УДК 533.6.011.72

ПРОХОЖДЕНИЕ УДАРНЫХ ВОЛН ЧЕРЕЗ ИСКРИВЛЕННУЮ ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

Р. М. ЗАЙДЕЛЬ

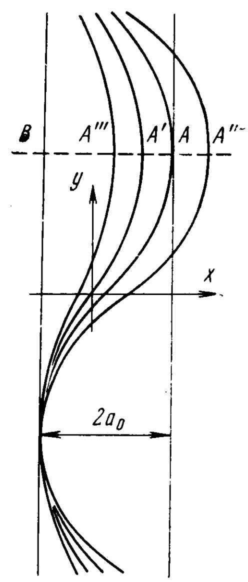
(*Москва*)

Рассмотрены взаимодействие ударных волн со слабо искривленной поверхностью раздела и движение этой поверхности, вызванные прохождением ударных волн.

Задача о падении плоской ударной волны на искривленную границу раздела двух сред рассматривалась в статье Рихтмайера [1]. При этом предполагалось, что волна переходит из легкого вещества в тяжелое. Для решения линеаризованных уравнений газовой динамики были использованы численные методы. На нескольких конкретных примерах Рихтмайером было показано, что граница раздела неустойчива, причем искривление границы растет (асимптотически) линейно со временем. Для рассмотрения различных предельных случаев, когда, например, интенсивность ударной волны стремится к нулю, целесообразно применить аналитический метод, ранее использованный в [2–4].

1. Выберем основную систему координат так, чтобы невозмущенная граница раздела двух сред совпадала с плоскостью $X = 0$ (фигура), причем область 1 ($X > 0$) — легкое вещество, область 2 ($X < 0$) — тяжелое вещество. Предположим теперь, что граница раздела слегка искривлена и имеет форму

$$a = a_0 \exp(ikY) \qquad (1.1)$$



причем $ka_0 \ll 1$ (малое возмущение).

Условимся, что $a > 0$, если граница сместилась в сторону легкого вещества. Пусть идущая по легкому веществу ударная волна приближается к границе раздела со скоростью D_0. За время $\tau = 2a_0 / D_0$ закончится процесс взаимодействия ударной волны с границей раздела, после этого граница (невозмущенная) начнет двигаться со скоростью U относительно несжатого тяжелого вещества. За время τ точка A сместится влево (в точку A') на расстояние $U\tau = 2a_0U / D_0$. Отрезок $BA' = 2a_0 - U\tau = 2a_0(1 - U / D_0)$. Промежуточные точки будут к моменту τ распределены по гармоническому закону (1.1). Поэтому амплитуда искривления границы непосредственно после взаимодействия равна

$$a(0) = a_0(1 - U / D_0) \qquad (1.2)$$

Пусть V_1 — скорость отраженной ударной волны относительно границы раздела. К моменту τ расстояние $A'A'' = V_1\tau = 2a_0V_1 / D_0$. Поэтому $BA'' = BA' + A'A'' = 2a_0[1 + (V_1 - U) / D_0]$, следовательно, начальное искривление отраженной ударной волны имеет амплитуду

$$\Delta_1 = a_0\left(1 + \frac{V_1 - U}{D_0}\right) \qquad (1.3)$$

Скорость прошедшей ударной волны относительно границы раздела обозначим V_2. К моменту τ расстояние $A'''A' = V_2\tau = 2a_0V_2 / D_0$. Отсюда $BA''' = BA' - A'''A' = 2a_0[1-(U+V_2)/D_0]$. Поэтому начальное искривление ударной волны, прошедшей в тяжелое вещество, имеет амплитуду

$$\Delta_2 = a_0\left(1-\frac{U+V_2}{D_0}\right) \tag{1.4}$$

Система уравнений газодинамики для малых возмущений, отмеченных штрихом, имеет вид

$$\frac{\partial p_s'}{\partial t} + \rho_s c_s^2\left(\frac{\partial v_{xs}'}{\partial X}+\frac{\partial v_{ys}'}{\partial Y}\right) = 0 \qquad (s=1,2) \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial v_{xs}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial p_s'}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial v_{ys}'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial p_s'}{\partial Y} = 0$$

Значению $s=1$ соответствует область $0 < X < V_1t$, занятая дважды сжатым легким веществом, значению $s=2$ соответствует область $-V_2t < X < 0$, где находится однократно сжатое тяжелое вещество, ρ_s, c_s — плотность и скорость звука в соответствующей области. Предполагается, что все возмущения не зависят от кординаты Z; зависимость их от координаты Y определяется множителем $\exp(ikY)$.

Возмущения плотности исключены при помощи условия адиабатичности

$$\frac{\partial p_s'}{\partial t} = c_s^2\frac{\partial \rho_s'}{\partial t} \tag{1.6}$$

Обозначим через ξ_1 и ξ_2 смещение фронта отраженной и прошедшей ударных волн от плоскостей $X = V_1t$ и $X = -V_2t$ соответственно. В начальном состоянии плотности тяжелого и легкого веществ были ρ_{02} и ρ_{01}. Из законов сохранения получаем при $X = -V_2t$ такие условия на фронте прошедшей волны

$$v_{y2}' = U\frac{\partial \xi_2}{\partial Y}, \qquad v_{x2}' = -\frac{1+\delta_2}{2j_2}p_2', \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = -\frac{1-\delta_2}{2\rho_{02}U}p_2' \tag{1.7}$$

Здесь $j_2 = \rho_2V_2$ — плотность потока массы через фронт волны в тяжелом веществе

$$\delta_2 = -j_2^2\left[\frac{\partial}{\partial p_2}\left(\frac{1}{\rho_2}\right)\right]_{H_2}$$

δ_2 — производная, которая берется вдоль адиабаты Гюгонио тяжелого вещества, проведенной на плоскости $p\rho$ через точки (p_0, ρ_{02}) и (p_2, ρ_2).

Обозначим через p_1^*, ρ_1^* давление и плотность легкого вещества за фронтом падающей ударной волны. В системе координат, где несжатое тяжелое вещество покоится (лабораторная система), массовая скорость однократно сжатого легкого вещества направлена влево и по абсолютной величине равна $U_0 = D_0(1-\rho_{01}/\rho_1^*)$. В основной системе однократно сжатое легкое вещество также движется влево со скоростью $U_1 = U_0 - U$. Позади отраженной ударной волны давление легкого вещества $p_1 = p_2$ и плотность ρ_1. Поток вещества через фронт отраженной волны $j_1 = \rho_1V_1$. Обозначим через H_1 адиабату Гюгонио легкого вещества, соединяющую точки (p_1^*, ρ_1^*) и (p_1, ρ_1). Величина

$$\delta_1 = -j_1^2\left[\frac{\partial}{\partial p_1}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)\right]_{H_1}$$

вычисляется вдоль этой адиабаты.

Законы сохранения при $X = V_1 t$ приводят к следующим соотношениям на фронте отраженной ударной волны

$$v_{y1}' = -U_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial Y}, \qquad v_{x1}' = \frac{1+\delta_1}{2j_1} p_1', \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = \frac{1-\delta_1}{2\rho_1^* U_1} p_1' \tag{1.8}$$

Исключая из (1.7) и (1.8) величины ξ_1, ξ_2, получим

$$V_1 \frac{\partial v_{y1}'}{\partial X} = \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1-\delta_1}{2\rho_1^*}\right) \frac{\partial p_1'}{\partial Y}, \qquad X = V_1 t \tag{1.9}$$

$$V_2 \frac{\partial v_{y2}'}{\partial X} = -\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1-\delta_2}{2\rho_{02}}\right) \frac{\partial p_2'}{\partial Y}, \qquad X = -V_2 t \tag{1.10}$$

В начальный момент $t = 0$ $\xi_1 = \Delta_1$, $\xi_2 = \Delta_2$, причем связь Δ_1 и Δ_2 с начальной кривизной границы дается формулами (1.3) и (1.4). На границе раздела во все моменты времени, в том числе при $t = 0$, должны выполняться условия

$$p_1' = p_2', \qquad v_{x1}' = v_{x2}' = \frac{\partial a(Y,t)}{\partial t}, \qquad X = 0 \tag{1.11}$$

Далее считаем, что зависимость всех величин от координаты Y дается множителем $\exp(ikY)$. Введем обозначения

$$p_s' / \rho_s c_s = w_s, \qquad v_{xs}' = u_s, \qquad v_{ys}' = -iv_s, \qquad \beta_s = V_s / c_s < 1 \tag{1.12}$$

Для каждой из двух областей вводим свои независимые переменные

$$kX = x_1, \qquad kc_1 t = y, \qquad 0 < X < V_1 t \tag{1.13}$$

$$kX = x_2, \qquad kc_2 t = y_2, \qquad -V_2 t < X < 0 \tag{1.14}$$

Вместо (1.5) получаем систему

$$\frac{\partial w_s}{\partial y_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_s} + v_s = 0, \qquad \frac{\partial u_s}{\partial y_s} + \frac{\partial w_s}{\partial x_s} = 0, \qquad \frac{\partial v_s}{\partial y_s} - w_s = 0 \quad (s = 1, 2) \tag{1.15}$$

Кроме того, функция w_s удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial y_s^2} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x_s^2} + w_s = 0 \quad (s = 1, 2) \tag{1.16}$$

Граничные условия

$$u_1 = A_1 w_1, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = B_1 w_1, \qquad A_1 = \frac{1+\delta_1}{2\beta_1}$$

$$B_1 = \frac{1}{\beta_1}\left(\frac{1-\delta_1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_1^*} - 1\right), \qquad x_1 = \beta_1 y_1 \tag{1.17}$$

$$u_2 = -A_2 w_2, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -B_2 w_2, \qquad A_2 = \frac{1+\delta_2}{2\beta_2}$$

$$B_2 = \frac{1}{\beta_2}\left(\frac{1-\delta_2}{2} \frac{\rho_2}{\rho_{02}} - 1\right), \qquad x_2 = -\beta_2 y_2 \tag{1.18}$$

Условие (1.11) примет вид

$$u_1(0, y_1) = u_2(0, y_2), \qquad \rho_1 c_1 w_1(0, y_1) = \rho_2 c_2 w_2(0, y_2)$$

$$y_1 / kc_1 = y_2 / kc_2 = t, \qquad x_1 = x_2 = 0 \tag{1.19}$$

Благодаря малости возмущений угол между фронтом падающей волны и касательной к границе раздела также будет мал. Те из величин, которые в невозмущенном решении были в начальный момент отличны от нуля, при учете искривления границы получат приращения второго порядка малости. Поэтому начальные условия таковы:

$$w_1 = u_1 = 0, \qquad v_1 = v_1^0 = U_1 k \Delta_1 \qquad (x_1 = y_1 = 0) \tag{1.20}$$

$$w_2 = u_2 = 0, \qquad v_2 = -v_2^0 = -Uk\Delta_2 \qquad (x_2 = y_2 = 0) \tag{1.21}$$

2. Для решения системы (1.15) вводим новые переменные

$$y_s = r_s \operatorname{ch} \theta_s, \quad x_s = r_s \operatorname{sh} \theta_s, \quad r_s = \sqrt{y_s^2 - x_s^2}, \quad \operatorname{th} \theta_s = x_s / y_s \tag{2.1}$$

Первое из уравнений (1.15) умножим на $\operatorname{ch}\theta_s$ и сложим со вторым, умноженным на $\operatorname{sh}\theta_s$, затем $\operatorname{ch}\theta_s$ и $\operatorname{sh}\theta_s$ поменяем местами. В результате получим систему

$$\frac{\partial w_s}{\partial r_s} + \frac{1}{r_s}\frac{\partial u_s}{\partial \theta_s} + \operatorname{ch}\theta_s v_s = 0, \qquad \frac{\partial u_s}{\partial r_s} + \frac{1}{r_s}\frac{\partial w_s}{\partial \theta_s} + \operatorname{sh}\theta_s v_s = 0$$

$$\operatorname{ch}\theta_s \frac{\partial v_s}{\partial r_s} - \frac{\operatorname{sh}\theta_s}{r_s}\frac{\partial v_s}{\partial \theta_s} - w_s = 0 \qquad (s = 1, 2) \tag{2.2}$$

Линии $x_{1,2} = 0$ переходят в $\theta_{1,2} = 0$. Линия $x_1 = \beta_1 y_1$ переходит в $\theta_1 = \theta_1^\circ$, где $\operatorname{th}\theta_1^\circ = \beta_1$. Линия $x_2 = -\beta_2 y_2$ переходит в $\theta_2 = -\theta_2^\circ$, где $\operatorname{th}\theta_2^\circ = \beta_2$.

В третьем уравнении системы (2.2) положим $\theta_s = (-1)^{s+1}\theta_s^\circ$ и прибавим к нему умноженное на $(-1)^{s+1} \operatorname{th}\theta_s^\circ$ соотношение

$$\frac{\partial v_s}{\partial x_s} = (-1)^{s+1} B_s w_s$$

также верное при $\theta_s = (-1)^{s+1}\theta_s^\circ$. Условия (1.17) и (1.18) заменятся следующими:

$$u_1 = A_1 w_1, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial r_1} = (B_1 \operatorname{sh}\theta_1^\circ + \operatorname{ch}\theta_1^\circ) w_1 \qquad (\theta_1 = \theta_1^\circ) \tag{2.3}$$

$$u_2 = -A_2 w_2, \qquad \frac{\partial v_2}{\partial r_2} = (B_2 \operatorname{sh}\theta_2^\circ + \operatorname{ch}\theta_2^\circ) w_2 \qquad (\theta_2 = -\theta_2^\circ) \tag{2.4}$$

Начальному моменту соответствуют точки $r_{1,2} = 0$; поэтому вместо (1.20) и (1.21) получаем

$$w_s = u_s = 0, \qquad v_s = (-1)^{s+1} v_s^\circ \qquad (r_s = 0, \ s = 1, 2) \tag{2.5}$$

В новых переменных уравнение (1.16) запишется так:

$$\frac{\partial^2 w_s}{\partial r_s^2} + \frac{1}{r_s}\frac{\partial w_s}{\partial r_s} - \frac{1}{r_s^2}\frac{\partial^2 w_s}{\partial \theta_s^2} + w_s = 0 \qquad (s = 1, 2) \tag{2.6}$$

Для решения задачи используем преобразование Лапласа по переменным r_1 и r_2, т. е. от функций-оригиналов $f_s(r_s, \theta_s)$ переходим к функциям-изображениям $f_s'(p_s, \theta_s)$ по формулам

$$f_s(r_s, \theta_s) \div f_s'(p_s, \theta_s) = \int_0^\infty e^{-p_s r_s} f_s(r_s, \theta_s)\, dr_s \qquad (s = 1, 2) \tag{2.7}$$

Вместо (2.2) и (2.6) получаем

$$\frac{\partial}{\partial p_s}(p_s w_s') - \frac{\partial u_s'}{\partial \theta_s} + \operatorname{ch}\theta_s \frac{\partial v_s'}{\partial p_s} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial p_s}(p_s u_s') - \frac{\partial w_s'}{\partial \theta_s} + \operatorname{sh}\theta_s \frac{\partial v'}{\partial p_s} = 0$$

$$\operatorname{ch}\theta_s \frac{\partial}{\partial p_s}(p v_s') + \operatorname{sh}\theta_s \frac{\partial v_s'}{\partial \theta_s} - \frac{\partial w_s'}{\partial p_s} \qquad (s = 1, 2) \tag{2.8}$$

$$(p_s^2 + 1)\frac{\partial^2 w_s'}{\partial p_s^2} + 3p_s \frac{\partial w_s'}{\partial p_s} + w_s' - \frac{\partial^2 w_s'}{\partial \theta_s^2} = 0 \qquad (s = 1, 2) \tag{2.9}$$

Из (2.3) и (2.4) получаем

$$u_1' = A_1 w_1', \quad p_1 v_1' - v_1^\circ = (B_1 \operatorname{sh}\theta_1^\circ + \operatorname{ch}\theta_1^\circ) w_1' \qquad (\theta_1 = \theta_1^\circ) \tag{2.10}$$

$$u_2' = -A_2 w_2', \quad p_2 v_2' + v_2^\circ = (B_2 \operatorname{sh}\theta_2^\circ + \operatorname{ch}\theta_2^\circ) w_2' \qquad (\theta_2 = -\theta_2^\circ) \tag{2.11}$$

Кроме того, для всех изображений должно выполняться условие

$$f_s'(p_s, \theta_s) \to 0 \quad \text{при } \operatorname{Re} p_s \to +\infty \tag{2.12}$$

Подстановка

$$p_s = \operatorname{sh} q_s, \qquad w_s'(p_s, \theta_s) = \frac{1}{\operatorname{ch} q_s} w_s''(q_s, \theta_s) \tag{2.13}$$

приводит (2.9) к виду

$$\frac{\partial^2 w_s''}{\partial q_s^2} - \frac{\partial^2 w_s''}{\partial \theta_s^2} = 0 \tag{2.14}$$

Общим решением будет

$$w_s''(q_s, \theta_s) = F_s(q_s + \theta_s) + \Phi_s(q_s - \theta_s) \qquad (s = 1, 2) \tag{2.15}$$

где F и Φ — произвольные функции. Используя это решение, второе уравнение в системе (2.8) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial q_s}\{p_s u_s' - [F_s(q_s + \theta_s) - \Phi_s(q_s - \theta_s)] + \operatorname{sh}\theta_s v_s'\} = 0 \tag{2.16}$$

Это соотношение легко интегрируется

$$p_s u_s' - [F_s(q_s + \theta_s) - \Phi_s(q_s - \theta_s)] + \operatorname{sh}\theta_s v_s' = \varphi_s(\theta_s) \tag{2.17}$$

где φ_s — пока произвольная функция. Воспользуемся известным соотношением

$$f(0) = f(r = 0) = \lim_{\operatorname{Re} p \to +\infty} p f'(p, \theta) = \lim_{\operatorname{Re} q \to +\infty} \operatorname{sh} q f'(\operatorname{sh} q, \theta) \tag{2.18}$$

С помощью (2.5) получаем

$$\lim_{\operatorname{Re} p_s \to +\infty} p_s u_s' = u_s(0) = 0 \tag{2.19}$$

$$\lim_{\operatorname{Re} p_s \to +\infty} p_s w_s' = \lim_{\operatorname{Re} q_s \to +\infty} \operatorname{th} q_s [F_s(q_s + \theta_s) + \Phi_s(q_s - \theta_s)] =$$

$$= F_s(\infty) + \Phi_s(\infty) = w_s(0) = 0$$

Решение (2.15) теперь можно записать так:

$$w_s'' = [F_s(q_s + \theta_s) - F_s(\infty)] + [\Phi_s(q_s - \theta_s) - \Phi_s(\infty)] \tag{2.20}$$

Разности, стоящие в квадратных скобках, берем в качестве новых функций F_s и Φ_s. Таким образом, можно считать, что порознь выполняются условия

$$F_s(q_s) \to 0, \quad \Phi_s(q_s) \to 0 \quad \text{при } \operatorname{Re} q_s \to +\infty \quad (s = 1, 2) \tag{2.21}$$

Переходя в равенстве (2.17) к пределу $\operatorname{Re} p_s \to +\infty$, с учетом (2.12) найдем, что левая часть обращается в нуль при всех θ_s, т. е. $\varphi_s(\theta_s) = 0$. Вместо (2.17) получим

$$p_s u_s' - [F_s(q_s + \theta_s) - \Phi_s(q_s - \theta_s)] + \operatorname{sh} \theta_s v_s' = 0 \quad (s = 1, 2) \tag{2.22}$$

Положим здесь $\theta_1 = \theta_1^\circ$, $\theta_2 = -\theta_2^\circ$. С помощью (2.10) и (2.11) получаем следующие разностные уравнения:

$$\operatorname{sh} 2q_1 [F_1(q_1 + \theta_1^\circ) - \Phi_1(q_1 - \theta_1^\circ)] - (a_1 \operatorname{ch} 2q_1 + b_1) [F_1(q_1 + \theta_1^\circ) + \Phi_1(q_1 - \theta_1^\circ)] = 2 \operatorname{sh} \theta_1^\circ v_1^\circ \operatorname{ch} q_1 \tag{2.23}$$

$$a_1 = A_1 = \frac{1 + \delta_1}{2\beta_1}, \quad b_1 = 2 \operatorname{sh} \theta_1^\circ (B_1 \operatorname{sh} \theta_1^\circ + \operatorname{ch} \theta_1^\circ) - A_1 = \frac{1}{2\beta_1} \left[2(1 - \delta_1) \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} - (1 + \delta_1) \right]$$

$$\sigma_1 = \rho_1 / \rho_1^*, \quad \varepsilon_1 = (1 - \beta_1^2) / \beta_1^2$$

$$\operatorname{sh} 2q_2 [F_2(q_2 - \theta_2^\circ) - \Phi_2(q_2 + \theta_2^\circ)] + (a_2 \operatorname{ch} 2q_2 + b_2) [F_2(q_2 - \theta_2^\circ) + \Phi_2(q_2 + \theta_2^\circ)] = 2 \operatorname{sh} \theta_2^\circ v_2^\circ \operatorname{ch} q_2 \tag{2.24}$$

$$a_2 = A_2 = \frac{1 + \delta_2}{2\beta_2}, \quad b_2 = 2 \operatorname{sh} \theta_2^\circ (B_2 \operatorname{sh} \theta_2^\circ + \operatorname{ch} \theta_2^\circ) - A_2 = \frac{1}{2\beta_2} \left[2(1 - \delta_2) \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} - (1 + \delta_2) \right]$$

$$\sigma_2 = \rho_2 / \rho_{02}, \quad \varepsilon_2 = (1 - \beta_2^2) / \beta_2^2$$

Положим в формулах (2.15) и (2.22) $\theta_s = 0$ $(s = 1, 2)$

$$w_s'(q_s, \theta_s = 0) = \frac{F_s(q_s) + \Phi_s(q_s)}{\operatorname{ch} q_s}, \quad u_s'(q_s, \theta_s = 0) = \frac{F_s(q_s) - \Phi_s(q_s)}{\operatorname{sh} q_s} \tag{2.25}$$

Возвращаясь к оригиналам, при помощи (2.25) получаем

$$\begin{aligned} w_s(X = 0, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int [F_s(q_s) + \Phi_s(q_s)] \exp(kc_s t \operatorname{sh} q_s)\, dq_s \\ u_s(X = 0, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int \operatorname{cth} q_s [F_s(q_s) - \Phi_s(q_s)] \exp(kc_s t \operatorname{sh} q_s)\, dq_s \end{aligned} \tag{2.26}$$

Введем обозначения

$$\alpha = c_1 / c_2, \quad \mu = \rho_1 / \rho_2, \quad \lambda = \rho_1 c_1 / \rho_2 c_2 = \alpha\mu \tag{2.27}$$

В формулах (2.26) при $s = 2$ сделаем замену переменной интегрирования

$$\begin{aligned} &\operatorname{sh} q_2 = \alpha \operatorname{sh} q_1, \quad q_2 = \ln [\alpha \operatorname{sh} q_1 + \sqrt{1 + (\alpha \operatorname{sh} q_1)^2}] \\ &dq_2 / dq_1 = \alpha \operatorname{ch} q_1 / \operatorname{ch} q_2 = \alpha \operatorname{ch} q_1 [1 + (\alpha \operatorname{sh} q_1)^2]^{-1/2} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Теперь можно записать

$$w_2(X=0,t)=\frac{\alpha}{2\pi i}\int\frac{F_2[q_2(q_1)]+\Phi_1[q_2(q_1)]}{\sqrt{1+(\alpha\,\mathrm{sh}\,q_1)^2}}\,\mathrm{ch}\,q_1\exp(kc_1t\,\mathrm{sh}\,q_1)\,dq_1$$

$$u(t)=u_2(X=0,t)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\mathrm{cth}\,q_1\,\{F_2[q_2(q_1)]-\Phi_2[q_2(q_1)]\}\exp(kc_1t\,\mathrm{sh}\,q_1)\,dq_1 \qquad (2.29)$$

Здесь подразумевается, что зависимость $q_2(q_1)$ определяется формулой (2.28). Контур интегрирования в (2.26) для $s=1$ и в (2.29) можно взять одинаковым. Используя условия (1.19), приходим к соотношениям

$$\mu[F_1(q_1)+\Phi_1(q_1)]=\mathrm{ch}\,q_1\frac{F_2[q_2(q_1)]+\Phi_2[q_2(q_1)]}{\sqrt{1+(\alpha\,\mathrm{sh}\,q_1)^2}}$$

$$F_1(q_1)-\Phi_1(q_1)=F_2[q_2(q_1)]-\Phi_2[q_2(q_1)] \qquad (2.30)$$

Для доказательства единственности решения уравнений (2.23), (2.24) и (2.30) достаточно убедиться, что решение однородных уравнений, когда правые части в (2.23) и (2.24) равны нулю, неограниченно возрастает при $\mathrm{Re}\,q_s\to+\infty$. При больших значениях аргумента ($\mathrm{Re}\,q_s\to+\infty$) однородные уравнения, получаемые из (2.23) и (2.24), примут вид

$$F_1(q_1+\theta_1^\circ)=\varkappa_1\Phi_1(q_1-\theta_1^\circ),\qquad \Phi_2(q_2+\theta_2^\circ)=\varkappa_2F_2(q_2-\theta_2^\circ)$$

$$\varkappa_s=(1+a_s)(1-a_s)^{-1}\qquad (s=1,\ 2) \qquad (2.31)$$

Будем считать, что прошедшая и отраженная ударные волны устойчивы. Для этого, как отмечается в [5], должны выполняться неравенства

$$0<2\sigma_s/(\sigma_s+\varepsilon_s)<1+\delta_s<2\qquad (s=1,2) \qquad (2.32)$$

Поэтому $a_s>0$, $|\varkappa_s|>1$ $(s=1,\ 2)$. Связь между q_1 и q_2, определяемая формулой (2.28), при $\mathrm{Re}\,q_s\to+\infty$ принимает простой вид

$$q_2=q_1+\omega,\qquad \omega=\ln\alpha \qquad (2.33)$$

Вместо (2.30) получаем

$$\lambda[F_1(q_1)+\Phi_1(q_1)]=F_2(q_1+\omega)+\Phi_2(q_1+\omega) \qquad (2.34)$$

$$F_1(q_1)-\Phi_1(q_1)=F_2(q_1+\omega)-\Phi_2(q_1+\omega)$$

Комбинируя (2.31) и (2.34), получим уравнение

$$\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\Phi_1(q_1+2\theta_1^\circ+2\theta_2^\circ)=$$

$$=\zeta\left[\frac{1}{\varkappa_1}\Phi_1(q_1+2\theta_1^\circ)-\frac{1}{\varkappa_2}\Phi_1(q_1+2\theta_2^\circ)\right]+\Phi_1(q_1)$$

$$\zeta=(\lambda-1)(\lambda+1)^{-1},\qquad |\zeta|<1 \qquad (2.35)$$

Решением этого уравнения будет

$$\Phi_1(q_1)=\mathrm{const}\,\exp(\Omega q_1) \qquad (2.36)$$

причем показатель Ω определяется из уравнения

$$\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2}\exp[\Omega(2\theta_1^\circ+2\theta_2^\circ)]=\zeta\left[\frac{1}{\varkappa_1}\exp(2\Omega\theta_1^\circ)-\frac{1}{\varkappa_2}\exp(2\Omega\theta_2^\circ)\right]+1 \tag{2.37}$$

Введем (временно) обозначения

$$x=(1/\varkappa_1)\exp(2\Omega\theta_1^\circ),\qquad y=(1/\varkappa_2)\exp(2\Omega\theta_2^\circ)$$

Тогда уравнение (2.37) можно записать в такой форме

$$y=(1+\zeta x)(\zeta+x)^{-1} \tag{2.38}$$

Учитывая, что ζ вещественно и по модулю меньше единицы, легко находим, что $|y|\gtrless 1$, если $|x|\lessgtr 1$. Отсюда следует, что корни уравнения (2.37) имеют $\operatorname{Re}\Omega>0$, а решение (2.36) при $\operatorname{Re}q\to+\infty$ неограниченно возрастает. Единственность доказана.

3. Решение системы уравнений (2.23), (2.24) и (2.30), удовлетворяющее условию (2.21), может быть получено в виде рядов по целым степеням $\exp 2q_1$ и $\exp 2q_2$. Для выполнения условий (2.30) необходимо, кроме того, разложить иррациональные выражения в ряд по полиномам Якоби.

Существенное упрощение получается в том случае, когда изменение давления в падающей волне $\Delta p=p_1^*-p_0$ достаточно мало. В рассматриваемом приближении

$$\Delta p=\rho_1c_1U_0,\qquad U=\frac{2\lambda}{\lambda+1}U_0,\qquad U_1=U_0-U=\frac{1-\lambda}{1+\lambda}U_0,$$

$$U=\frac{2\Delta p}{\rho_1c_1+\rho_2c_2} \tag{3.1}$$

Используя (1.3) и (1.4), получим

$$a(0)=a_0,\qquad \Delta_1=2a_0,\qquad \Delta_2=a_0(1-c_2/c_1)=a_0(1-1/\alpha) \tag{3.2}$$

Подставим эти выражения в (1.20) и (1.21)

$$v_1^\circ=\lambda^{-1}(1-\lambda)ka_0U,\qquad v_2^\circ=(1-1/\alpha)ka_0U \tag{3.3}$$

Можно показать, что при $\Delta p\to 0$ в уравнениях (2.23) и (2.24) $a_s\to 1$, $b_s\to 0$ $(s=1,2)$. Используя условие (2.21), находим из (2.23) и (2.24)

$$\Phi_1(q_1)=-{}^1\!/_2v_1^\circ e^{-q_1},\qquad F_2(q_2)={}^1\!/_2v_2^\circ e^{-q_2} \tag{3.4}$$

Затем из (2.30) получим

$$u(t)=ka_0U\psi(\tau)\qquad (\tau=kc_1t)$$

$$\psi(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\Psi(p)e^{p\tau}dp=\int_0^\tau\psi_1(x)dx+\psi_2(\tau)+\psi_3(\tau) \tag{3.5}$$

где изображение

$$\Psi(p)=p^{-1}\Psi_1(p)+\Psi_2(p)+\Psi_3(p)$$

$$\Psi_1(p)=(1-\mu)[\mu/r+1/R]^{-1},\qquad \Psi_2(p)=(\mu-1/\alpha)[\mu+r/R]^{-1}$$
$$\Psi_3(p)=(1-\alpha)[1+\mu R/r]^{-1},\qquad r=\sqrt{p^2+1},\qquad R=\sqrt{\alpha^2p^2+1} \tag{3.6}$$

Для нахождения оригинала преобразуем (3.6) к виду

$$\Psi(p)=\frac{1}{1+\mu}[\alpha F(\alpha p)-\mu F(p)]+\frac{\alpha\lambda-1}{4\alpha^2(1-\lambda^2)}\frac{\alpha}{p^2+\omega^2}\Phi(p)\Phi(\alpha p)-$$
$$-\frac{1}{2(1+\mu)}\frac{p}{p^2+\omega^2}\left[\Phi(p)+\frac{\mu(1-\alpha^2)+1-\lambda}{\alpha^2(1-\lambda)}\alpha\Phi(\alpha p)\right]+$$
$$+\frac{\alpha(1-\lambda)+\mu(1-\alpha)}{\alpha(1-\lambda^2)}\frac{1}{p^2+\omega^2} \tag{3.7}$$

$$F(p)=\frac{1}{p\sqrt{p^2+1}}-\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}},\quad \Phi(p)=\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}+\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^2}{\sqrt{p^2+1}}$$

Здесь обозначено

$$\omega^2=\frac{1-\mu^2}{1-\lambda^2}\qquad(\lambda=\alpha\mu) \tag{3.8}$$

Используя операционные соотношения для функций Бесселя

$$J_n\left(\frac{t}{\alpha}\right)\div\frac{\alpha(\sqrt{\alpha^2p^2+1}-\alpha p)^n}{\sqrt{\alpha^2p^2+1}} \tag{3.9}$$

получаем из (3.7)

$$\psi(\tau)=\frac{1}{1+\mu}\left[f\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)-\mu f(\tau)\right]+\frac{\alpha\lambda-1}{4\alpha^2(1-\lambda^2)}\int\limits_0^\tau\frac{\sin\omega(\tau-x)}{\omega}dx\times$$
$$\times\int\limits_0^x\varphi(x-y)\varphi\left(\frac{y}{\alpha}\right)dy-\frac{1}{2(1+\mu)}\int\limits_0^\tau\cos\omega(\tau-x)\times$$
$$\times\left[\varphi(x)+\frac{\mu(1-\alpha^2)+1-\lambda}{\alpha^2(1-\lambda)}\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]dx+\frac{\alpha(1-\lambda)+\mu(1-\alpha)}{\alpha(1-\lambda^2)}\frac{\sin\omega\tau}{\omega} \tag{3.10}$$

$$f(x)=\int\limits_0^x J_0(y)\,dy-J_1(x),\qquad \varphi(x)=J_0(x)+J_2(x)$$

При $\alpha=1$ $(c_1=c_2)$ выражение (3.6) существенно упрощается

$$\Psi(p,\alpha=1)=\frac{1-\mu}{1+\mu}F(p),\qquad \psi(\tau,\alpha=1)=\frac{1-\mu}{1+\mu}f(\tau) \tag{3.11}$$

Пусть плотности обеих сред одинаковы, т. е. $\rho_1=\rho_2$ или $\mu=1$. Из (3.6) получаем

$$\Psi(p,\mu=1)=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\frac{1}{p^2}+F(p)-F(\alpha p)+[F(p)]^2-F(p)F(\alpha p) \tag{3.12}$$

Отсюда находим

$$\psi(\tau, \mu=1) = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\tau + f(\tau) - \frac{1}{\alpha} f\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) +$$

$$+ \int_0^\tau f(\tau - x) f(x)\, dx - \frac{1}{\alpha}\int_0^\tau f(\tau - x) f\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx \tag{3.13}$$

Если акустические импедансы обеих сред равны, т. е. $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$ или $\lambda = \alpha\mu = 1$, то (3.6) примет вид

$$\Psi(p, \lambda=1) = \frac{1}{1+\alpha}\left\{\alpha^2 F(\alpha p) - F(p) + \frac{\alpha}{4}\Phi(\alpha p)\Phi(p) - \frac{1}{4}[\Phi(\alpha p)]^2\right\} \tag{3.14}$$

Поэтому

$$\psi(\tau, \lambda=1) = \frac{1}{1+\alpha}\left\{\alpha f\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) - f(\tau) + \frac{1}{4}\int_0^\tau \varphi(\tau - x)\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\tau \varphi\left(\frac{\tau - x}{\alpha}\right)\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx\right\} \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^\tau \varphi\left(\frac{\tau - x}{\alpha}\right)\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx = \frac{1}{2}\left[J_1\left(\frac{\tau}{\alpha}\right) + J_3\left(\frac{\tau}{\alpha}\right)\right]$$

Изображение $\Psi(p)$ имеет четыре точки ветвления $\pm i, \pm i/\alpha$. Функции $\Psi_2(p)$, $\Psi_3(p)$ становятся однозначными, если провести разрезы вдоль отрезков мнимой оси $(i, i/\alpha)$; $(-i, -i/\alpha)$. Для выделения однозначной ветви $\Psi_1(p)$ необходимо провести дополнительный разрез $(i/\alpha, -i/\alpha)$ при $\alpha > 1$ либо $(i, -i)$ при $\alpha < 1$. Из двух ветвей функций $\sqrt{z}$ выбрана та, которая для $z > 0$ дает $\sqrt{z} > 0$. Можно показать, что полюса $p = \pm i\omega$ функции $\Psi(p)$ соответствуют другим листам римановой поверхности. Поэтому интеграл в (3.5) можно брать только вдоль указанных разрезов. После вычислений получим

$$\psi(\tau) = \pm\frac{2}{\pi}\frac{\alpha\lambda - 1}{1 - \lambda^2}\int_{1/\alpha}^1 \frac{\sin x\tau}{x^2 - \omega^2}\sqrt{(1 - x^2)(x^2 - 1/\alpha^2)}\, dx + \tag{3.16}$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{1-\mu}{1-\lambda^2}\left[\mu\int_0^1 \frac{\sin x\tau}{x^2 - \omega^2}(1 - \alpha^2 x^2)\sqrt{1 - x^2}\frac{dx}{x} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{1/\alpha} \frac{\sin x\tau}{x^2 - \omega^2}(1 - x^2)\sqrt{1 - \alpha^2 x^2}\frac{dx}{x}\right]$$

Плюс нужно брать при $\alpha > 1$, минус — при $\alpha < 1$. Если на участке интегрирования знаменатель $x^2 - \omega^2$ обращается в нуль, то интеграл следует вычислять в смысле главного значения. Формула (3.16) удобна для нахождения асимптотики

$$\psi(\tau \to \infty) = \text{const} = \frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \tag{3.17}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении асимптотика $\psi(\tau)$ зависит только от соотношения плотностей обеих сред. Поведение $\psi(\tau)$ на начальной стадии получим, используя лорановское разложение $\Psi(p)$ в бесконечно удаленной точке

$$\psi(\tau\to 0)=A\tau+B\tau^3+O(\tau^5),\qquad A=\frac{1}{2(1+\lambda)}\left[1-\lambda+\frac{\alpha-1}{\alpha^2}\right]$$

$$B=\frac{1}{48}\left\{1+\frac{2(1+\alpha)}{\alpha^2(1+\lambda)}+\frac{(1+\alpha)(1-2\alpha)}{\alpha^4(1+\lambda)}\left[3+\frac{2(\alpha^2-1)}{1+\lambda}\right]\right\} \tag{3.18}$$

Полученный результат допускает следующее обобщение. Пусть в единицу времени на границу раздела падает N слабых ударных волн одинаковой интенсивности, причем от каждой из них граница раздела получает приращение скорости U. Тогда (невозмущенная) граница будет двигаться с ускорением

$$g=\frac{dU}{dt}=NU \tag{3.19}$$

Каждая пришедшая волна за время $\Delta t=1/N$ увеличивает $u(t)$ согласно (3.5) и (3.17) на величину

$$\Delta u=kaU\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1} \tag{3.20}$$

Поэтому для $du/dt=d^2a/dt^2$ можно написать уравнение

$$\frac{d^2a}{dt^2}=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}kga \tag{3.21}$$

что совпадает с основным уравнением гравитационной неустойчивости Рэлея — Тейлора для несжимаемых сред. В этих рассуждениях предполагалось, что за время $\Delta\tau$ решение $\psi(\tau)$ выходит на асимптотический режим (3.17), что возможно при выполнении условия $kc_1\Delta t\gg 1$ или $g\ll kc_1U$. Из уравнений движения имеем по порядку величины $\rho c_1 U\sim p$, $\rho g\sim \partial p/\partial x\sim p/L$, где L — расстояние вдоль оси X, на котором давление заметно меняется. В результате получаем, что сжимаемость несущественна, если рассматривать возмущения границы с достаточно малой длиной волны $(kL\gg 1)$.

В заключение автор благодарит Г. А. Гришину, О. М. Зотову, Е. М. Рабиновича и В. А. Щербакова за полезное обсуждение.

Поступило 11 IX 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Richtmyer R. D. Taylor instability in shock acceleration of compressible fluids. Commun. on Pure and Appl. Math., 1960, vol. 13, pp. 297—319.
2. Зайдель Р. М. Ударная волна от слабо искривленного поршня. ПММ, 1960, т. 24, вып, 2. стр. 219—227.
3. Гришина Г. А., Зайдель Р. М., Зотова О. М. Решение некоторых двумерных задач газовой динамики в линейном приближении. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5, стр. 975.
4. Зайдель Р. М. Влияние начальной разноплотности на движение ударной волны. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4, стр. 152—162.
5. Зайдель Р. М. Развитие возмущений в плоских ударных волнах. ПМТФ, 1967, № 4, стр. 32—39.