УДК 532.517.3

ВОЛНОВОЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ СОВМЕСТНО С ПОТОКОМ ГАЗА

А. А. ТОЧИГИН

(*Иваново*)

Волновое течение тонкого слоя вязкой жидкости совместно с газом рассмотрено в линейной постановке в [1, 2]. В данной работе задача о волновом течении жидкой пленки совместно с газовым потоком решается как нелинейная. На этой основе получены зависимости для расчетов параметров пленки и гидродинамических величин.

1. По вертикальной поверхности движется тонкий слой вязкой жидкости, взаимодействуя через поверхность раздела с потоком газа. Направим ось x вдоль стенки вниз, ось y — перпендикулярно стенке в сторону жидкости. Пусть $y = a(x, t)$ — уравнение поверхности раздела, а a_0 — средняя толщина жидкого слоя. Будем считать длину волны λ значительно большей средней толщины пленки ($\lambda \gg a_0$).

В этих условиях движение жидкой пленки описывается уравнениями Навье — Стокса для пограничного слоя, неразрывности и материального баланса

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + g + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0, \qquad u = \frac{1}{a}\int_0^a u_x\, dy \tag{1.2}$$

при следующих граничных условиях:

$$u_x = u_y = 0 \qquad (y = 0) \tag{1.3}$$

$$p = -\sigma \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + p_0, \qquad \tau_1 = \pm\tau \qquad (y = a) \tag{1.4}$$

Здесь p, p_0 — давления в жидкости и газе, τ_1, τ — касательные напряжения на поверхности раздела со стороны жидкости и газа, u — средняя в сечении скорость, ρ, σ — плотность и коэффициент поверхностного натяжения. Граничное условие (1.3) объясняется прилипанием жидкости к стенке, а (1.4) вытекает из соотношений на поверхности раздела двух жидкостей [3] при $\lambda \gg a_0$.

Представим переменную толщину слоя жидкости в виде

$$a = a_0(1 + \varphi) \tag{1.5}$$

где $\varphi(x, t)$ — возмущение поверхности раздела, вызванное волнообразованием. В случае установившегося волнового режима, когда волны перемещаются по поверхности раздела с постоянной скоростью c, φ и все зависящие от нее величины будут функцией одной обобщенной координаты $x - ct$. Тогда

$$-\frac{\partial a}{\partial t} = c\frac{\partial a}{\partial x}, \qquad -\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{1.6}$$

При установившемся и периодическом по x движении волн решение задачи можно представить в виде функции переменной

$$\beta = \frac{n}{a_0}(x - ct), \qquad n = 2\pi a_0/\lambda$$

где λ — длина волны.

При помощи уравнения неразрывности (1.2), граничных условий (1.3), (1.4) и второго уравнения (1.6) преобразуем уравнение движения (1.1) к виду

$$(u_x - c)\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\int \frac{\partial u_x}{\partial x}dy = \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^3 a}{\partial x^3} + q + \nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \tag{1.7}$$

Решая задачу (1.1) $\div$ (1.4) для плоского ламинарного течения жидкости, найдем

$$u_x = 3u(x,t)\left(\frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2}\right) - \frac{\tau a}{4\mu}\left(\frac{2y}{a} - \frac{3y^2}{a^2}\right) \tag{1.8}$$

Здесь принято, что $u_x = 0$ при $y = 0$ и $\mu\partial u_x / \partial y = \tau$ при $y = a$.

Используя u_x из (1.8), проинтегрируем уравнение (1.7) по y от 0 до a. После вычислений придем к уравнению

$$\frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial^3 a}{\partial x^3} + g + \nu\left(\frac{3\tau}{2\mu a} - \frac{3u}{a^2}\right) - \left(0.9u - \frac{\tau a}{5\mu} - c\right)\frac{\partial u}{\partial x} +$$
$$+ \frac{1}{20a}\left[(3u - 5c)\left(2u + \frac{\tau a}{\mu}\right) - \frac{\tau^2 a^2}{2\mu^2}\right]\frac{\partial a}{\partial x} = 0 \tag{1.9}$$

которое используем вместо (1.7) для решения основной задачи.

С помощью (1.6) проинтегрируем уравнение материального баланса (1.2), затем, учитывая (1.5) найдем

$$u = u_0(1 + \varphi z)(1 + \varphi)^{-1}, \qquad Q = a_0 u_0. \tag{1.10}$$

Здесь u_0 — средняя скорость при волновом течении пленки в том сечении, где ее толщина равняется a_0, $z = cu_0^{-1}$. В уравнении (1.9) перейдем от x к переменной β, подставим в него значения u из (1.10), a из (1.5) и, вводя безразмерные параметры

$$T = \frac{\tau a_0^2}{\mu Q}, \quad R = \frac{3u_0 a_0}{\nu}, \quad R_0 = \frac{g a_0^3}{\nu^2}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho}(\nu^4 g)^{-1/3}$$
$$m = 5z^2 - 12z + 6,$$

получим уравнение движения пленки

$$(1 + \varphi)^3\varphi''' + [A - B\varphi(2 + \varphi) + C(1 + \varphi)^2 - D(1 + \varphi)^3 -$$
$$-E(1 + \varphi)^4]\varphi' + [F(3 + \varphi) + G]\varphi^2 + \varphi H + K = 0 \tag{1.11}$$

$$A = \frac{mR^2}{45\gamma R_0^{1/3} n^2}, \qquad B = \frac{z^2 A}{m}, \qquad C = \frac{TA(z-1)}{4m}$$

$$D = \frac{zTA}{2m}, \qquad E = \frac{AT^2}{8m}, \qquad F = \frac{R_0^{2/3}}{\gamma n^3}$$

$$G = \frac{TR}{2\gamma n^3 R_0^{1/3}}, \quad H = \frac{3R_0 - (z - T)R}{\gamma R_0^{1/3} n^3}, \quad K = \frac{R_0 - R(1 - 0.5T)}{n^3 \gamma R_0^{1/3}}$$

В случае, когда скорость газа равна нулю ($\tau = 0$, $T = 0$), уравнение (1.11) преобразуется в уравнение течения жидкой пленки в неподвижной газовой среде, полученное в работах [4] и [5].

2. Решение уравнения (1.11) будем искать в виде ряда Фурье

$$\varphi = \alpha \sin\beta + \alpha^2(\varphi_{20}\sin 2\beta + \varphi_{21}\cos 2\beta) + \ldots \qquad (2.1)$$

методом, предложенным в [5]. Идея метода сводится к тому, чтобы после подстановки (2.1) в (1.11) полученное выражение также представить в виде ряда Фурье, после чего коэффициенты ряда приравниваются нулю. Чтобы оборвать бесконечную систему уравнений и сделать ее замкнутой, ограничимся рассмотрением коэффициентов первых гармоник.

Приравнивая нулю коэффициенты первых двух гармоник и свободный член, получим

$$2K + \alpha^2(3F + G) = 0 \qquad (2.2)$$

$$2H\varphi_{21} - 4(4 - A - C + D + E)\varphi_{20} - (3F + G) = 0$$

$$2H\varphi_{20} + 4(4 - A - C + D + E)\varphi_{21} - (3 + 2B - 2C + 3D + 4E) = 0$$

$$4H\alpha^{-2} + 3F + 2(21 + 2B - 2C + 3D + 4E)\varphi_{20} - 4(3F + G)\varphi_{21} = 0$$

$$4\alpha^{-2}(1 - A - C + D + E) - 2(21 + 2B - 2C + 3D + 4E)\varphi_{21} - {}$$
$$- 4(3F + G)\varphi_{20} + (3 + B - C + 3D + 6E) = 0$$

Введем параметры

$$x = RR_0^{-1}, \qquad t = 3 - z$$

и будем считать T, t и A заданными, а x и F неизвестными. Из первого уравнения (2.2) найдем

$$\alpha^2 = [x(2 - T) - 2](3 + 0.5xT)^{-1} \qquad (2.3)$$

а из четырех оставшихся уравнений после исключения φ_{20} и φ_{21} получим уравнения для определения x и F

$$x^2[18 - t(6 + 15T) + T(66 - 28.5T) + 3(2 - T)TBk_2 + {}$$
$$+ (2 - T)(3 - t - T)Bk_3 - 6T(3 - t - T)Ak_1] + {}$$
$$+ x[3(134 - 34t - 77T) - 12Ak_1(8 - 3t - 4T) - {} \qquad (2.4)$$
$$- Bk_3(12 - 2t - 5T) + 12Bk_2(3 - 2T)] - 6[70 - 16Ak_1 + B(6k_2 - k_3)] = 0$$

$$F^2\Big\{0.5(6 + xT)^2 - [3 - x(3 - t - T)]\times$$
$$\times\left[3 + \frac{2(6 + xT)[3 - x(3 - T - t)]}{x(2 - T) - 2}\right]\Big\} - (3 + 2Bk_2)(21 + 2Bk_2) + {}$$
$$+ 2(4 - Ak_1)(3 + Bk_3) + 4(4 - Ak_1)(1 - Ak_1)\frac{6 + xT}{x(2 - T) - 2} = 0$$

$$B = (3 - t)^2Ae^{-1}, \qquad k_1 = 1 - 0.25(4 - t + 0.5T)Te^{-1} \qquad (2.5)$$

$$k_2 = 1 + \frac{T}{4}\,\frac{7 - 2T + T}{9 - 6T + t^2}, \qquad k_3 = 1 + \frac{T}{4}\,\frac{16 - 5T + 3T}{9 - 6T + t^2}$$

$$e = 5t^2 - 18t + 15$$

Область существования волнового пленочного течения определяется направлением движения жидкости и газа и значением параметров t, T, x, A, F. Средняя скорость жидкости u_0 и образованные с ее помощью величины Q, R, x будут положительными при движении жидкой пленки в положительном направлении, т. е. вниз по стенке, и отрицательными при движении ее вверх. Аналогично квадрат средней скорости газа и касательные напряжения τ положительны при движении газа вниз по стенке и отрицательны при его движении вверх. Знак перед T определяется направлением движения жидкости и газа. При прямотоке, когда жидкость и газ движутся в одном направлении вниз ($Q > 0$, $\tau > 0$) или вверх ($Q < 0$, $\tau < 0$), $T > 0$. При противотоке, т. е. когда газ движется вверх ($\tau < 0$) против направления стекания жидкой пленки ($Q < 0$), $T < 0$. Во всех уравнениях данной работы перед этими величинами стоят знаки, соответствующие положительному направлению движения жидкости и газа.

Из анализа уравнений (2.3) — (2.5) определим возможные пределы существования параметров T, t, x, A, F при волновом режиме движения пленки. Поскольку действительные решения данной задачи существуют при $\alpha \geqslant 0$, а по физическому смыслу $\alpha < 1$, то на основании (1.14) область существования волнового режима в координатной плоскости xT лежит между кривыми, уравнение которых

$$x = 2(2-T)^{-1}, \qquad x = 10(4-3T)^{-1} \tag{2.6}$$

Кроме того, так как длина волны изменяется от нуля до бесконечности, то всегда $\infty > F > 0$. Согласно (2.5) эти предельные значения достигаются на кривых, определяемых уравнениями

$$\begin{gathered} 0.5(6+xT)^2 - [3 - x(3-t-T)]\times \\ \times\left[3 + \frac{2(6+xT)[3-x(3-t-T)]}{x(2-T)-2}\right] = 0 \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered} (3+2Bk_2)(21+2Bk_2) - 2(4-Ak_1)(3+Bk_3) - \\ - 4(4-Ak_1)(1-Ak_1)(6+xT)[x(2-T)-2]^{-1} = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Подставляя значения x из первого уравнения (2.6) в (2.4), найдем после преобразований $t = 0.5T$, последующая подстановка этих значений x и T в (2.7) делает его равным нулю. Это означает, что оба условия $\alpha = 0$ и $F = \infty$ и координатной плоскости xT удовлетворяются на одной границе области существования, уравнения которой $x = 2(2-T)^{-1}$, и что волна на этой границе имеет амплитуду, равную нулю, и бесконечно большую длину. Уточним направление изменения t вблизи этой границы в зависимости от направления движения жидкости и газа. Из условия $\alpha \geqslant 0$ в силу (2.3) имеем либо $x \geqslant 2(2-T)^{-1}$ и $Tx > -6$, либо $x \leqslant 2(2-T)^{-1}$ и $Tx < -6$. При прямотоке вниз и противотоке $Tx > -6$, поэтому $t \geqslant 0.5T$.

Из (2.3) — (2.8) следует также, что при прямотоке вниз пределы изменения T будут от 0 до 2 и x — от 1 до ∞, а при противотоке T изменяется от 0 до $-\infty$ и x — от ~ 1.4 до 0.

В плоскости At область существования периодического решения (1.11) ограничена кривыми, уравнение которых (2.7), (2.8) и $t = 0.5T$. Эта область изменяется в зависимости от величины параметра T. При заданном его значении и любых A и t, лежащих внутри данной области, волновой режим существует и может быть рассчитан. А именно по данным T, A, t из (2.4) определяется x, из (2.3), (2.5) — α, F, а остальные параметры рассчитываются по формулам, выведенным из соотношений (1.11)

$$R\gamma^{-3/11} = \left(\frac{45^3A^3}{x^{7/3}F^2e^3}\right)^{3/11}, \qquad R_0 = \frac{R}{x}, \qquad n^3 = \frac{R_0^{2/3}}{\gamma F}$$

$$a_0 = \frac{R_0^{1/3}\nu^{2/3}}{g^{1/3}}, \qquad c = \frac{(3-t)R\nu}{3a_0}, \qquad \lambda = \frac{2\pi a_0}{n} \tag{2.9}$$

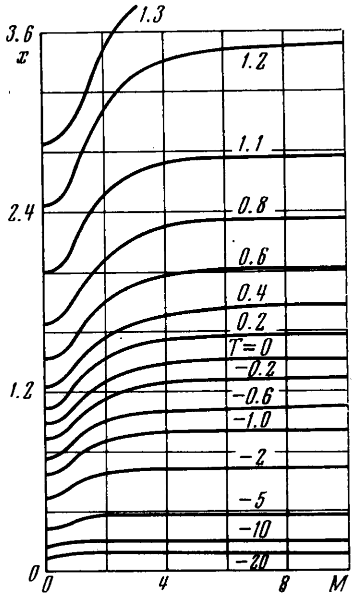
При заданном значении T для определения функциональной связи между четырьмя физическими параметрами t, A, F, x имеется два уравнения (2.4), (2.5), т. е. для решения задачи не хватает третьего замыкающего уравнения.

3. Из анализа области существования периодического решения следует, что при данном расходе жидкости в пленке и заданной скорости газа существует бесконечное множество волновых режимов, длины волн которых изменяются от нуля до бесконечности. Однако в опыте при этих условиях за пределами участка стабилизации устанавливается волновой режим с вполне определенными среднестатистическими значениями волновых параметров.

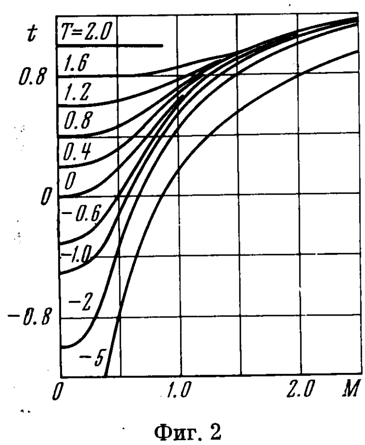
Для решения вопроса о том, какой из всех теоретически возможных режимов может быть реализован, в различных работах делались различные дополнительные предложения. В [1, 6] предполагалось, что реализуются такие волновые режимы, при которых относительная энергия диссипации пленки будет минимальной, а амплитуда волны при этом достигнет некоторого наибольшего значения. В [4] принималось, что имеют место такие волновые режимы, при которых $A = 1$. В [5] из всех возможных выбраны оптимальные режимы, в которых при постоянной толщине пленки расход жидкости достигает своего максимального значения и, наоборот, при постоянном расходе толщина пленки минимальна.

Если при фиксированном значении T в координатной плоскости At по формулам (2.3) — (2.5), (2.9) построить кривые $a_0 = \mathrm{const}$, или $R_0 = \mathrm{const}$, то эти кривые будут начинаться от $t = 0.5T$ и продолжаться до некоторого предельного значения t. Вдоль каждой из этих кривых значение α увеличивается от нуля до своего максимального значения, а затем монотонно уменьшается. Поскольку α и R_0 — функции A и t, то точки, в которых α становится максимальной, определяются уравнением

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}\frac{\partial R_0}{\partial A}-\frac{\partial R_0}{\partial t}\frac{\partial\alpha}{\partial A}=0 \tag{3.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Покажем, что уравнение (3.1) содержит физические предположения, сделанные в работах [5, 6]. В самом деле подстановка α из (2.3) в (3.1) дает

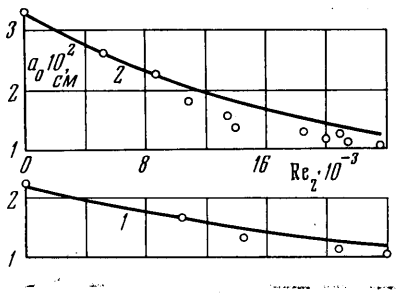
$$\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial R_0}{\partial A}-\frac{\partial R_0}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial A}=0 \tag{3.2}$$

Это означает, что α и x при заданном R_0 достигают своего максимального значения на одних и тех же точках кривой (3.1) или (3.2). Из [1] очевидно, что x — величина, обратно пропорциональная относительной энергии диссипации. Следовательно, в данной работе, как и в [6], из множества возможных волновых режимов выделяются такие, при которых относительная энергия диссипации пленки минимальна, а амплитуда волны имеет наибольшее значение. Поскольку $x = RR_0^{-1}$, то, как и в [5], при данном R_0 параметр R на кривой (3.1) или (3.2) будет максимальным.

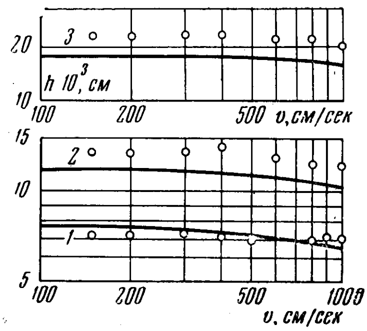
Подставляя R_0, определенное по первым двум формулам (2.9), в (3.2), получим

$$\frac{A}{F^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial F^2}{\partial A}-\frac{\partial x}{\partial A}\frac{\partial F^2}{\partial t}\right)-3\frac{\partial x}{\partial t}+6A(9-5t)e^{-1}\frac{\partial x}{\partial A}=0 \quad (3.3)$$

Решение этого уравнения совместно с (2.4) и (2.5) проводилось на ЭВМ методом итерации. При фиксированном значении T и различных $t \geqslant 0.5\,T$ (нисходящий пря-



Фиг. 3



Фиг. 4

моток и противоток) по этим уравнениям вычислялись A, F, x и далее по первой формуле (2.9) рассчитывался параметр

$$M = {}^1/_3 R\gamma^{-3/11} = \mathrm{Re}\,\gamma^{-3/11} \quad (3.4)$$

где $\mathrm{Re} = Q/\nu$ — критерий Рейнольдса пленки.

На фиг. 1 и фиг. 2 построены зависимости $x(M, T)$ и $t(M, T)$. При всех T с изменением M от нуля до некоторого его значения x изменяется от $2(2-T)^{-1}$, а t от $0.5\,T$ до тех их значений, которые с дальнейшим ростом M практически не изменяются.

Обтекание газом волнового профиля жидкой пленки, движущейся в трубе, аналогично обтеканию несжимаемой жидкостью твердой поверхности стенки трубы. Поэтому для определения касательных напряжений на поверхности пленки воспользуемся известной зависимостью

$$\tau = {}^1/_8 \xi v^2 \rho_2 \quad (3.5)$$

где v — средняя скорость газа, ρ_2 — его плотность и ξ — коэффициент сопротивления трения, зависящий от критерия Рейнольдса и шероховатости стенки. В данном случае роль выступов шероховатости играет амплитуда волны на поверхности пленки (αa_0). Она меняется в зависимости от скорости газа, расхода жидкости в пленке и физических свойств жидкости и газа. Для определения коэффициента сопротивления воспользуемся формулой из [7]. После замены выступов шероховатости амплитудой эта формула будет иметь вид

$$\xi = 0.11\left(\frac{68}{\mathrm{Re}_2}+\frac{2\alpha a_0}{d}\right)^{0.25} \quad (3.6)$$

Здесь Re_2 — критерий Рейнольдса газа и d — диаметр трубы. Данная формула распространяется на все области турбулентного режима течения.

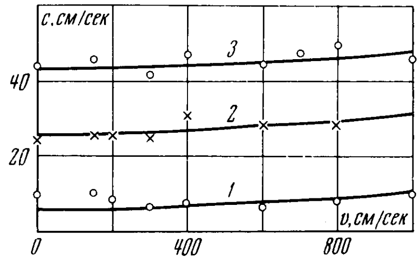
С помощью уравнения (3.5) и выражений для T, R, R_0 из (1.11) составим соотношение

$$\frac{Tx^{2/3}}{\xi}=\frac{3^{2/3}}{8}\frac{\rho_2 v^2}{\nu^{2/3}\rho g^{2/3}\,\mathrm{Re}^{1/3}} \quad (3.7)$$

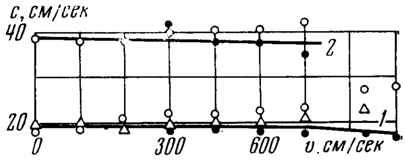
Пользуясь им и графиками фиг. 1, можно по заданным расходу жидкости, скорости газа и физическим свойствам жидкости и газа рассчитать T и x. А именно по заданным величинам найдем численное значение правой части уравнения (3.7) и по

(3.4) — значение M. Затем при этом M по графикам фиг. 1 методом последовательного приближения подбираются такие значения T и x, а по (2.3), (2.9), (3.6) — ξ, при которых левая часть (3.7) равнялась бы правой. Далее по заданным и найденным величинам с помощью графиков фиг. 2 и формул (2.3), (2.5), (2.9), (3.5), (3.6) могут быть подсчитаны все параметры данного режима течения, т. е. α, R_0, n, a_0, c, λ, τ.

Нисходящее движение водяной пленки в прямотоке с воздухом в стеклянной вертикальной трубе диаметром 0.987 *см* исследовано в [8]. На фиг. 3 эти экспериментальные данные изображены в виде зависимости a_0 от критерия Рейнольдса воздуха Re_2 при значениях критерия Рейнольдса для пленки 35 (кривая *1*) и 60 (кри-



Фиг. 5



Фиг. 6

вая *2*). Здесь $\mathrm{Re}_2 = vd\nu_2^{-1}$, ν_2 — коэффициент кинематической вязкости воздуха. Превышение теоретическими значениями a_0 экспериментальных при $\mathrm{Re} = 60$ объясняется имевшим место в этих опытах срывом потоком воздуха части жидкости с пленки.

В [9] исследовалось нисходящее движение водяной пленки температурой $\sim 5°$ С в прямотоке и в противотоке с воздухом в вертикальной стеклянной трубе диаметром 3.45 *см*. Исследуемые величины определялись в зависимости от скорости воздуха и критерия Re_1 ($\mathrm{Re}_1 = 4\,\mathrm{Re}$). Экспериментальные зависимости амплитуды волны $h = \alpha a_0$ от v при $\mathrm{Re}_1 = \mathrm{const}$ для прямотока нисходящей жидкости и газа (фиг. 4) хорошо совпадают с теоретическими при $\mathrm{Re}_1 = 50$ (кривая *1*), а их некоторое расхождение при $\mathrm{Re}_1 = 100$ (кривая *2*) и $\mathrm{Re}_1 = 150$ (кривая *3*) происходит, вероятно, вследствие увеличения длины участка стабилизации с ростом Re_1.

При прямотоке нисходящей пленки и газа экспериментальные данные [9] в виде зависимости c от v при значениях Re_1, равных 50, 100, 180, хорошо согласуются с соответствующими теоретическими зависимостями (фиг. 5, кривые *1*, *2*, *3*).

При противотоке c при $\mathrm{Re}_1 = \mathrm{const}$ зависит не только от v, но и от расположения сечения, в котором производились замеры, по высоте входного участка [9]. На фиг. 6 экспериментальные данные для различных сечений изображены разными знаками. Они группируются возле соответствующих теоретических кривых *1* ($\mathrm{Re}_1 = 40$) и *2* ($\mathrm{Re}_1 = 180$).

Поступило 22 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Коротаев Ю. П., Точигин А. А. Влияние газового потока на волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Инж.-физ. ж., 1969, т. 17, № 6.
2. Соколов В. Г. Волновые режимы восходящего течения тонкого слоя вязкой жидкости в контакте с газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
4. Маурин Л. Н., Сорокин В. С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости. ПМТФ, 1962, № 4.
5. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
6. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1948, т. 18.
7. Альтшуль А. Д., Киселев П. Г. Гидравлика и аэродинамика. М., Стройиздат, 1965.
8. Маркович Э. Э., Ройзман Д. Х., Шербаум В. М. Исследование течений водяных пленок под действием воздушного потока. Изв. вузов, Энергетика, 1969, № 9.
9. Stainhorp F. P., Batt R. S. W. The effect of co-current and counter-current air flow on the wave properties of falling liquid films. Trans. Inst. Chem. Engrs, 1967, vol. 45, pt 372.