

УДК 533.697+533.6.011

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ВДУВЕ СО СТЕНОК

Г. А. ДАНИЛИН

(Москва)

Рассматривается задача определения трения, теплового потока, линии растекания и продольного градиента давления в окрестности центральной линии тока для течения однородной невесомой сжимаемой жидкости в плоском канале при интенсивном вдуве со стенок. Полученные асимптотические формулы сравниваются с результатами численных расчетов и устанавливается граница их применимости.

Асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса для течения невесомой несжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками, с поверхностей которых производится интенсивный вдув, получено в работе [1]. Перенос тепла не исследовался. Численные расчеты показали хорошее совпадение результатов асимптотической теории. Еще ранее, в теории пограничного слоя для однородных жидкостей, нашел широкое применение метод внешнего и внутреннего разложений [2]. Позже этот метод был обобщен для многокомпонентного пограничного слоя [3].

Численные расчеты показывают, что с ростом интенсивности вдува наблюдается отход пограничного слоя от стенки. Аналогичная картина наблюдается и в ударном слое при большом вдуве с поверхности тела [4].

**1. Уравнения движения.** Рассмотрим течение невесомой однородной вязкой теплопроводной сжимаемой жидкости между двумя параллельными стенками бесконечной длины, с поверхностей которых в зазор толщины  $\Delta$  вдувается газ со скоростями  $V_w$  и  $V_e$  в направлении, перпендикулярном стенкам. Здесь и в дальнейшем индекс  $w$  будем относить к значению параметров на нижней стенке, а  $e$  — на верхней. Предполагая наличие стока жидкости на бесконечности, в системе координат, связанной с центральной линией тока (ось  $y$ ) и нижней стенкой (ось  $x$ ), полная система уравнений Навье-Стокса [3] для формулируемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^* u^*}{\partial x} + \frac{\partial \rho^* v^*}{\partial y} &= 0 & (1.1) \\ \rho^* \left( u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) - \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu^* \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) \\ \rho^* \left( u^* \frac{\partial v^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu^* \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu^* \frac{\partial v^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu^* \frac{\partial u^*}{\partial y} \right) \\ \rho^* \left( u^* \frac{\partial h^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial h^*}{\partial y} \right) &= u^* \frac{\partial p^*}{\partial x} + v^* \frac{\partial p^*}{\partial y} + \mu^* \left( \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} \right)^2 + \\ &\quad + \frac{4}{3} \mu^* \left[ \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v^*}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial u^* \partial v^*}{\partial x \partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\mu^*}{\sigma} \frac{\partial h^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu^*}{\sigma} \frac{\partial h^*}{\partial y} \right) \\ p^* &= \gamma^{-1} (\gamma - 1) \rho^* h^* \quad (\gamma = C_p / C_v) \end{aligned}$$

Здесь  $u^*$  и  $v^*$  — составляющие скорости в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;  $\rho^*$ ,  $p^*$ ,  $h^*$  и  $\mu^*$  — плотность, давление, энтальпия и вязкость газа;  $C_p$ ,  $C_v$  — теплоемкости при постоянных давлении и объеме;  $\sigma$  — число Прандтля ( $\gamma$  и  $\sigma$  считаем постоянными).

Систему уравнений (1.1) будем рассматривать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} u^* &= 0, \quad v^* = V_w, \quad h^* = h_w^* \quad (y = 0) \\ u^* &= 0, \quad v^* = -V_e, \quad h^* = h_e^* \quad (y = \Delta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

**2. Автомоделное решение уравнений Навье — Стокса.** В соответствии с граничными условиями (1.2) в окрестности центральной линии тока решение системы (1.1) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \xi &= x / \Delta, \quad \eta = y / \Delta, \quad u^* = V_e u(\eta) \xi, \quad v^* = -V_e v(\eta) \\ p^* &= \gamma^{-1} (\gamma - 1) \rho_{e_0}^* h_e^* [p_0(\eta)' - 1/2 p_2(\eta) \xi^2], \quad \rho^* = \rho_{e_0}^* \rho(\eta) \\ h^* &= h_e^* [\theta_0(\eta) - 1/2 \theta_2(\eta) \xi^2], \quad \mu^* = \mu_e^* \mu(\theta_0), \quad \rho_{e_0}^* = \rho^*(0, \Delta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Функции  $f_i(\eta)$  определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\rho v)' &= \rho u, \quad \varepsilon^2 (\mu u')' + \rho v u' - \rho u^2 = K \\ \rho_0' &= -\beta_1^{-1} \{ \rho v v' + \varepsilon^2 [1/3 (\mu v')' + 2/3 (\mu u)' - \mu u'] \} \\ \sigma^{-1} \varepsilon^2 (\mu \theta_0')' + \rho v \theta_0' &= \gamma^{-1} (\gamma - 1) v \rho_0' + \varepsilon^2 \mu \{ \sigma^{-1} \theta_2 - \\ &\quad - 1/3 \beta_2^{-1} [u^2 + (v')^2 + u v'] \} \\ \sigma^{-1} \varepsilon^2 (\mu \theta_2')' + \rho v \theta_2' - 2\rho u \theta_2 &= 2\beta_2^{-1} [K u + \varepsilon^2 \mu (u')^2] \\ \rho_0 &= \rho \theta_0, \quad p_2 = -\beta_1^{-1} K = \text{const} \end{aligned} \quad (2.2)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad v = -\alpha, \quad \theta_0 = \theta_w, \quad \theta_2 = 0 \quad (\eta = 0) \\ u &= 0, \quad v = 1, \quad p_0 = 1, \quad \theta_0 = 1, \quad \theta_2 = 0 \quad (\eta = 1) \\ \beta_1 &= \gamma^{-1} (\gamma - 1) \beta_2, \quad \beta_2 = h_e^* / V_e^2, \quad \alpha = V_w / V_e \\ \varepsilon^2 &= R^{-1}, \quad R = \rho_{e_0}^* V_e \Delta / \mu_e^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

Следует отметить, что для несжимаемой жидкости решение (2.1) — (2.3) является точным решением уравнений Навье — Стокса для сформулированной выше задачи.

**3. Асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса при большом вдуве.** Основная задача будет состоять в определении трения и теплового потока на нижней стенке, линии растекания и продольного градиента давления. Примем ступенчатую зависимость плотности и коэффициента вязкости от поперечной координаты  $\eta$

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_w, \quad \mu = \mu_w \quad (0 \leq \eta < \eta_0) \\ \rho &= 1, \quad \mu = 1 \quad (\eta_0 < \eta \leq 1) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь величина  $\eta_0$  определяет положение линии растекания, т. е. линии, на которой вертикальная составляющая скорости обращается в нуль.

Внешнее решение вблизи  $\eta = 0$ . Для области течения вблизи  $\eta = 0$  введем внешние переменные по формулам

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2} \frac{\eta_0 - \eta}{\eta_0}, \quad \varepsilon_0^2 = \frac{\pi \mu_w \varepsilon^2}{2 \eta_0 \alpha_w}, \quad \alpha_w = \rho_w \alpha \quad (3.2)$$

$$u = \frac{\pi \alpha_w}{2 \eta_0 \rho_w} H_0'(\lambda_0), \quad v = -\frac{\alpha_w}{\rho_w} H_0(\lambda_0), \quad p_0 = \frac{\alpha_w^2}{\rho_w} P_0(\lambda_0)$$

$$K = \left( \frac{\pi \alpha_w}{2 \eta_0} \right)^2 \frac{K_0}{\rho_w}, \quad \theta_0 = \Theta_0(\eta) + \left( \frac{\alpha_w}{\rho_w} \right)^2 \Theta_1(\lambda_0)$$

$$\theta_2 = \left( \frac{\pi \alpha_w}{2 \eta_0 \rho_w} \right)^2 \Theta_2(\lambda_0)$$

где  $\Theta_0(\eta)$  решение однородного уравнения притока тепла

$$\sigma^{-1} \varepsilon^2 (\mu \Theta_0')' + \rho v \Theta_0' = 0 \quad (3.3)$$

с граничными условиями

$$\Theta_0 = \theta_w \quad (\eta = 0), \quad \Theta_0 = 1 \quad (\eta = 1) \quad (3.4)$$

Учитывая (3.1) — (3.4), систему уравнений (2.2) преобразуем к виду

$$\varepsilon_0^2 H_0''' + H_0 H_0'' - (H_0')^2 = K_0, \quad P_0' = -\beta_1^{-1} (H_0 H_0' + \varepsilon_0^2 H_0'')$$

$$\sigma^{-1} \varepsilon_0^2 \Theta_1'' + H_0 \Theta_1' = \gamma^{-1} (\gamma - 1) H_0 P_0' + \sigma^{-1} \varepsilon_0^2 [\Theta_2 - 4\sigma \beta_2^{-1} (H_0')^2]$$

$$\sigma^{-1} \varepsilon_0^2 \Theta_2'' + H_0 \Theta_2' - 2H_0' \Theta_2 = 2\beta_2^{-1} [K_0 H_0' + \varepsilon_0^2 (H_0'')^2]$$

с граничными условиями

$$H_0 = 1, \quad H_0' = \Theta_1 = \Theta_2 = 0 \quad (\lambda_0 = 1/2\pi); \quad H_0 = 0 \quad (\lambda_0 = 0)$$

При  $\varepsilon_0^2$ , стремящемся к нулю, решения этой задачи вблизи  $\eta = 0$  будем искать в виде

$$H_0 = H_{00} + \varepsilon_0^2 H_{02} + \dots, \quad P_0 = P_{00} + \varepsilon_0^2 P_{02} + \dots, \quad K_0 = K_{00} + \varepsilon_0^2 K_{02} + \dots$$

$$\Theta_1 = \Theta_{10} + \varepsilon_0^2 \Theta_{12} + \dots, \quad \Theta_2 = \Theta_{20} + \varepsilon_0^2 \Theta_{22} + \dots$$

Подставляя эти ряды в уравнения и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon_0$ , получаем

$$H_{00} H_{00}'' - (H_{00}')^2 = K_{00}$$

$$H_{00} H_{02}'' - 2H_{00}' H_{02}' + H_{00}'' H_{02} = K_{02} - H_{00}''' \quad (3.5)$$

$$P_{00}' = -\beta_1^{-1} H_{00} H_{00}'$$

$$P_{02}' = -\beta_1^{-1} (H_{00} H_{02}' + H_{00}' H_{02} + H_{00}'') \quad (3.6)$$

$$H_{00} \Theta_{10}' = \gamma^{-1} (\gamma - 1) H_{00} P_{00}' \quad (3.7)$$

$$H_{00} \Theta_{12}' = \gamma^{-1} (\gamma - 1) H_{00} P_{02}' - 4\beta_2^{-1} (H_{00}')^2 + \sigma^{-1} (\Theta_{20} - \Theta_{10}'')$$

$$H_{00} \Theta_{20}' - 2H_{00}' \Theta_{20} = 2\beta_2^{-1} K_{00} H_{00}' \quad (3.8)$$

$$H_{00} \Theta_{22}' - 2H_{00}' \Theta_{22} = 2\beta_2^{-1} [K_{00} H_{02}' + K_{02} H_{00}' + (H_{00}'')^2] - \sigma^{-1} \Theta_{20}'' - H_{02} \Theta_{20}' + 2H_{02} \Theta_{20}$$

$$H_{00} = 1, \quad H_{0i} = 0 \quad (i = 2, \dots)$$

$$H_{0j}' = \Theta_{1j} = \Theta_{2j} = 0 \quad (j = 0, 2, \dots; \lambda_0 = 1/2\pi) \quad (3.9)$$

$$H_{0j} = 0 \quad (j = 0, 2, \dots; \lambda_0 = 0)$$

Нетрудно видеть, что уравнения для коэффициентов разложений при нулевой степени  $\varepsilon_0$  представляют собой автомодельное решение уравнений Эйлера. Более того, система уравнений (3.5) независима от остальных и точно совпадает с аналогичной системой, записанной для несжимаемой жидкости [1]. Система (3.7) представляет собой решение неоднородного уравнения притока тепла вблизи  $\eta = 0$ . Далее, поскольку порядок системы (3.5) — (3.8) понизился, необходимость в граничных условиях при  $\eta = 1$  отпадает. В силу того что число граничных условий (3.9) точно соответствует порядку системы (3.5) значения  $H_{0j}''$ ,  $\Theta_{1j}'$  и  $\Theta_{2j}'$  на поверхности нижней стенки  $\lambda_0 = 1/2\pi$  и продольный градиент давления могут быть найдены из внешнего решения.

Используя асимптотическое решение системы (3.5), полученное в работе [1], из (3.2), (3.5) — (3.9) получаем следующие выражения для безразмерного трения, теплового потока и продольного градиента давления:

$$\begin{aligned} u'(0) &= \frac{\beta_1 p_2}{\alpha_w}, \quad \theta_0'(0) = \Theta_0'(0) + \frac{1}{\beta_2} \left( \frac{1}{\sigma} - 1 \right) \frac{\alpha_w \mu_w}{\rho_w^2} \left( \frac{\pi}{2\eta_0} \right)^2 \varepsilon^2 + \dots \\ \theta_2'(0) &= \frac{2}{\beta_2} \left( \frac{1}{\sigma} - 1 \right) \left( \frac{\pi}{2\eta_0} \right)^4 \frac{\mu_w \alpha_w}{\rho_w^2} \varepsilon^2 + \dots \\ p_2 &= \frac{1}{\beta_1} \left( \frac{\pi}{2\eta_0} \right)^2 \frac{\alpha_w^2}{\rho_w} \left( 1 + \frac{\pi A \mu_w}{2\eta_0 \alpha_w} \varepsilon^2 + \dots \right) \\ A &= \frac{2}{\pi} \int_0^{1/2\pi} z \operatorname{cosec} z \, dz = \frac{2}{\pi} (0.83193) \end{aligned} \quad (3.10)$$

В выражениях (3.10) осталась неопределенной величина  $\eta_0$ . Для ее определения необходимо построить внешнее решение системы (2.2) вблизи  $\eta = 1$ . Однако, учитывая (3.1), нет необходимости находить асимптотическое решение всей системы. Достаточно лишь рассмотреть уравнение количества движения в проекции на ось  $x$ .

*Внешнее решение вблизи  $\eta = 1$ .* Для области течения вблизи  $\eta = 1$  введем внешние переменные по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\pi}{2} \frac{\eta - \eta_0}{1 - \eta_0}, \quad \varepsilon_1^2 = \frac{\pi \varepsilon^2}{2(1 - \eta_0)}, \quad u = \frac{\pi}{2(1 - \eta_0)} H_1'(\lambda_1) \\ v &= H_1(\lambda_1), \quad K = \left[ \frac{\pi}{2(1 - \eta_0)} \right]^2 K_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Учитывая (3.1) и (3.11), уравнение количества движения в проекции на ось  $x$  преобразуется к виду

$$\varepsilon_1^2 H_1''' + H_1 H_1'' - (H_1')^2 = K_1$$

с граничными условиями

$$H_1 = 1, \quad H_1' = 0 \quad (\lambda_1 = 1/2\pi); \quad H_1 = 0 \quad (\lambda_1 = 0)$$

Применяя к этой задаче изложенный выше метод решения при  $\varepsilon_1^2$ , стремящемся к нулю, а также учитывая (3.11), получаем

$$p_2 = \frac{1}{\beta_1} \left[ \frac{\pi}{2(1 - \eta_0)} \right]^2 \left[ 1 + \frac{\pi A}{2(1 - \eta_0)} \varepsilon^2 + \dots \right] \quad (3.12)$$

Приравняв правые части в выражениях для  $p_2$  из (3.10) и (3.12), получаем уравнение для определения линии растекания

$$\frac{1}{(1 - \eta_0)^2} \left[ 1 + \frac{\pi A}{2(1 - \eta_0)} \varepsilon^2 + \dots \right] = \frac{1}{\rho_w} \left( \frac{\alpha_w}{\eta_0} \right)^2 \left( 1 + \frac{\pi A \mu_w}{2\eta_0 \alpha_w} \varepsilon^2 + \dots \right)$$

решение которого будем искать в виде

$$\eta_0 = a_0 + \varepsilon^2 a_2 + \dots$$

Подставляя этот ряд в исходное уравнение и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$\eta_0 = \frac{\alpha_w \rho_w^{-0.5}}{1 + \alpha_w \rho_w^{-0.5}} \left( 1 + \frac{\pi A}{4} \frac{\mu_w - \alpha_w^2 \rho_w^{-0.5}}{\alpha_w^2 \rho_w^{-0.5}} \varepsilon^2 + \dots \right) \quad (3.13)$$

Из (3.10) видно, что для определения теплового потока необходимо вычислить значение производной  $\Theta_0'$  на нижней стенке. Исходя из общего решения уравнения (3.3) с граничными условиями (3.4), нетрудно показать, что

$$\Theta_0'(0) = \frac{(1 - \theta_w) \exp[\varphi(\eta_0, 0)]}{\mu_w \Psi(\eta_0, 0) + \Psi(1, \eta_0)} \quad (3.14)$$

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{\sigma}{\varepsilon^2} \int_{\zeta}^z \rho_w \frac{d\eta}{\mu}, \quad \Psi(z, \zeta) = \int_{\zeta}^z \exp[-\varphi(\eta, \eta_0)] \frac{d\eta}{\mu}$$

Учитывая (3.1), (3.2) и (3.14), а также используя асимптотические выражения для  $H_0$  и  $H_1$  с учетом первых членов [1], формула (3.14) приводится к виду

$$\Theta_0'(0) = \frac{\pi(1 - \theta_w) \exp(-\chi_0)}{2[\eta_0 \Lambda_0 + \mu_w(1 - \eta_0) \Lambda_1]} \quad (3.15)$$

$$\chi_v = \sigma \varepsilon_v^{-2}, \quad \Lambda_v = \int_0^{1/\sigma} \exp[-\chi_v(1 - \cos z)] dz \quad (v = 0, 1)$$

Под интегралами стоят быстро убывающие функции при  $\varepsilon_0^2$ ,  $\varepsilon_1^2$  стремящиеся к нулю, поэтому, применяя приближенную формулу  $1 - \cos z = 1/2 z^2$  для всей области интегрирования, из (3.15) получаем

$$\Lambda_v = \left( \frac{\pi}{2\chi_v} \right)^{0.5} \operatorname{erf}(\tau_v), \quad \tau_v = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\chi_v}{2} \right)^{0.5} \quad (v = 0, 1)$$

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt \quad (3.16)$$

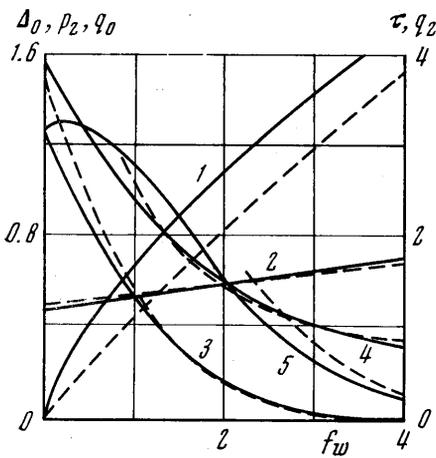
Предположим, что давление  $p_0$  слабо меняется поперек слоя, т. е.  $p_0 \equiv 1$ . Тогда, вычисляя  $\rho_w$  из уравнения состояния, формулы (3.2), (3.10), (3.11), (3.13), (3.15) и (3.16) будут полностью определять решение задачи, сформулированной в начале этого пункта.

Интересно отметить, что при  $\alpha_w = 0$  и  $\varepsilon \ll 1$  из (3.10), (3.15) и (3.16) с учетом первых членов разложений

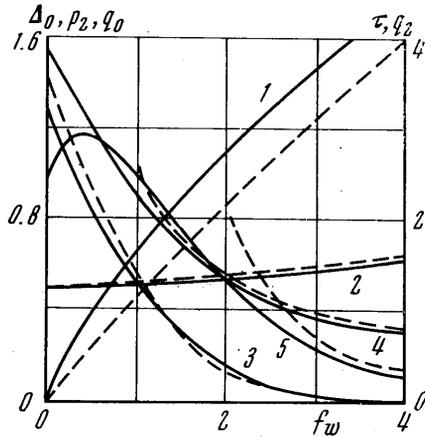
$$\varepsilon \Theta_0' = \mu_w^{-1} \sigma^{0.5} (1 - \theta_w), \quad p_2 = 1/4 \beta_1^{-1} \pi^2$$

**4. Численное решение уравнений Навье — Стокса.** Для решения системы уравнений (2.2) с граничными условиями (2.3) на ЭЦВМ использовался метод прогонки [8]. Коэффициент вязкости определялся степенной зависимостью от энтальпии с показателем 0.5. Задаваясь рядом значений  $K$ , интегрирование велось от  $\eta = 1$  до  $\tau_1 = 0$  с постоянным шагом 0.01. Вдув находился в процессе счета. Для всех расчетов принималась  $\beta_1 = 5$ ,  $\beta_2 = 17.5$ ,  $\gamma = 1.4$  и  $\sigma = 0.7$ . Численные расчеты были проведены для чисел Рейнольдса  $R = 50, 100, 250$  и  $\theta_w = 0.1, 0.2, 0.3$ .

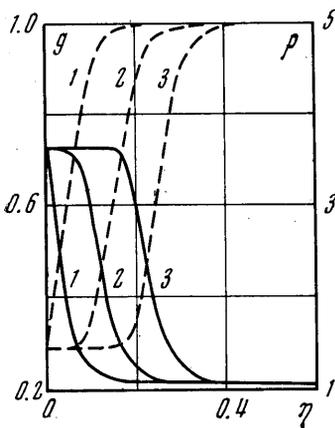
На фиг. 1, 2 сплошными линиями 1—5 представлены результаты численных расчетов  $\Delta_0 = \varepsilon^{-1}\eta_0$ ,  $p_2$ ,  $q_0 = \varepsilon\theta_0'(0)$ ,  $\tau = \varepsilon u'(0)$  и  $q_2 = \varepsilon\theta_2'(0)10^2$  соответственно в зависимости от параметра вдува  $f_w = \varepsilon^{-1}C_w$  для  $R = 100$  (фиг. 1),  $R = 250$  (фиг. 2) и  $\theta_w = 0.2$ . Пунктирные кривые соответствуют значениям перечисленных выше величин, подсчитанных по асимптотическим формулам (3.10), (3.13), (3.15) и (3.16) с учетом первых членов разложений. Из фиг. 1, 2 видно, что продольный градиент давления может быть определен из идеального течения практически для всех значений параметра вдува. Ошибка в определении из идеального течения положения



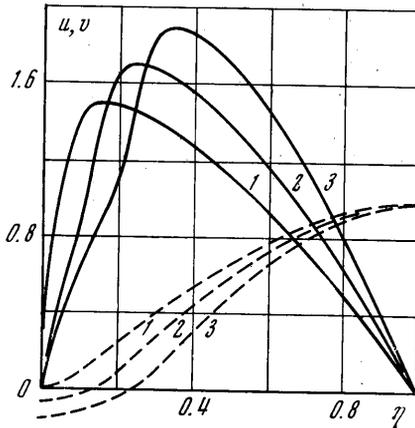
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

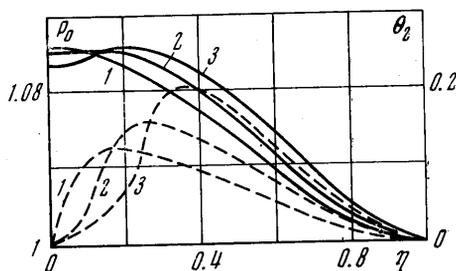
линии растекания порядка  $\varepsilon$ , т. е. порядка толщины пограничного слоя. Из фиг. 1 и фиг. 2 следует, что, так же как и в теории пограничного слоя [3], с увеличением вдува уменьшается влияние вязкого члена  $\varepsilon^2(\mu u')'$  в уравнении импульсов на напряжение трения и становится пренебрежимо мало при  $f_w \geq 1 \div 1.5$  для всех рассчитанных вариантов.

Там же видно, что основной вклад в тепловой поток вносит конвективный член в уравнении притока тепла. Роль остальных слагаемых пренебрежимо мала. Следует отметить также хорошее совпадение результатов расчета теплового потока по асимптотической формуле с численными для всех значений параметра вдува.

На фиг. 3—5 сплошными кривыми 1—3 представлены профили  $\rho$ ,  $u$  и  $p_2$ , пунктирными кривыми 1—3 — профили полной безразмерной энтальпии  $g = (h^* + \frac{1}{2}v^{*2}) / (h_e^* + \frac{1}{2}V_e^2)$ ,  $v$  и  $\theta_2$  поперек слоя для  $R = 250$ ,  $\theta_w = 0.3$  и  $f_w = 0.5, 3$  и  $6$  соответственно. Из фигур видно, что существует явно выраженная узкая зона резкого изменения функций  $\rho$ ,  $u$  и  $g$ , т. е. вырисовывается пограничный слой. Увеличение дав-

ления невелико (порядка 10%),  $\theta_2$  меняется незначительно и его вклад в уравнение притока тепла пренебрежимо мал.

С увеличением интенсивности вдува наблюдается отход пограничного слоя от стенки. Аналогичная картина «свободного» пограничного слоя наблюдается во всех



Фиг. 5

рассчитанных вариантах и соответствует характеру течения в ударном слое при большом вдуве с поверхности тела [4].

В заключение автор благодарит Г. А. Тирского за ценные советы и интерес к работе.

Поступило 13 XI 1970

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shrestha G. M., Terrill R. M. Laminar flow with large injection through parallel and uniformly porous Walls of different permeability. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1968, vol. 21, pt 4.
2. Филимонов В. Н. Асимптотическое решение уравнений несжимаемого пограничного слоя с отрицательным градиентом давления при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 5.
3. Гершбейн Э. А. Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
4. Гершбейн Э. А., Тирский Г. А. Течение вязкого теплопроводного многокомпонентного газа в ударном слое в окрестности притупления при интенсивных вдувах. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 1.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
6. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. М., Физматгиз, 1962.