

УДК 532.528

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАМИНАРНОГО ИЗОТЕРМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ПЕРЕМЕННЫХ КРОККО

А. Л. ЛЕСНИКОВ

(Ленинград)

Приводятся некоторые результаты применения параметрического метода Л. Г. Лойцянского [1, 2] к уравнениям пограничного слоя, записанным в переменных Крокко. Предлагается новый метод универсализации уравнений пограничного слоя, основанный на обобщенно-подобном представлении напряжения трения. Универсальные уравнения не зависят от конкретного распределения скорости на внешней границе пограничного слоя.

1. Вывод универсального уравнения в переменных Крокко. В уравнении плоского стационарного ламинарного изотермического пограничного слоя [3]

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\tau} \right) + \frac{1}{\mu \rho} \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} = -UU' \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\tau} \right) \quad (1.1)$$

$$\tau \frac{\partial \tau}{\partial u} = -\rho \mu UU' \quad (u=0), \quad \tau = 0 \quad (u=U)$$

(штрих означает производную по x), записанном в независимых переменных Крокко x, u относительно неизвестной функции τ перейдем к безразмерным переменным

$$\eta = \frac{u}{U}, \quad \omega = \frac{\tau h}{U \mu}$$

Здесь x — продольная координата, u — продольная компонента скорости, $\tau = \mu du / dy$ — напряжение трения, μ — коэффициент динамической вязкости, ρ — плотность, $U(x)$ — скорость на внешней границе пограничного слоя, $h(x)$ — некоторая местная толщина пограничного слоя. Преобразование осуществляется по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{U'}{U} \eta \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial u^2} = \frac{1}{U^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}$$

В результате получим

$$\omega^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} - (1 - \eta^2) \frac{U'h^2}{\nu} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + \frac{U'h^2}{\nu} \left(\frac{h'U}{hU'} - 1 \right) \eta \omega = \eta \frac{Uh^2}{\nu} \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad (1.2)$$

$$\omega \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = -\frac{U'h^2}{\nu} \quad (\eta=0), \quad \omega = 0 \quad (\eta=1), \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Покажем, что с помощью уравнения импульсов и некоторой системы параметров уравнение (1.2) при определенном выборе величины h приводится к универсальному виду.

Уравнение импульсов в переменных Крокко выводится непосредственно из (1.1) путем двукратного интегрирования обеих его частей. С уче-

том граничных условий имеем

$$\int_0^U \left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\tau} \right) du \right) du + UU' \int_0^U \frac{du}{\tau} = \frac{\tau_0}{\rho\mu} \quad (1.3)$$

(τ_0 — значение величины τ на стенке). Первый интеграл в (1.3) вычисляется по частям

$$\int_0^U \left(\int_0^u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\tau} \right) du \right) du = U \int_0^U u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\tau} \right) du - \int_0^U u^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\tau} \right) du \quad (1.4)$$

Изменение порядка дифференцирования и интегрирования в левой части (1.4) и некоторые дополнительные преобразования приводят (1.3) к виду

$$\frac{d}{dx} \int_0^U u(U-u) \frac{du}{\tau} + U' \int_0^U (U-u) \frac{du}{\tau} = \frac{\tau_0}{\rho\mu}$$

Вводя условные толщины пограничного слоя:
толщину вытеснения

$$\delta_c^* = \int_0^U \left(1 - \frac{u}{U} \right) \frac{\mu du}{\tau}$$

толщину потери импульса

$$\delta_c^{**} = \int_0^U \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \frac{\mu du}{\tau}$$

приходим к следующему уравнению импульсов в переменных Крокко:

$$U \frac{d\delta_c^{**}}{dx} + U' \delta_c^{**} (2 + H) = \frac{\tau_0}{\rho U}, \quad H = \frac{\delta_c^*}{\delta_c^{**}} \quad (1.5)$$

Это уравнение может быть получено также из обычного интегрального условия импульсов.

Определим теперь величину h равенством

$$h = \delta_c^{**} / B \quad (1.6)$$

где B — некоторая нормирующая константа, и рассмотрим обобщенно-подобное представление напряжения трения

$$\Omega = \frac{\tau \delta_c^{**}}{BU\mu} (\eta; f_1, f_2, \dots) \quad (1.7)$$

с бесконечным в общем случае числом параметров подобия

$$f_k = U^{k-1} \left(\frac{d^k U}{dx^k} \right) \left(\frac{\delta_c^{**2}}{\nu} \right)^k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

Тогда уравнение импульсов (1.5) с использованием (1.7) и (1.8) может быть представлено в одной из следующих форм:

$$\frac{\delta_c^{**'}}{\delta_c^{**}} = \frac{U' F}{2U f_1} \quad (1.9)$$

$$z^{**'} = \frac{F}{U}, \quad z^{**} = \frac{\delta_c^{**2}}{\nu} \quad (1.10)$$

$$f_1 = \frac{U' \delta_c^{**2}}{\nu}, \quad F = 2[\zeta - (2 + H)f_1], \quad \zeta = B\Omega(0; f_1, f_2, \dots)$$

$$H = \frac{1}{B} \int_0^U \left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{\mu U}{\delta_c^{**\tau}} d\left(\frac{u}{U}\right) = \frac{1}{B} \int_0^1 \frac{1 - \eta}{\Omega} d\eta$$

Параметры f_k связаны между собой рекуррентным соотношением

$$\frac{U}{U'} f_1 f_k' = [(k-1)f_1 + kF] f_k + f_{k+1} = \theta_k \quad (1.11)$$

вытекающим из (1.8) с использованием уравнения импульсов в форме (1.10).

Подставим обобщенно-подобное представление (1.7) в уравнение (1.2). Предполагается существование однозначной зависимости между координатой x и бесконечной последовательностью параметров f_1, f_2, \dots . Тогда, переходя от производной по x к производным по f_k по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k' \frac{\partial}{\partial f_k}$$

и принимая во внимание (1.6), (1.9), (1.11), придем к искомому универсальному уравнению

$$B^2 \Omega^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} - (1 - \eta^2) f_1 \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \frac{F - 2f_1}{2} \eta \Omega = \eta \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \frac{\partial \Omega}{\partial f_k} \quad (1.12)$$

$$\Omega \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = -\frac{f_1}{B^2} \quad (\eta = 0), \quad \Omega = 0 \quad (\eta = 1)$$

Для удобства численного интегрирования произведем в этом уравнении дополнительную замену переменных, положив

$$\Omega^2 = \vartheta$$

Получим окончательно следующее универсальное уравнение ламинарного пограничного слоя в переменных Крокко:

$$B^2 \vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - \frac{B^2 (\partial \vartheta)^2}{2 (\partial \eta)^2} - f_1 (1 - \eta^2) \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} + (F - 2f_1) \eta \vartheta = \eta \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k \frac{\partial \vartheta}{\partial f_k}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = -\frac{2f_1}{B^2} \quad (\eta = 0), \quad \vartheta = 0 \quad (\eta = 1) \quad (1.13)$$

$$\vartheta = \vartheta^{(0)}(\eta) \quad (f_1 = f_2 = \dots = 0)$$

где $\vartheta^{(0)}(\eta)$ можно рассматривать как решение обыкновенного дифференциального уравнения для продольного обтекания пластины

$$\vartheta^{(0)} \frac{d\vartheta^{(0)}}{d\eta^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{d\vartheta^{(0)}}{d\eta} \right)^2 + 2\eta \vartheta^{(0)} = 0 \quad (1.14)$$

$$\frac{d\vartheta^{(0)}}{d\eta} = 0 \quad (\eta = 0), \quad \vartheta^{(0)} = 0 \quad (\eta = 1)$$

получающегося из (1.13) при $f_1 = f_2 = \dots = 0$, если выбрать нормирующую постоянную B из условия

$$F(0, 0, \dots) = 2B^2 = 2\zeta(0, 0, \dots), \\ B = 0.470$$

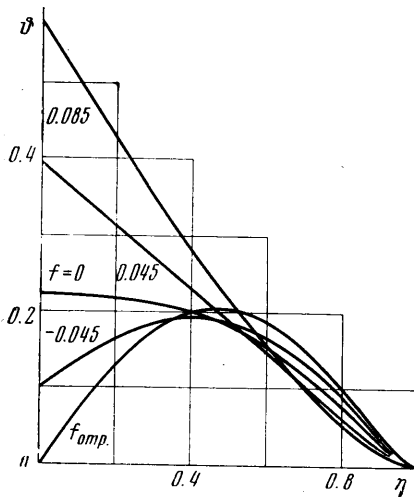
Функция F определяется через решение уравнения (1.13) по формулам

$$F = 2[\zeta - (2 + H)f_1],$$

$$\zeta = B \sqrt{\vartheta(0; f_1, f_2, \dots)},$$

$$H = \frac{1}{B} \int_0^1 \frac{1-\eta}{\sqrt{\vartheta}} d\eta \quad (1.15)$$

Уравнение (1.13) по сравнению с универсальным уравнением, записанным в обычных координатах [1], на порядок ниже и имеет более простую правую часть.



Фиг. 1

2. Метод численного интегрирования универсального уравнения и обсуждение результатов. Уравнение (1.3) имеет особенность в точке $\eta = 1$, так как коэффициент при старшей производной обращается в нуль в этой точке. Как показывают проведенные вычисления, это обстоятельство не вызывает особых затруднений.

Уравнение (1.13) интегрировалось в однопараметрическом приближении ($f_1 \neq 0$, $f_2 = f_3 = \dots = 0$).

Соответствующее этому случаю дифференциальное уравнение

$$B^2 \vartheta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - \frac{B^2}{2} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} \right)^2 - (1 - \eta^2) f_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} + (F - 2f_1) \eta \vartheta = \eta F f_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial f_1} \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} = -\frac{2f_1}{B^2} \quad (\eta = 0), \quad \vartheta = 0 \quad (\eta = 1) \\ \vartheta = \vartheta^{(0)}(\eta) \quad (f_1 = f_2 = \dots = 0) \quad (2.1)$$

аппроксимировалось следующей системой конечно-разностных уравнений ($f \equiv f_1$):

$$\vartheta_{m,0} - \vartheta_{m,1} = \frac{2f_m}{B^2} \Delta \eta \quad (n = 0) \\ \vartheta^{i-1} \frac{\vartheta_{m,n+1}^i - 2\vartheta_{m,n}^i + \vartheta_{m,n-1}^i}{(\Delta \eta)^2} - \left[\frac{1}{2} \frac{\vartheta_{m,n+1}^{i-1} - \vartheta_{m,n-1}^{i-1}}{2\Delta \eta} + \right. \\ \left. + (1 - \eta_n^2) \frac{f_m}{B^2} \right] \frac{\vartheta_{m,n+1}^i - \vartheta_{m,n-1}^i}{2\Delta \eta} + \left[\frac{F_{m,n} - 2f_m}{B^2} \right] \eta_n \vartheta_{m,n} = \\ = \frac{\eta_n}{B^2} F_{m,n} \frac{\vartheta_{m-1,n}^{i-1} - \vartheta_{m,n}^{i-1}}{\Delta \eta} \quad (n = 1, 2, \dots, N-1) \\ \vartheta_N = 0 \quad (n = N)$$

где i означает номер текущей итерации, а индексы m, n определяют продольную и поперечную координаты точек, к которым относятся соответствующие функции. Первое из уравнений (2.2) следует из разложения в ряд функции $\vartheta_{m,1}$ в окрестности точки $(m, 0)$ с учетом граничного условия и дополнительного равенства $\partial^2 \vartheta / \partial \eta^2 = 0$ на стенке. Система (2.2) решалась методом прогонки с итерациями на каждом слое.

Процесс последовательных приближений прекращался, как только разница между значениями функций в двух последовательных приближениях становилась меньше величины $\epsilon = 10^{-6}$. Сначала рассчитывался нулевой слой, т. е. решалась в переменных Крокко автомодельная задача с использованием в качестве начального приближения параболы. На этой задаче устанавливалось влияние величины шага на точность расчетов. Ниже приводятся значения функции ϑ_0 на стенке при различном числе узлов N ($\Delta\eta = 1/N$).

N	10	50	100	200
$\Delta\eta$	0.1	0.02	0.01	0.005
V_0	0.2395	0.2246	0.2225	0.2215

В продольном направлении решение осуществлялось с шагом $\Delta f = 0.005$ вправо от точки $f = 0$ до точки, где $F = 0$, и влево до точки отрыва при числе узлов в поперечном направлении $N = 100$ и $N = 200$. Характер поведения функции ϑ в зависимости от η при ряде значений параметра f для $N = 200$ показан на фиг. 1. Значения функции ϑ_0 в зависимости от величины параметра f приведены на фиг. 2. Близкая к линейной зависимость $\vartheta_0(f)$ вблизи отрыва делает возможным вести счет вплоть до отрыва пограничного слоя, чего не удается сделать в обычных координатах [4].

Наряду с указанной выше разностной схемой с постоянным шагом по вертикали применялась неявная трехточечная схема с синусоидальным распределением узлов сетки

$$\eta_n = \sin \pi n / 2N,$$

где N — число шагов по поперечной координате. Сгущение узлов сетки на внешней границе слоя позволяет уже при $N = 50$ достичь точности, превышающей точность при $N = 200$ в схеме с постоянным шагом.

Решение конкретной задачи [2] сводится согласно параметрическому методу, как и при использовании обычных координат, к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$dz^{**} / dx = F / U, \quad z^{**} = z^{**(0)} \quad (x = x^{(0)})$$

Графики зависимостей $H(f)$, $\zeta(f)$, $F(f)$, рассчитанных по формулам (1.15), приведены на фиг. 2.

Поступило 17 V 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Параметры подобия в теории пограничного слоя. Сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды, М., «Наука», 1969.
2. Лойцянский Л. Г. Универсальные уравнения теории ламинарного пограничного слоя и параметрические методы их интегрирования. Тр. Ленингр. политех. ин-та, 1967, № 280.
3. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
4. Карякин В. Е. Применение метода характеристик к решению универсальных уравнений ламинарного пограничного слоя. Тр. Ленингр. политех. ин-та, 1970, № 313.



Фиг. 2

