УДК 533.6.011.6

РАСЧЕТ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРОЗРАЧНОГО ГАЗА НА ИЗЛУЧАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. ИВАНОВ, И. Л. ДУНИН, Г. Г. МЕДВЕДЕВ

(*Новосибирск*)

Исследуется процесс переноса тепла в ламинарном пограничном слое прозрачного газа, обтекающего излучающую плоскую поверхность.

Процессы радиационного теплообмена в газах можно подразделить на две основные группы. К первой относится перенос тепла в поглощающих и излучающих средах. В этом случае влияние излучения связано с появлением в уравнении энергии дополнительных слагаемых, имеющих смысл внутренних источников и стоков тепла. Вторая группа охватывает процессы теплообмена в прозрачном газе, когда влияние излучения на конвекцию проявляется лишь через граничные условия.

В этой статье исследуется практически важный случай, относящийся ко второй группе: перенос тепла в ламинарном пограничном слое прозрачного газа, обтекающего плоскую пластину с заданным на ее поверхности тепловым потоком q_w.

Применительно к рассматриваемому движению уравнения пограничного слоя имеют вид

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\rho C_p u\frac{\partial T}{\partial x}+\rho C_p v\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) \qquad (1)$$

$$u=v=0,\qquad \frac{\partial T}{\partial y}=-\frac{q_w}{\lambda}+\frac{\varepsilon\sigma_0}{\lambda}(T^4-T_\infty{}^4),\qquad y=0$$

$$u=U_\infty,\qquad T=T_\infty,\qquad y\to\infty$$

Далее принимаем, что изменения физических свойств среды подчиняются следующим характерным для газов соотношениям [1]:

$$\rho\mu=\mathrm{const},\qquad \rho\lambda=\mathrm{const},\qquad C_p=\mathrm{const}$$

Использование преобразования Хоуарта

$$\frac{\partial Y}{\partial y}=\frac{\rho}{\rho_\infty},\qquad U=\frac{\partial\psi}{\partial Y},\qquad V=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

позволяет решать тепловую часть задачи (1) автономно. Вводя безразмерную температуру $\theta=T/T_\infty$, будем иметь

$$U\frac{\partial\theta}{\partial x}+V\frac{\partial\theta}{\partial Y}=a_\infty\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=\frac{S_x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}(\theta^4-\theta_*{}^4),\qquad \eta=0 \qquad (3)$$

$$\theta=1,\qquad \eta\to\infty \qquad (4)$$

Здесь

$$\theta_* = \frac{1}{T_\infty}\left(T_\infty^4 + \frac{q_w}{\varepsilon\sigma_0}\right)^{1/4}, \qquad \eta = \frac{Y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

$$S_x = \frac{\varepsilon\sigma_0 T_\infty^3 x}{\lambda_\infty}, \qquad \mathrm{Re}_x = \frac{U_\infty x}{\nu_\infty}$$

Из-за нелинейности граничного условия (3), выраженного законом Стефана — Больцмана, решение системы (2) — (4) связано с большими трудностями. В настоящее время известны только некоторые значения поверхностных температур, полученных на основе численных схем с использованием ЭЦВМ [2].

В [3] дан общий аналитический метод решения инженерных задач переноса с различными нелинейными краевыми условиями, который, как будет показано ниже, можно с успехом обобщить и для расчета теплообмена в пограничном слое. Вводя линеаризующее преобразование

$$Z(x,Y) = \frac{\ln W(x,Y)}{-p} = \int_0^\theta \frac{d\theta(x,Y)}{\theta_*^4 - \theta^4(x,Y)} =$$

$$= \frac{1}{2\theta_*^3}\left(\mathrm{Ar\,th}\frac{\theta}{\theta_*} + \mathrm{arctg}\frac{\theta}{\theta_*}\right) \tag{5}$$

в котором p — параметр, получим

$$U\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial Y} = a_\infty\left[\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + F(x,Y)\right] \tag{6}$$

$$F(x,Y) = pW\left(\frac{\partial\theta/\partial Y}{\theta_*^4 - \theta^4}\right)^2(4\theta^3 - p) \tag{7}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\eta} = -\frac{S_x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}W, \qquad \eta = 0 \tag{8}$$

$$W = \exp - \frac{p}{2\theta_*^3}\left(\mathrm{Ar\,th}\frac{1}{\theta_*} + \mathrm{arctg}\frac{1}{\theta_*}\right) = W_\infty, \qquad \eta \to \infty \tag{9}$$

В результате такой замены потенциала переноса интегральным соотношением (5) нелинейное краевое условие (3) переходит в обычное линейное условие третьего рода (8). Вместе с тем в основном дифференциальном уравнении (6) появляется нелинейный источник (7), который легко минимизируется при помощи корректирующего параметра p, входящего в преобразующую функцию.

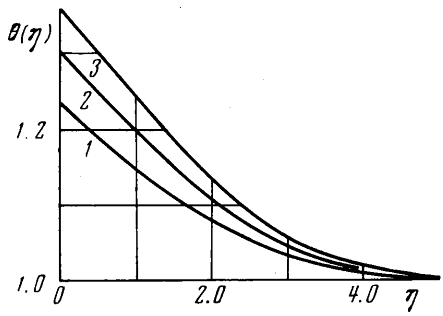
Искомая температура θ в процессе нагрева меняется от 1 до θ_*. Если этот интервал не слишком велик, то минимизация нелинейного слагаемого (7) обеспечивается условием

$$p = 4\left(\frac{1+\theta_*}{2}\right)^3 \tag{10}$$

При расчете интенсивных процессов нагрева, которые характеризуются повышенными значениями величин $S_x/\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ и $|1-\theta_*|$, минимизация выражения (7) достигается разбиением всего диапазона $|1-\theta_*|$ на ряд отрезков, в каждом из которых принимается $p_i = 4\theta_i^3$. Как показано в [4], подобный подход к решению задач радиационного прогрева позволяет при весьма небольшом числе разбиений (два-четыре) получать погрешность, нигде не превышающую 4—5%. Там же даны рекомендации по выбору числа отрезков в зависимости от диапазона изменения температуры и радиационного критерия, проанализирована погрешность и приведен пример численного расчета.

Имеется несколько способов решения линейной задачи (6) — (9) при $F(x, Y) = 0$. Например, В. Г. Левичем [5] используется прием, приводящий исходную систему к случаю нестационарной теплопроводности с переменными коэффициентами, который затем анализируется при помощи приближенных методов. Более простой подход к линейной задаче такого типа описан в [6]. Решение [6], полученное в приближении локальной автомодельности, дает возможность представить зависимость $W = W(x, Y)$ в замкнутом виде

$$\frac{W_\infty - W}{W_\infty} = \left[\left(1 + 0.332\frac{\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}}{pS_x}\right)\times \int_0^\infty [\varphi''(\eta)]^{\mathrm{Pr}}\,d\eta\right]^{-1}\int_0^\infty [\varphi''(\eta)]^{\mathrm{Pr}}\,d\eta \qquad (11)$$



Фиг. 1

Таким образом, распределение температуры в пограничном слое $\theta = \theta(x, Y)$ найдется на основе решения (11) и преобразования (5), номограммированного в [4].

На фиг. 1 показаны профили температур в ламинарном пограничном слое ($\mathrm{Pr} = 1$, $\theta_* = 1.4$), вычисленные при помощи уравнений (11), (10) и (5) для значений критерия $S_x / \sqrt{\mathrm{Re}_x}$, равных 0.05, 0.1, 0.2 (кривые *1—3* соответственно). Через η обозначена величина $Y\sqrt{\mathrm{Re}_x} / x$.

Основная погрешность предлагаемого метода расчета вызывается пренебрежением нелинейным комплексом (7) после его минимизации. При проведении двухсторонних оценок значений $F(x, Y)$ будем исходить из того, что наибольшая абсолютная величина выражения (7) имеет место, когда диапазон изменения температуры $\theta(x, Y)$ (от 1 до θ_*) не разбивается на интервалы, и параметр p определяется по формуле (10). Так как $0 \leqslant W(x, Y) \leqslant W_\infty$, а

$$\left(\frac{\partial\theta/\partial Y}{\theta_*^4 - \theta^4}\right)^2 = \begin{cases} 0 & Y \to \infty \\ (S_x/\sqrt{\mathrm{Re}_x})^2 & Y = 0 \end{cases}$$

получим

$$F(x, \infty) = 0$$

$$F(x, 0) = 4pW_\infty (S_x/\sqrt{\mathrm{Re}_x})^2 \left[\theta^3 - \left(\frac{1+\theta_*}{2}\right)^3\right]$$

Если учесть, что $1 \leqslant \theta(x, Y) \leqslant \theta_*$, то минимальное и максимальное значения $F(x, 0)$ будут иметь вид

$$F_{\min} = 4pW_\infty (S_x/\sqrt{\mathrm{Re}_x})^2 \left[1 - \left(\frac{1+\theta_*}{2}\right)^3\right] < 0$$

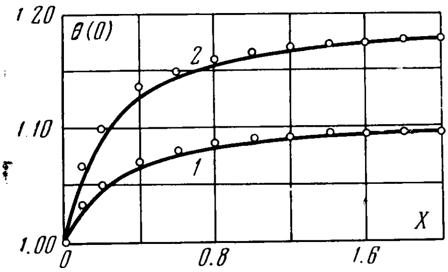
$$F_{\max} = 4pW_\infty (S_x/\sqrt{\mathrm{Re}_x})^2 \left[\theta_*^3 - \left(\frac{1+\theta_*}{2}\right)^3\right] > 0$$

Полученные двухсторонние оценки для величины нелинейного комплекса (7) дают возможность выявить ее зависимость от основных параметров процесса нагрева: критерия $S_x / \sqrt{\mathrm{Re}_x}$ и диапазона изменения искомой температуры $|1-\theta_*|$. Так, с уменьшением $S_x / \sqrt{\mathrm{Re}_x}$ абсолютные значения минимальной $F_{\min}$ и максимальной $F_{\max}$ величин (7) быстро уменьшаются (эти зависимости выражаются достаточно сильной квадратичной функцией). Уменьшение диапазона $|1-\theta_*|$ ($\theta_* \to 1$) также приводит к тому, что $F_{\min}$, $F_{\max} \to 0$. Благодаря этому с уменьшением $S_x / \sqrt{\mathrm{Re}_x}$ и $|1-\theta_*|$ нелинейный комплекс $F(x, Y)$ убывает, и точность вычисления искомой температуры $\theta(x, Y)$ увеличивается.

Если в выражении (11) принять $\eta = 0$, получим уравнение для определения температуры поверхности пластины

$$Z_w = \frac{1}{p} \ln\left(1 + \frac{pS_x}{0.332\,\mathrm{Pr}^{1/3}\,\mathrm{Re}_x^{1/2}}\right) + Z_\infty \tag{12}$$

На фиг. 2 сопоставлены значения поверхностных температур $\theta(0)$, найденные на основе соотношений (5), (10) и (12), при $\theta_* = 1.107$ и 1.189 (кривые *1* и *2* соответственно) с численными данными Спэрроу и Лина [2]. Абсцисса графика — обобщенная координата $X = (0.332\,\mathrm{Pr}^{1/3} \cdot \mathrm{Re}_x^{1/2})^{-1} S_x$. Как следует из сравнения, расхождение не превышает одного процента во всем диапазоне изменения переменной X. Если же область изменения температуры θ (от 1 до θ_*) разбить на два интервала, результаты обоих методов практически совпадут.



Фиг. 2

В заключение отметим, что изложенным методом можно решать и нелинейные задачи переноса, когда уравнение энергии системы (1) содержит диссипативные члены. В этом случае искомое распределение температур следует представить как сумму двух решений. Первое — интеграл неоднородного уравнения с линейным граничным условием на поверхности $\partial\theta / \partial\eta = 0$ (задача о теплоизолированной стенке [7]). Второе — решение системы (2)—(4), которое может быть определено описанным выше способом.

Поступило 8 IV 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Сесс Р. Д. Теплообмен при совместном действии теплового излучения и теплопроводности или конвекции. Сб. «Современные проблемы теплообмена», М., «Энергия», 1966.
2. Sparrow E. M., Lin S. H. Boundary layers with prescribed heat flux-application to simultaneous convection and radiation. Internat. J. Heat. Mass Transfer, 1965, vol. 8, No. 3.
3. Иванов В. В. Исследование переноса тепла в условиях нелинейной теплопроводности. Изв. АН СССР, Энергетика и транспорт, 1966, № 4.
4. Иванов В. В., Фурман А. В. Теплопроводность твердых тел, прогреваемых радиацией. Теплофизика высоких температур, 1967, № 2.
5. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
6. Кузнецов В. И. Теплообмен плоской пластины, обтекаемой ламинарным потоком нагретой жидкости. Инж.-физ. ж., 1965, т. 9, № 2.
7. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.