + \lambda w] \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) совпадает по форме с исходным уравнением (1.18), если считать, что величина  $K$  — коэффициент поглощения для интенсивности  $i$ . При этом  $i$  должна рассматриваться как функция от  $v$ , а не от  $x$ :  $i = i(v, \mu)$ . Тогда  $w = w(v)$ . Параметр  $B$  не включен в определение коэффициента поглощения из соображений удобства. Отметим, что коэффициент  $\kappa = \kappa_a + \kappa_s$  в уравнение (3.2) не входит.

Условия (1.15) или (2.2) должны быть переписаны с учетом того, что  $i$  теперь зависит от  $v$

$$i(v_1, \mu) = i_1(\mu), \quad 0 < \mu \leq 1; \quad i(v_2, \mu) = i_2(\mu), \quad 0 > \mu \geq -1 \quad (3.3)$$

$$i(1, \mu) = i_1 = 0, \quad 0 < \mu \leq 1; \quad i(v_2, \mu) = i_2 = \theta^4(v_2) / \pi, \quad -1 \leq \mu \leq 1 \quad (3.4)$$

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (3.2) с краевыми условиями типа (3.3) или (3.4) полностью описывает широкий класс одномерных задач. Это кинетическое уравнение учитывает одновременно процесс переноса излучения и динамику течения газа.

В рассматриваемом случае изотропного рассеяния и для известных функций  $i_1$  и  $i_2$  уравнение (3.2) можно трансформировать в интегральное уравнение.

Интегрируя (3.2) с условиями (3.3) вдоль характеристик, получим

$$i(v, \mu) = \int_{v_0}^v \frac{B}{\pi \mu} K(\xi, w) [(1 - \lambda)\theta^4 + \lambda w] \exp\left[-\int_{\xi}^v \frac{B}{\mu} K(\eta, w) d\eta\right] d\xi + \\ + i_0(\mu) \exp\left[-\int_{v_0}^v \frac{B}{\mu} K(\eta, w) d\eta\right] \quad (3.5)$$

Из (3.3) следует, что в (3.5) нужно положить  $v_0 = v_1$ ,  $i_0 = i_1$  при  $0 < \mu \leq 1$  и  $v_0 = v_2$ ,  $i_0 = i_2$  при  $0 > \mu \geq -1$ . Если используются условия (3.4), то для положительных  $\mu$  второй член в (3.5) обращается в нуль. Однако при отрицательных  $\mu$  точка  $v = v_2$ , являющаяся началом интегрирования, оказывается особой. При  $v = v_2$  знаменатель функции  $K$  обращается в нуль. При этом показатели экспонент в (3.5) обращаются в  $-\infty$ . Эта ситуация аналогична случаю  $\tau = \infty$  в п. 2.

Используя условия (3.4), проинтегрируем (3.5) по полному телесному углу

$$w(v) = \frac{B}{2} \int_{v_2}^1 \{ [1 - \lambda(\xi)] \theta^4(\xi) + \lambda(\xi) w(\xi) \} K[\xi, w(\xi)] \times \\ \times E_1 \left\{ B \left| \int_{\xi}^v K[\eta, w(\eta)] d\eta \right| \right\} d\xi \quad (3.6)$$

Величина  $v_2$  заранее неизвестна. Однако при  $v = v_2$  среда находится в состоянии полного термодинамического равновесия. Поэтому

$$w(v_2) = \theta^4(v_2) \quad (3.7)$$

Нелинейное интегральное уравнение (3.6), определяющее плотность лучистой энергии  $w$  как функцию от скорости газа  $v$ , аналогично линейному уравнению Пайерлса (2.5), которое определяет  $w$  как функцию от оптической толщины  $\tau$  для неподвижной среды.

Решение уравнения (3.6) определяет функцию  $w(v)$ . После этого из уравнения энергии (1.17) при помощи квадратуры находится координата  $x$  или оптическая толщина  $\tau$ , как функция от  $v$ . Отметим, что оптическая толщина может вообще нигде не вводиться в задачу.

Сравним уравнение (3.6) для  $w(v)$  с уравнением (2.5) для  $w(\tau)$ . Уравнение (2.5) линейно по  $w$ , однако при известной функции  $v(\tau)$ . При  $\lambda \equiv 0$  оно дает возможность освободиться от функции  $w$  и сформулировать задачу в виде нелинейного интегрального уравнения для  $v(\tau)$ . Уравнение (3.6) нелинейно, подынтегральная функция сингулярна при  $v = v_2$ , случай  $\lambda \equiv 0$  не упрощает ситуацию. При использовании уравнения (3.6) задача всегда решается в два этапа; находится функция  $w(v)$ , а затем функция  $x(v)$ .

Одномерная стационарная задача всегда сводится к нахождению двух функций от координаты — скорости газа  $v$  и плотности излучения  $w$ . Поэтому естественно назвать плоскость  $(v, w)$  фазовой плоскостью. Уравнение (3.6) описывает задачу в фазовой плоскости. Связь с физической координатой осуществляется при помощи одной квадратуры после нахождения решения в фазовой плоскости.

Несмотря на сложность, уравнение (3.6) предпочтительнее уравнения (2.5) потому, что оно — «внутреннее уравнение» проблемы. В одномерном течении скорость газа служит мерой как кинетической, так и внутренней энергии газа. Поэтому фазовая плоскость может рассматриваться как энергетическое пространство, в котором вдоль осей откладываются характеристики энергии вещества и излучения.

При больших числах Больцмана энергия вещества слабо зависит от энергии излучения. Поэтому траектория в фазовой плоскости, т. е. кривая  $w = w(v)$ , близка к вертикальной прямой. Это соображение может быть положено в основу приближенного метода решения уравнения в фазовой плоскости при  $B_0 \gg 1$ . При малых числах Больцмана возможны две ситуации. Если оптическая толщина течения велика, и нет больших градиентов коэффициента поглощения и температуры, то излучение заперто. В этом случае правая часть уравнения энергии (1.17) имеет порядок  $O(B_0)$ . Это означает, что  $w = \theta^4 + O(B_0)$ . Это соображение может быть положено в основу метода расчета запертого излучения в движущемся газе. Если же течение содержит большие градиенты, то излучение целиком формирует движение. Энергия излучения слабо зависит от энергии вещества, и траектория в фазовой плоскости близка к горизонтальной прямой. При этом норма оператора, стоящего в правой части уравнения (3.6), стремится к нулю при  $B_0 \rightarrow 0$ . Поэтому решение интегрального уравнения (3.6) при  $B_0 \ll 1$  для незапертого излучения может быть найдено методом сжатых отображений.

Если вместо кинетического уравнения используется его диффузионное приближение, то можно найти интеграл уравнений (1.17), (1.19)

$$B \left( h + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{3} \frac{dw}{d\tau} + C \quad (3.8)$$

Постоянную  $C$  можно определить через неизвестное значение  $v_2$  при  $\tau = \infty$  или через неизвестное значение  $dw/d\tau$  на ударной волне

$$C = B[h(v_2) + v_2^2/2] = B[h(1) + 1/2] - w(1)/2 \quad (3.9)$$

Здесь использовано первое из условий (1.20). Из (3.9) получаем связь между плотностью лучистой энергии на ударной волне и скоростью газа на бесконечности

$$w(1) = 2B[h(1) - h(v_2) + (1 - v_2^2)/2] \quad (3.10)$$

Исключая из (1.17) и (3.8)  $d\tau$  (или  $dx$ ), получаем дифференциальное уравнение задачи в фазовой плоскости

$$\frac{dw}{dv} = 3B^2 \frac{[h(v) - h(v_2) + (v^2 - v_2^2)/2] (dh/dv + v)}{[1 - \lambda(v)] [w(v) - \theta^4(v)]} \quad (3.11)$$

Здесь в качестве постоянной  $C$  выбрано ее первое значение из (3.9). Уравнение (3.11) должно быть решено в интервале  $v_2 \leq v \leq 1$ , левый конец которого неизвестен. Однако должно выполняться дополнительное «краевое условие» (3.10). Следовательно, диффузионное приближение в фазовой плоскости приводит к своеобразной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

4. Если излучение селективное, то дифференциал  $dX$  может быть выражен через  $dv$  из уравнения (1.13)

$$dX = \frac{B_s}{k} K dv, \quad K = \frac{k}{q} \left( \frac{dh}{dv} + v \right) \quad (4.1)$$

Пусть, как и в предыдущем пункте, функция  $i$  зависит от аргументов  $v, y, \mu$ . Тогда при помощи (4.1) и (1.14) выпишем нелинейные кинетические уравнения всей задачи

$$\mu \frac{\partial i}{\partial v} + B_s K i = \frac{1}{\pi} B_s j, \quad 0 < y < \infty \quad (4.2)$$

Здесь величина  $j = K[\pi(1 - \lambda)P + \lambda w]$  — функция источника. Функция  $K = K(v, y)$  является аналогом коэффициента поглощения  $\kappa$  в физической плоскости. При переносе излучения в неподвижной среде частота излучения входит в уравнения переноса в качестве параметра. Для системы (4.2) это не так, так как функция  $q(v)$ , определенная формулой (1.13), — функционал от всех интенсивностей  $i(v, y, \mu)$ ,  $0 < y < \infty$ .

Уравнения (4.2) с краевыми условиями типа (3.3) или (3.4) полностью описывают одномерную задачу.

Как и для серого излучения, здесь можно выписать аналог уравнения Пайерлса, интегрируя (4.2) вдоль характеристик, а затем по всем телесным углам. Рассматривая задачу об охлаждении газа, получим

$$w(v, y) = \frac{B_s}{2} \int_{v_2}^1 K(\xi, y) j(\xi, y) E_1 \left[ B_s \left| \int_{\xi}^v K(\eta, y) d\eta \right| \right] d\xi, \quad 0 < y < \infty \quad (4.3)$$

Величина  $v_2$  заранее неизвестна. Она определяется из условия полного термодинамического равновесия при  $v = v_2$

$$w(v_2, y) = P(v_2, y); \quad 0 < y < \infty$$

Фазовое пространство  $(v, w)$  имеет бесконечную размерность в отличие от случая серого излучения. Однако при  $\lambda(v, y) \equiv 0$ , т. е. для нерассеивающего газа постановка задачи сильно упрощается. Вычислим величину  $q(v)$ , определенную в (1.13), при помощи уравнений (4.3)

$$q(v) = -\frac{\pi^5 k_p(v)}{15} \theta^4(v) + \frac{\pi B_s}{2} \int_{v_2}^1 \frac{d\xi}{q(\xi)} \left( \frac{dh}{d\xi} + \xi \right) \times \\ \times \int_0^{\infty} dy k(v, y) k(\xi, y) P(\xi, y) E_1 \left\{ B_s \left| \int_{\xi}^v \frac{k(\eta, y)}{q(\eta)} \left( \frac{dh}{d\eta} + \eta \right) d\eta \right| \right\} \quad (4.4)$$



Функция  $k_p$  — безразмерный планковский коэффициент поглощения

$$k_p = hu_*(kT_*)^{-1} \int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu d\nu \left( \int_0^\infty B_\nu d\nu \right)^{-1}$$

который для каждого конкретного газа представляет собой известную функцию от  $\nu$ .

При малых  $B_s$  возможны два случая, как и для модели серого газа. Для запертого излучения  $q = O(B_s)$ , что соответствует соотношению  $w = \theta^4 + O(B_0)$  для серого газа. При наличии больших градиентов интегральный оператор в правой части (4.4) имеет норму, стремящуюся к нулю при  $B_s \rightarrow 0$ . Это означает, что  $q \rightarrow -\pi^5 k_p \theta^4 / 15$ , т. е. к планковскому пределу объемного высвечивания. Эта ситуация соответствует случаю  $w \rightarrow 0$  для серой модели.

5. В качестве примера рассмотрим сильную ударную волну, идущую по холодному прозрачному газу. Для селективного излучения задача описывается уравнением (4.4). При  $B_s \rightarrow 0$  в нулевом приближении

$$q(\nu) \rightarrow q_0(\nu) = -\pi^5 k_p(\nu) \theta^4(\nu) / 15 \quad (5.1)$$

Это означает, что поглощение энергии газом пренебрежимо мало по сравнению с излучением. Действуя методом последовательных подстановок, подставим правую часть (5.1) в правую часть уравнения (4.4). Пользуясь асимптотикой функции  $E_1$  при больших и малых значениях аргумента, получим результат первого приближения

$$q_1(\nu) = q_0(\nu) + \Phi(\nu) B_s \ln B_s^{-1}$$

$$\Phi(\nu) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{d\xi}{q_0(\xi)} \left( \frac{dh}{d\xi} + \xi \right) \int_0^\infty k(\nu, y) k(\xi, y) P(\xi, y) dy \quad (5.2)$$

Значение скорости  $v_2$  на бесконечности получается из условия  $q(v_2) = 0$  или в первом приближении

$$\pi^5 k_p(v_2) \theta^4(v_2) / 15 = \Phi(v_2) B_s \ln B_s^{-1} \quad (5.3)$$

Для серого излучения течение описывается уравнением (3.6). При  $B \rightarrow 0$  в нулевом приближении  $w \rightarrow w_0 = 0$ . Подставляя это выражение в правую часть и пользуясь асимптотикой функции  $E_1$ , получим в первом приближении

$$w_1(\nu) = [h(1) + 1/2] (B/2) \ln B^{-1} = \text{const} \quad (5.4)$$

Отметим, что это значение плотности излучения, соответствующее второму члену в правой части (5.2), постоянно для серого излучения и является функцией от  $\nu$  для селективного излучения. Пользуясь условием (3.7) на бесконечности, получим

$$\theta_2 = [h(1) + 1/2]^{1/4} (B/2)^{1/4} \ln^{1/4} B^{-1} \quad (5.5)$$

Отсюда видно, что газ сильно остывает за счет излучения через ударную волну. Если  $k_p(v_2) = O[\Phi(v_2)]$ , то окончательная температура селективно излучающего газа будет иметь порядок (5.5). Однако в противном случае температуры серого и селективного газа могут различаться очень сильно.

Используя (5.2) или (5.4), можно проинтегрировать уравнение энергии (1.13) или (1.17) и тем самым решить задачу до конца.

6. В качестве второго примера рассмотрим ударную волну, распространяющуюся в излучающем, поглощающем и рассеивающем газе. Будем считать, что оптическая толщина газа равна бесконечности как вниз, так и вверх по течению от ударной волны. Такое течение в целом является адиабатическим, так как за счет излучения энергия только перераспределяется между различными элементами объема. Для простоты рассмотрим совершенный газ и воспользуемся диффузионным приближением для уравнения переноса.

Безразмерную скорость и безразмерную плотность излучения для совершенного газа удобней ввести по формулам

$$v = \frac{u}{C_2}, \quad w = \frac{\pi R^4}{2\sigma C_2^8} \int_{-1}^1 I(x, \mu) d\mu \quad (6.1)$$

где  $C_1, C_2$  определены формулами (1.1). Состоянию газа на  $-\infty$  ( $+\infty$ ) припишем

индекс 1(2). Интеграл (3.8) перейдет в соотношение

$$b \left( \frac{\gamma v}{\gamma + 1} - \frac{v^2}{2} \right) = \frac{1}{3} \frac{dw}{d\tau} + C, \quad b = \frac{\rho_1 R^{\lambda} (\gamma + 1)}{4\sigma u_1^5 (\gamma - 1)} \left( 1 + \frac{1}{\gamma M_1^2} \right)^{-6} \sim B_0 \quad (6.2)$$

в котором  $\gamma$  — показатель адиабаты. Параметр  $b$ , пропорциональный  $B_0$ , вычислен с учетом термодинамических связей для совершенного газа. Через  $M_1$  обозначено число Маха набегающего потока на  $-\infty$ .

Постоянная  $C$  определяется при  $\tau = \mp\infty$

$$C = b \left( \frac{\gamma v_1}{\gamma + 1} - \frac{v_1^2}{2} \right) = b \left( \frac{\gamma v_2}{\gamma + 1} - \frac{v_2^2}{2} \right) \quad (6.3)$$

Тогда дифференциальное уравнение задачи в фазовой плоскости имеет вид

$$\frac{dw}{dv} = \frac{3b^2 (v_s - v)(v_1 - v)(v - v_2)}{2 [1 - \lambda(v)][w(v) - \theta^{\lambda}(v)]}, \quad \theta(v) = v(1 - v) \quad (6.4)$$

Здесь через  $v_s$  обозначена скорость газа в звуковой точке. Совместим начало координат ( $x = 0$  или  $\tau = 0$ ) с этой точкой. Обозначим через  $v_-$  и  $v_+$  величину скорости до и после разрыва. Известно [5], что

$$v_s = \frac{\gamma}{\gamma + 1} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{v_- + v_+}{2} \quad (6.5)$$

Если разрыв скорости существует ( $v_- \neq v_+$ ), то значение скорости, равное  $v_s$ , обходится скачком. Если скорость терпит разрыв при  $x = 0$ , то плотность излучения  $w(v)$  представляет непрерывную функцию от разрывного аргумента.

Вопрос о наличии разрыва скорости при сильном влиянии излучения на движение до сих пор остается в значительной степени невыясненным. В работах [2-5] получен ряд критериев существования разрывных и непрерывных решений в ударных волнах при наличии сильного излучения. Однако этот вопрос нигде не связывался с величиной показателя адиабаты газа. Ниже будет показано, что для достаточно сильной ударной волны, за которой достигается изотермически дозвуковой режим ( $v_2 < 1/2$ ), разрыв может исчезнуть за счет сильного излучения только при  $\gamma > 2$ .

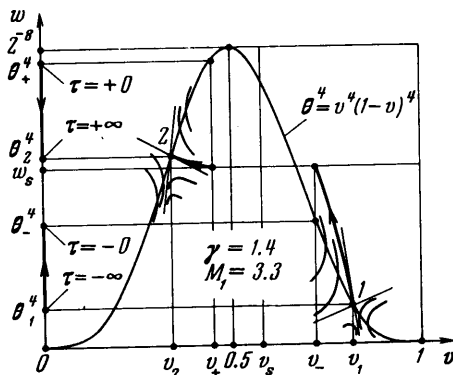
Точки  $(v_1, w_1)$ ,  $(v_2, w_2)$  для уравнения (6.4) — особенности типа седла. Направления сепаратрис, выходящих из этих седел, даются формулой

$$\begin{aligned} (dw/dv)_0 &= a \pm \{a^2 + 3b^2(v_s - v_0)^2 / \\ & / [1 - \lambda(v_0)]\}^{1/2}, \\ a &= 2v_0^3(1 - v_0)^3(1 - 2v_0) \quad (6.6) \end{aligned}$$

в которой индекс 0 нужно заменить на 1 или 2 соответственно. Картина интегральных кривых уравнения (6.4) показана на фигуре.

Плотность лучистой энергии  $w$  должна быть непрерывной функцией от  $x$  и, следовательно, непрерывной функцией от  $v$ . Кроме того, тепловыделение во всем пространстве за счет переноса лучистой энергии должно быть равно нулю. Из фигуры видно, что удовлетворить этим требованиям можно только тогда, когда интегральная кривая состоит из кусков сепаратрис, имеющих отрицательный угол наклона в точках 1 и 2.

Интегральные кривые, выходящие из точек 1 и 2, рассчитываются независимо одна от другой. После этого значения скорости  $v_-$  и  $v_+$  слева и справа от разрыва находятся следующим образом. Проводится прямая  $w = w_s = \text{const}$ ,  $\theta^{\lambda}(v_2) > w_s > \theta^{\lambda}(v_1)$ . Она пересекает левую сепаратрису, прямую  $v = v_s$  и правую сепаратрису. Если расстояние между первой и второй точками пересечения равно расстоянию между второй и третьей точками пересечения, то согласно (6.5) величина  $w_s$  равна плотности лучистой энергии в точке разрыва скоростей. Величины  $v_-$  и  $v_+$  равны абсциссам пересечения прямой  $w = w_s$  с интегральными кривыми, выходящими из точек 1 и 2.



При  $b \rightarrow 0$  величины  $v_-$  и  $v_+$  нетрудно определить аналитически. Из (6.6) и (6.4) видно, что сепаратриса, выходящая из точки 2, имеет наклон порядка  $O(b^2)$  к оси  $v$ . Значит при малых  $b$  она близка к прямой  $w = w_2$ . Из этих же уравнений видно, что сепаратриса, выходящая с отрицательным наклоном из точки 1, расположена выше кривой  $w = \theta^4(v)$  на величину порядка  $O(b^2)$ . Значит при малых  $b$  она близка к кривой  $w = \theta^4(v)$ .

Используя эти соображения, соотношения (6.5), способ обезразмеривания скорости (6.1), законы сохранения (1.1) и термодинамические соотношения для совершенного газа, получим

$$\Delta(M_1, \gamma) = v_- - v_+ = 2 \frac{\gamma M_1^2 (2 - \gamma) + (1 - 2\gamma)}{(\gamma + 1)(1 + \gamma M_1^2)} \quad (6.7)$$

Требование  $\Delta > 0$  (и  $M_1 > 1$ ) приводит к двум неравенствам

$$\gamma < 2, \quad M_1^2 > \frac{2\gamma - 1}{\gamma(2 - \gamma)} \quad (6.8)$$

Из первого неравенства следует, что разрыв параметров в ударной волне при  $b \rightarrow 0$  возможен только при  $\gamma < 2$ , а из второго — только для достаточно сильных ударных волн ( $M_1 > 1.46$  при  $\gamma = 1.4$  и  $M_1 > 2.05$  при  $\gamma = 5/3$ ).

Отметим, что при  $b \rightarrow 0$  и  $M_1 \rightarrow \infty$  одновременно величина разрыва при  $\gamma < 2$  стремится к ненулевому значению

$$\Delta(\infty, \gamma) = 2(2 - \gamma) / (\gamma + 1)$$

Из фигуры видно, что температура газа с ростом  $\tau$  монотонно увеличивается от  $\theta_1$  до  $\theta_-$ , затем скачком увеличивается до  $\theta_+$  и монотонно уменьшается до  $\theta_2$ . Из поведения интегральных кривых видно, что  $\theta_- \rightarrow \theta_2 = 0$  при  $b \rightarrow 0$ . Это означает, что при сильном влиянии излучения на движение температура газа слева от разрыва стремится к температуре газа при  $x = +\infty$ .

Равновесный процесс теплопроводности, молекулярной или лучистой, приводит к изотермическому разрыву при достаточно больших кондуктивных тепловых потоках [10]. В работах [2-4] было отмечено, что в любом реальном скачке вблизи разрыва перенос излучения должен быть неравновесен, что приводит к наличию температурного пика за точкой разрыва скорости. Из изложенного выше следует, что разрыв существует при  $\gamma < 2$  и достаточно больших числах Маха набегающего потока. Форма температурного пика, которую можно назвать «структурой изотермического скачка», получается квадратурой из уравнения энергии (1.17), записанного в переменных совершенного газа

$$d\tau = b \int_{v_+}^v \frac{[\gamma/(\gamma + 1) - \xi] d\xi}{[1 - \lambda(\xi)] [\theta_2^4 - \theta^4(\xi)]}, \quad v \leq v_+$$

Интегрирование уравнения (1.17) с известной функцией  $w(v)$  решает эту задачу до конца.

7. Метод фазовой плоскости, описанный в работе, весьма удобен для решения одномерных стационарных задач радиационной газовой динамики. Его сравнение с обычным методом, использующим оптическую толщину, уже обсуждалось в п. 3. Подчеркнем еще раз, что в фазовой плоскости проводится анализ взаимодействия энергии вещества с энергией лучистого поля. Поскольку влияние излучения на течение газа происходит только через уравнение энергии, возникает уверенность, что уравнение в фазовой плоскости описывает суть проблемы. После того как скорость выделения лучистой энергии известна как функция от скорости газа, физическая координата находится при помощи квадратуры.

Остается открытым вопрос об однозначности отображения координаты  $x$  на координату  $v$ . Он, по-видимому, должен решаться при исследовании конкретных задач. В п. 6 показано, что наличие разрывов скорости не препятствует применению метода фазовой плоскости. Наоборот, при его помощи можно достаточно легко определить величину этих разрывов.

Описанный выше прием решения возникает естественно при исследовании течений с вязкостью и теплопроводностью [11]. Поэтому течение вязкого теплопроводящего диффундирующего многокомпонентного излучающего, поглощающего и рассеивающего газа при наличии химических реакций тоже может рассматриваться в фазовом пространстве.

Автор благодарен Ю. Д. Шмыглевскому за ценные дискуссии во время выполнения этой работы.

Поступило 1 III 1971

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прокофьев В. А. К вопросу об учете излучения при одномерном стационарном течении одноатомного газа. Уч. зап. МГУ, вып. 172, Механика, т. 5, МГУ, 1954.
  2. Зельдович Я. Б. Ударные волны большой амплитуды в воздухе. ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 5.
  3. Райзер Ю. П. О структуре фронта сильных ударных волн в газах. ЖЭТФ, 1957, т. 32, вып. 6.
  4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
  5. Heaslet M. A., Baldwin B. S., Jr., Predictions of the structure of radiation-resisted shock waves. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 6.
  6. Moore F. K., George Y. H. Choking of subsonic gas flow by thermal radiation. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 3.
  7. Марчук Г. И. Методы решения ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
  8. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Тр. матем. ин-та АН СССР, т. 61, М., Изд-во АН СССР, 1961.
  9. Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел. М., «Наука», 1969.
  10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
  11. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
-