

УДК 532.52 : 536.24

ИСТЕЧЕНИЕ СТРУИ ИЗ ЩЕЛЕВОГО ИСТОЧНИКА В ПРОДОЛЬНЫЙ СНОСЯЩИЙ ПОТОК

Н. И. АКАТНОВ

(Ленинград)

Показано, что задача о смешении струи, вытекающей из бесконечно длинного щелевого источника, с однородным потоком, текущим параллельно источнику струи, аналогична задаче о распространении тепла в плоской струе.

Задача моделирует случай, когда источники струй густо расположены вдоль одной линии, например, оси z , на очень длинном участке, и струи жидкости, вытекающие из этих источников, смешиваются с такой же жидкостью, заполняющей окружающее пространство и текущей вдоль оси z со скоростью $W = \text{const}$. Распределим источники струй равномерно вдоль оси z и будем считать, что получившийся щелевой источник бесконечно тонок и что жидкость вытекает из источника с бесконечно большой скоростью. Предположим, что источник простирается по z от $-\infty$ до ∞ . Тогда течение жидкости не должно зависеть от координаты z . Проведем ось x прямоугольной системы координат $Oxyz$ в плоскости симметрии получившегося трехмерного течения.

Обозначим проекции средней по времени и пульсационной скорости на оси координат x, y, z соответственно u, v, w и u', v', w' . Обозначим через δ толщину области возмущенного течения в направлении оси y и будем считать $\delta/x \ll 1$, т. е. предполагаем, что в данном случае течение может быть описано системой уравнений пограничного слоя

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial}{\partial y} \rho \langle v'u' \rangle \\ \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} &= - \frac{\partial}{\partial y} \rho \langle v'w' \rangle \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и уравнением баланса энергии турбулентных пульсаций в виде

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial b}{\partial x} + \rho v \frac{\partial b}{\partial y} &= - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'(p' + \rho b') \rangle - \rho \langle v'u' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \langle v'w' \rangle \frac{\partial w}{\partial y} - W_i \\ b &= \frac{1}{2} \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь p' — пульсация давления, W_i — функция, определяющая диссипацию пульсационной энергии в тепло. При записи уравнения (2) сделано предположение об изотропности турбулентности и отброшены члены, определяющие перенос энергии пульсаций за счет сил вязкости. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (y = 0) \\ u = 0, \quad w = W, \quad b = 0 \quad (y = \pm \infty) \end{aligned} \quad (3)$$

Из уравнений (1) и пограничных условий (3) следует сохранение потоков импульса в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dy = J_{xx} = \text{const}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \rho u (W - w) dy = \Delta J_{xz} = \text{const} \quad (4)$$

Как видно из системы уравнений (1) и условий (3), (4), в данном случае распределение w эквивалентно распределению температуры в плоской турбулентной струе, вытекающей в пространство, затопленное той же жидкостью, но с температурой, отличной от температуры жидкости струи при турбулентном числе Прандтля, равном единице. Уравнение (2) отличается от соответствующего уравнения, записанного для плоской турбулентной струи, наличием дополнительного члена в правой части определяющим порождение энергии пульсаций за счет напряжения $\tau_{xz} = -\rho \langle v'w' \rangle$.

потезы [1]:

Для замыкания системы уравнений (1), (2) примем следующие ги-

$$\begin{aligned} -\rho \langle v'u' \rangle &= \rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}, & -\rho \langle v'w' \rangle &= \rho \varepsilon \frac{\partial w}{\partial y} \\ -\langle v'(p' + \rho b') \rangle &= \rho \varepsilon \frac{\partial b}{\partial y}, & \varepsilon &= a \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\bar{b}} dy \\ l &= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\bar{b}}{b_m}} dy, & W_t &= c \frac{\sqrt{b_m b}}{l} \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь y_1, y_2 — значения координаты y точек, в которых $u/u_m = 0.1$ и 0.9 . Индексами m отмечаются максимальные значения u и b в рассматриваемом сечении пограничного слоя. Примем $a = 0.10$ и $c = 2.1$ в соответствии с [1]. Интегрирование уравнений системы (1) при соблюдении условий (3), (4) дает

$$\begin{aligned} F &= \frac{\Psi}{u_m \delta} = 2 \text{th} \frac{1}{2} \eta, & \frac{u}{u_m} &= \frac{1}{u_m} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{dF}{d\eta} = F' \\ \varphi(\eta) &= \frac{b}{u_m^2}, & \eta &= \frac{y}{\delta}, & \frac{d\delta}{dx} &= a a_\varphi \\ a_\varphi &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \sqrt{\bar{\varphi}} d\eta, & u_m &= 0.612 \left(\frac{J_{xx}}{\rho \delta} \right)^{1/2} \\ w &= W - \frac{0.612 \Delta J_{xz}}{\sqrt{\rho \delta J_{xx}}} F' \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя в уравнение (2) соотношения (5) и (6), приведем это уравнение к виду

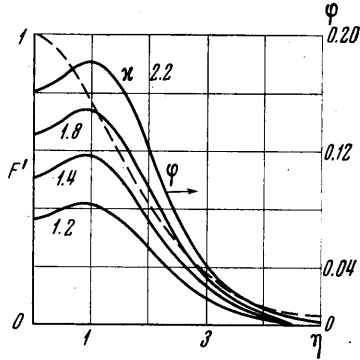
$$\begin{aligned} \varphi'' + \frac{1}{2} F \varphi' + \left(F' - \frac{c \sqrt{\bar{\varphi}_m}}{a a_\varphi n} \right) \varphi + \kappa F'^2 &= 0 \\ n &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\varphi}{\bar{\varphi}_m} \right)^{1/2} d\eta, & \kappa &= 1 + \frac{\Delta J_{xz}^2}{J_{xx}^2} \end{aligned} \quad (7)$$

Интегрируя (7) при различных значениях κ , найдем $\varphi(\eta, \kappa)$ и $a_\varphi(\kappa)$. На фиг. 1 пунктиром построен график $F'(\eta)$ и сплошными линиями

$\varphi(\eta, \kappa)$. Отметим, что $d\delta/dx$ быстро увеличивается с ростом κ . Так, при $\kappa = 1, 1.4, 1.8, 2.2$ соответственно будем иметь $a_\varphi = 0.609, 0.720, 0.811, 0.903$.

Течение на начальном участке струи, истекающей из источника конечной ширины, как известно, следует рассматривать особо. В данном случае картину течения на начальном участке можно построить тем же методом, который изложен в монографии [2], решив предварительно задачу о трехмерном пограничном слое, образующемся на границе двух полубесконечных потоков, текущих под углом один к другому [3].

Пусть имеется твердая бесконечно тонкая стенка, вдоль кромки которой расположим ось z . Ось y перпендикулярна стенке и отрицательная часть оси x — на стенке. Над стенкой ($x < 0$) потоки однородны и при $y < 0$ вектор скорости имеет проекции U_0 и W_0 , а при $y > 0$ — соответственно U_∞ и W_∞ . На кромке пластины вдоль оси z потоки приходят в соприкосновение, образуя турбулентный пограничный слой. Поскольку протяженность кромки стенки бесконечна, то $\partial(\cdot)/\partial z \equiv 0$ и для описания течения в пограничном слое можем использовать систему уравнений (1), (2), гипотезы (5) при $a = 0.081$ и $c = 2.1$. Граничные условия задачи



Фиг. 1

$$u = U_0, \quad w = W_0, \quad b = 0 \quad (y = -\infty) \tag{8}$$

$$u = U_\infty, \quad w = W_\infty, \quad b = 0 \quad (y = \infty) \tag{9}$$

В качестве дополнительного условия, определяющего положение профилей скорости на оси y примем $u - u_\infty = (u_0 - u_\infty) / 2$ при $y = 0$. Решение разыскиваем в виде

$$u = U_0 F_1'(\eta), \quad \Psi = \delta U_0 F_1(\eta), \quad \eta = y / \delta \tag{10}$$

Подставляя (10) в первое уравнение системы (1), получаем

$$F_1''' + F_1 F_1'' = 0 \quad (d\delta/dx = a a_\varphi) \tag{11}$$

Граничные условия

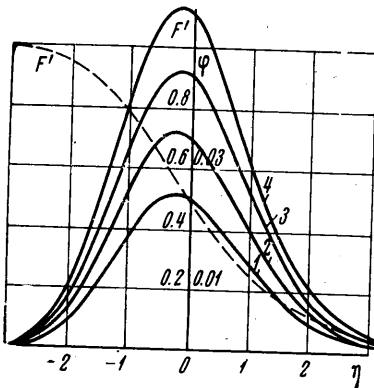
$$F_1' = 1 \quad (\eta = -\infty),$$

$$F_1' = u_\infty / u_0 = m \quad (\eta = \infty)$$

$$F_1' - m = 1/2(1 - m) \quad (\eta = 0) \tag{12}$$

После интегрирования (11) при условиях (12) решение для w можно записать в виде

$$w = W_\infty + \frac{W_0 - W_\infty}{1 - m} (F_1' - m) \tag{13}$$



Фиг. 2

Подстановка $b/u_0^2 = \varphi_1(\eta)$ приводит уравнение (2) к виду

$$\varphi_1'' + F_1\varphi_1' - \frac{c\sqrt{\varphi_{m1}}}{aa_\varphi n}\varphi_1 + \kappa F_1'^2 = 0 \quad (14)$$

Интегрирование (14) совместно с уравнением (11) при условиях $\varphi_1(-\infty) = \varphi_1(\infty) = 0$ дает $\varphi_1(\eta, \kappa)$. На фиг. 2 пунктиром нанесен график $F_1'(\eta)$ и сплошными линиями — графики $\varphi(\eta, \kappa)$ для случая $m = 0$. Рост κ в этом случае также приводит к увеличению толщины пограничного слоя при фиксированном x . Так, при $\kappa = 1, 1.4, 1.8, 2.2$ имеем $a_\varphi = 0.472, 0.558, 0.633, 0.700$.

Пользуясь найденным решением, можно построить картину течения на начальном участке струи, если поток, вытекающий из устья источника, однороден. Срастить решения для начального и основного участков можно при помощи условий (4). Так, если скорость потока, вытекающего из источника шириной h , имеет проекции U_0, W_0 , а скорость сносящего потока $u_\infty = 0, W_\infty$, то будем иметь

$$J_{xx} = \rho h U_0^2, \Delta J_{xz} = \rho h U_0 (W_\infty - W_0)$$

$$\kappa = 1 + \frac{\Delta J_{xz}^2}{J_{xx}^2} = 1 + \frac{(W_\infty - W_0)^2}{U_0^2}$$

Автор благодарит Ю. Я. Болдырева за помощь в выполнении расчетов к данной работе.

Поступило 22 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Акатнов Н. И., Кузнецов А. П. Уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций в теории свободного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 6.
2. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. М., Физматгиз, 1960.
3. Hackett J. E., Cox D. K. The three-dimensional mixing layer between two grazing perpendicular streams. J. Fluid Mech., 1970, vol. 43, p. 1, pp. 77—96.