

УДК 533.6.01.8

## ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДОННОЙ ЗОНЕ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ

Л. А. ТЕМКИН

(Харьков)

Рассматривается задача об установившемся обтекании полубесконечного бруса плоским потоком одноатомного разреженного газа (плоский стационарный случай задачи о донной зоне). Задача решается численно на уровне релаксационной модели Крука [1, 2]. При помощи вычислений на ЭВМ М-20 получена зависимость плотности, скорости и температуры газа во всей области течения от пространственных координат для обтекания тела сверхзвуковым и дозвуковым потоками газа.

1. Уравнение Крука можно записать в виде

$$f = Vf_0. \quad (1.1)$$

Здесь (в стационарном случае)  $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  — функция распределения молекул газа по координатам и скоростям,  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  — локально-максвелловская функция распределения

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m}{2kT} (\mathbf{u} - \mathbf{U})^2 \right]$$

$$n = n(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f \, d\mathbf{u}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u} f \, d\mathbf{u} \quad (1.2)$$

$$T = T(\mathbf{r}) = \frac{m}{3nk} \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{u} - \mathbf{U})^2 f \, d\mathbf{u}$$

где  $k$  — постоянная Больцмана,  $m$  — масса одной молекулы,  $n(\mathbf{r})$  — число частиц в единице объема,  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  — макроскопическая скорость движения газа,  $T(\mathbf{r})$  — температура газа в точке  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  — скорость движения молекулы,  $d\mathbf{u} = du_x du_y du_z$ ,  $V$  — интегральный кинетический оператор.

Будем исходить из системы интегральных кинетических уравнений, предложенной в работах [3, 4]. Тогда (1.1) в развернутом виде запишется так:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \int_0^{+\infty} \Phi_0(\mathbf{r} - \tau \mathbf{u}, \mathbf{u}) \Pi_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \tau) \, d\tau \quad (\mathbf{u} \notin \Omega(\mathbf{r}))$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \frac{1}{u_n} \Psi_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}) \Pi_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \tau_s) + \int_0^{\tau_s} \Phi_0(\mathbf{r} - \tau \mathbf{u}, \mathbf{u}) \Pi_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \tau) \, d\tau \quad (\mathbf{u} \in \Omega(\mathbf{r}))$$

$$\Pi_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \tau) = \exp \left[ -\int_0^{\tau} Q_0(\mathbf{r} - q\mathbf{u}, \mathbf{u}) \, dq \right]$$

$$Q_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \sigma(|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1|) f_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}_1) d\mathbf{u}_1$$

$$\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) Q_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) \quad (1.3)$$

$$\Psi_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}) = - \iiint_{(\mathbf{u}_1)_{n < 0}} (\mathbf{u}_1)_n f_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}_1) \Theta(\mathbf{u}_1, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) d\mathbf{u}_1 \quad (1.4)$$

Здесь  $\Pi_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \tau)$  — вероятность свободного движения молекулы в точку  $\mathbf{r}$  со скоростью  $\mathbf{u}$  за время  $\tau$ ,  $\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  и  $\Psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{u})$  — внутренние и граничная функции рождений, соответствующие локально-максвелловской функции распределения,  $\sigma$  — сечение столкновения,  $\Theta(\mathbf{u}_1, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)$  — граничная ударная трансформанта,  $\theta = \theta(\mathbf{r}_s)$  — температура поверхности тела,  $\mathbf{r}_s$  — радиус-вектор точки на поверхности обтекаемого тела,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности,  $\tau$  — время свободного движения молекулы с поверхности тела в точку  $\mathbf{r}$ ,  $\Omega(\mathbf{r})$  — конус в пространстве скоростей, содержащий все скорости  $\mathbf{u}$ , с которыми молекула может прийти с тела в точку  $\mathbf{r}$  без столкновений. Конкретный вид функций  $\sigma$ ,  $T$  и  $\Theta$  для наиболее часто употребляемых моделей взаимодействия молекул газа между собой и с поверхностью обтекаемого тела рассмотрен в работе [5]. Поскольку  $f_0$  — локально-максвелловская функция распределения,

(1.3) выполняется только в силу законов сохранения независимо от механизма упругих столкновений [5].

Отметим, что наряду с (1.1) можно рассматривать аналогичное уравнение, выбрав в правой части (1.4) вместо  $f_0$  второе приближение функции распределения, получаемое по методу Чепмена — Энскога [6], соответствующее вязкому газу, что будет соответствовать более точному учету граничных условий.

Построим систему уравнений относительно функций  $n(\mathbf{r})$ ,  $U(\mathbf{r})$ ,  $T(\mathbf{r})$ . Из уравнения (1.1) с учетом (1.2) получим

$$n(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} V f_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad U(\mathbf{r}) = \frac{1}{n(\mathbf{r})} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u} \cdot V f_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

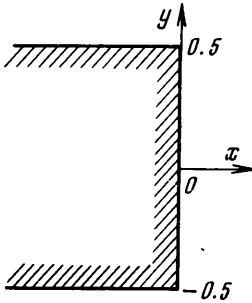
$$T(\mathbf{r}) = \frac{m}{3kn(\mathbf{r})} \iiint_{-\infty}^{+\infty} [\mathbf{u} - U(\mathbf{r})]^2 V f_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) d\mathbf{u} \quad (1.5)$$

2. Перейдем к численному решению системы уравнений (1.5) для случая установившегося обтекания полубесконечного бруса потоком разреженного газа. Газ будем считать состоящим из максвелловских молекул. Тогда [5]

$$\sigma(v) = \frac{\sigma_0}{v}, \quad \sigma_0 = \text{const}; \quad Q_0(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \sigma_n n(\mathbf{r})$$

Введем систему координат, как показано на фиг. 1. Пусть поток на бесконечности направлен вдоль оси  $x$ .

Предположим, что отражение молекул газа от поверхности обтекаемого тела диффузное и температура поверхности тела  $\theta(\mathbf{r}_s) = T(\mathbf{r}_s)$ .



Фиг. 1

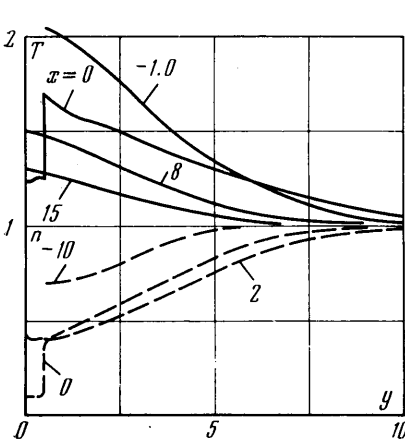
Тогда [5]

$$\Theta(\mathbf{u}, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{m}{2kT(\mathbf{r}_s)} \right]^2 u_n \exp \left[ -\frac{m}{2kT(\mathbf{r}_s)} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right]$$

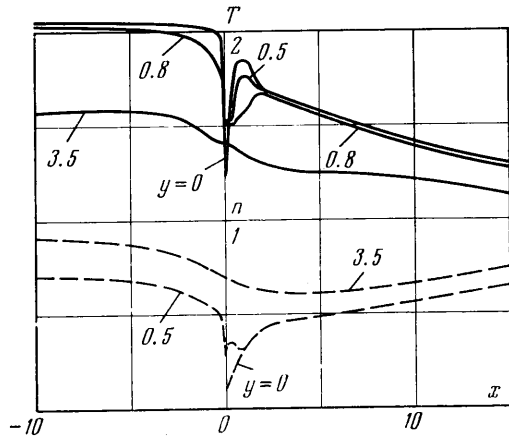
$$\Psi(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}) = n(\mathbf{r}_s) \left[ \frac{m}{2\pi kT(\mathbf{r}_s)} \right]^{3/2} u_n \exp \left[ -\frac{m}{2kT(\mathbf{r}_s)} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \right] \times$$

$$\times \left\{ \exp \left[ -\frac{m}{2kT(\mathbf{r}_s)} U_n^2(\mathbf{r}_s) \right] - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\pi} U_n(\mathbf{r}_s) \left( \frac{m}{2kT(\mathbf{r}_s)} \right)^{1/2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \left( \frac{m}{2kT(\mathbf{r}_s)} \right)^{1/2} U_n(\mathbf{r}_s) \right) \right] \right\}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Зададим условия на поверхности тела  $U_n(\mathbf{r}_s) = 0$  и на бесконечности  $n = n_\infty$ ,  $U = U_\infty$ ,  $T = T_\infty$ . Введем безразмерные переменные по формулам

$$x' = \frac{x}{h}, \quad y' = \frac{y}{h}, \quad n' = \frac{n}{n_\infty}, \quad T' = \frac{T}{T_\infty}$$

$$u' = \left( \frac{m}{2kT_\infty} \right)^{1/2} u, \quad U' = \left( \frac{m}{2kT_\infty} \right)^{1/2} U$$

$$M_\infty = U_\infty \left( \frac{6}{5} \right)^{1/2} \left( \frac{m}{2kT_\infty} \right)^{1/2}, \quad K_\infty = \frac{3}{2n_\infty \sigma_0 h} \left( \frac{m}{2kT_\infty} \right)^{-1/2}$$

Здесь  $h$  — толщина бруса,  $M_\infty$  и  $K_\infty$  — соответственно число Маха и число Кнудсена невозмущенного потока. Далее используем безразмерные переменные, опуская штрих.

Конкретизируем вид  $\tau_s$  и конуса  $\Omega(\mathbf{r})$ , соответствующих данному случаю. В силу симметрии потока газа относительно плоскости  $y = 0$  достаточно рассмотреть область  $y \geq 0$ . В данном случае, как нетрудно видеть из фиг. 1,  $\mathbf{u} \in \Omega(\mathbf{r})$ , если

$$\frac{x}{y-0.5} u_y < u_x, \quad u_y > 0 \quad (-\infty < x < +\infty, y > 0.5)$$

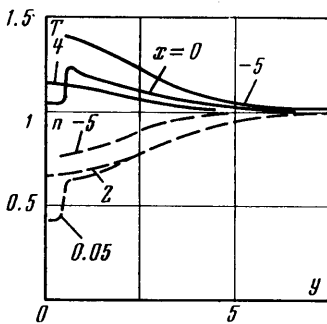
$$\frac{y-0.5}{x} u_x < u_y < \frac{y+0.5}{x} u_x, \quad u_x > 0 \quad (x > 0, -\infty < y < +\infty)$$

В первом случае  $\tau_s = (y - 0.5) / u_y$ , во втором случае  $\tau_s = x / u_x$ . Решаем (1.5) методом итераций, исходя из двух начальных приближений

$$\begin{aligned} n^\circ(x, y) &= 0 & (|y| \leq 0.5), \\ n^\circ(x, y) &= 1, & T^\circ(x, y) = 1, & U^\circ(x, y) = U_\infty, & (|y| > 0.5) \\ n^\circ(x, y) &= 1, & T^\circ(x, y) = 1 & V(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$U^\circ(x, y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq 0.5 \\ U_\infty & |y| > 0.5 \end{cases} \quad (2.2)$$

Отметим, что, исходя из таких начальных приближений, в первом приближении макропараметры выражаются по очень простым формулам через функцию



Фиг. 4

$$E_k(z, \zeta) = \int_0^{+\infty} v^k \exp \left[ -(v-z)^2 - \frac{\zeta}{v} \right] dv$$

рассмотренную в работе [7], и функцию

$$\begin{aligned} \Omega_k(\xi, \eta, \zeta) &= \\ &= \int_0^{+\infty} v^k \exp \left( -v^2 - \frac{\zeta}{v} \right) \operatorname{erf}(\xi v - \eta) dv \end{aligned}$$

Начальное приближение (2.1) дает первое приближение, удовлетворяющее условиям на бесконечности. В первом приближении, построенном по (2.2), условия на бесконечности не выполняются.

Построим на плоскости  $xu$  две неравномерные прямоугольные сетки, простирающиеся от обтекаемого тела на такое расстояние, на котором поток можно считать практически невозмущенным, а значения макропараметров равными их значениям на бесконечности. На одной сетке аппроксимируем приближенные значения макропараметров, полученных в первом приближении по (2.1), на другой — макропараметры, полученные по (2.2) (с учетом условий на бесконечности). Значения макропараметров в промежуточных точках будем получать с помощью билинейной интерполяции. Обе сетки имеют по 32 слоя по  $x$  и по 21 слою по  $y$ , причем выбираем различное расположение узлов на сетках, чтобы была уверенность в том, что способ аппроксимации не влияет на результаты вычислений.

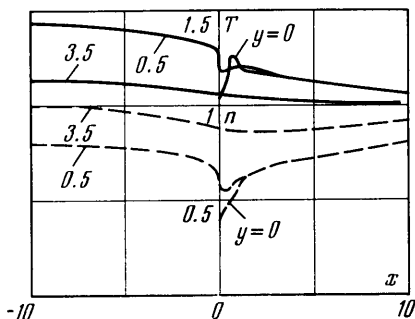
Следующие приближения приходится находить с помощью численного интегрирования. Итерации проводятся по Зайделю до практической сходимости (с относительной погрешностью, не превышающей вблизи уголков 3%, а в остальной области течения — 1%). Не приводя вычислительных подробностей, описанных в [8], отметим, что начальное приближение (2.1) дает несколько более быструю сходимость по сравнению с (2.2). Для достижения практической сходимости вне непосредственной близости от поверхности тела достаточно 10 итераций, в некоторых точках вблизи тела потребовалось провести  $\sim 20$  итераций.

Полученная в результате вычислений зависимость плотности и температуры газа от пространственных координат при  $K_\infty = 1$ ,  $M_\infty = 2$  приведена на фиг. 2, 3.

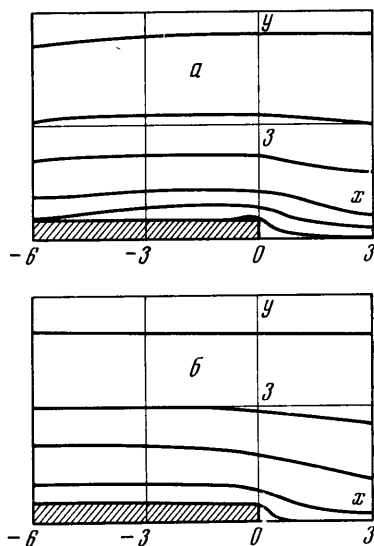
По найденному распределению в области течения плотности, скорости и температуры, взятому в качестве начального приближения, было рассчитано течение при  $K_\infty = 1$ ,  $M_\infty = 0.75$ . Результаты, соответствующие этому случаю, приведены на фиг. 4, 5. На фиг. 2—5 графики температуры нанесены сплошной линией, графики плотности — пунктиром.

На дне бруса вблизи уголков имеет место резкое повышение температуры, которая затем плавно выходит на уровень температуры на бесконечности. На оси симметрии потока температура имеет максимум в точке  $x_\infty \approx 1$  при  $M_\infty = 2$  и  $x \approx 0.6$  при  $M_\infty = 0.75$ , в то время как плотность и давление, вычисленное по формуле  $p = nT$ , при обоих значениях  $M_\infty$  монотонно растут, выходя на соответствующие значения на бесконечности.

По найденному полю скоростей были вычислены линии тока. Они приведены на фиг. 6, а и б для случаев  $M_\infty = 2$  и  $M_\infty = 0.75$  соответственно. В случае  $M_\infty = 2$  заметно отклонение линий тока от обтекаемого тела при подходе к дну вследствие



Фиг. 5



Фиг. 6

вие некоторого затормаживания потока газа вблизи застойной зоны; поток как бы омывает эту зону.

Отметим, что полученные выше результаты качественно согласуются с результатами работы [9], в которой получено решение задачи о донной зоне в рамках уравнений Навье — Стокса.

Автор благодарит С. В. Валландера за постановку задачи и внимание к работе и А. Д. Мышкиса за ряд полезных советов.

Поступило 26 V 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M. A model for collision processes in gases. Phys. Rev., 1954, vol. 94, No. 3.
2. Коган М. Н. Об уравнениях движения разреженного газа. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
3. Валландер С. В. Новые кинетические уравнения в теории одноатомных газов. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 1.
4. Валландер С. В. Уравнения и постановка задач в аэродинамике разреженных газов. В сб. «Аэродинамика разреженных газов», I, Л., Изд-во ЛГУ, 1963.
5. Баранцев Р. Г. Об ударных трансформантах кинетического уравнения аэродинамики разреженных газов. В сб. «Аэродинамика разреженных газов», I, Л., Изд-во ЛГУ, 1963.
6. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
7. Chachine M. T., Narasimha R. The integral  $\int_0^{+\infty} v^n \exp[-(v-u)^2 - xv^{-1}] dv$ . J. Math. and Phys., 1964, vol. 43, No. 2.
8. Темкин Л. А. О приближенном расчете плоских течений разреженного газа. Сб. научн. тр. физ.-техн. ин-та низких температур, 1969, вып. 1.
9. Мышкис В. И. Дозвуковое и трансзвуковое течение вязкого газа в следе плоского тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.