УДК 532.5

# О ДИНАМИЧЕСКОМ ПРОВАЛЕ УРОВНЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ НАД СЛИВНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

**В. С. СИЗОНОВ**

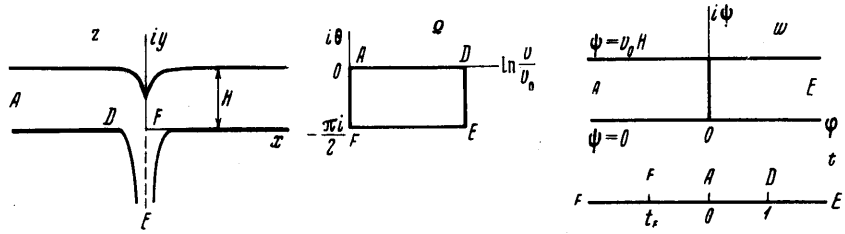
*(Ростов-на-Дону)*

Задача о динамическом провале уровня свободной поверхности жидкости конечной глубины, истекающей через отверстие в дне сосуда, рассмотрена как плоская задача теории струй идеальной жидкости.

Приведен график зависимости глубины динамического провала уровня свободной поверхности над сливным отверстием от относительной глубины жидкости в сосуде. Для коэффициента сжатия струи получено значение 0.96, практически не зависящее от глубины слоя жидкости.

Рассматривается истечение жидкости конечной глубины $H$ из сосуда, находящегося под избыточным давление $p_0$.

При этом предполагается, что весом столба жидкости можно пренебречь по сравнению с избыточным давлением газа, действующим на свободную поверхность, т. е. $\rho gH/p_0 \ll 1$, а жидкость является невязкой и несжимаемой.



Фиг. 1

Кроме того, движение жидкости предполагается плоским и установившимся.

Границы $DE$ (фиг. 1) истекающей из сосуда жидкости в плоскости $z$ будут свободными линиями тока, скорость на этих линиях тока $v_*$ связана со скоростью жидкости в сосуде (вдали от сливного отверстия) $v_0$ соотношением Бернулли

$$v_*/v_0 = (1+E)^{1/2}, \quad E = 2p_0/\rho v_0^2 \quad (E \text{ — число Эйлера})$$

Течению в плоскости $z = x + iy$ соответствует (фиг. 1) прямоугольник в плоскости $\Omega$ логарифмического годографа $\Omega = -\ln(v/v_0) + i\theta$, где $v$ — скорость жидкости в рассматриваемой точке, $\theta$ — угол наклона линии тока к оси $x$.

Конформное отображение прямоугольника $ADEF$ на верхнюю полуплоскость $t$ параметрического комплексного переменного $\operatorname{Im} t > 0$ осуществляется при помощи интеграла Шварца — Кристоффеля [1]

$$\Omega(t) = C_1 \int_{t_0}^{t_1} [t(t-1)(t-t_F)]^{-1/2} dt + C_2 \qquad (1)$$

Контур прямоугольника отображается на действительную ось $\operatorname{Im} t = 0$, положение трех вершин прямоугольника на оси $\operatorname{Im} t = 0$ может быть выбрано произвольно, значения комплексных постоянных $C_1$ и $C_2$ и положение четвертой вершины однозначно определяются выбором указанных трех точек. В данном случае принято

$$t_A = 0, \qquad t_D = 1, \qquad t_E \to \infty$$

положение четвертой вершины при этом находится из условия

$$t_F = 1 - \frac{\vartheta_3^4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_2^4(0\,|\,\tau)}$$

Нулевые значения тэта-функций Якоби $\vartheta_2(0|\tau)$ и $\vartheta_3(0|\tau)$ могут быть представлены быстро сходящимися рядами

$$\vartheta_2(0|\tau) = 2q^{1/4} + 2q^{9/4} + 2q^{25/4} + \ldots \qquad (q = e^{\pi i\tau})$$

$$\vartheta_3(0|\tau) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots \qquad (\tau = \pi i(1+E)^{-1})$$

Значения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$, где $\varphi$ — потенциал скорости, $\psi$ — функция тока, определяются с точностью до аддитивной постоянной; приняв $w_D = 0$, получим для рассматриваемого течения в плоскости $w$ бесконечную полосу (фиг. 1).

Ее отображение на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ осуществляется интегралом Шварца — Кристоффеля

$$w(t) = C_1 \ln t + C_2$$

Из условия $w_D = 0$ следует, что $C_2 = 0$.

На свободной линии тока $\operatorname{Im} dw = \operatorname{Im} C_1 t^{-1} dt = 0$; отсюда $\operatorname{Im} C_1 = 0$; с учетом $t_F < 0$ имеем

$$w_F = \varphi_F + i v_0 H = C_1 \ln |t_F| + C_1 \pi i$$

найдем

$$C_1 = v_0 H / \pi.$$

Таким образом

$$w(t) = \frac{v_0 H}{\pi} \ln t, \qquad dw = \frac{v_0 H}{\pi} \frac{dt}{t}$$

Из рассмотрения геометрии течения в плоскости $z = x + iy$ очевидно, что глубина динамического провала уровня

$$h = \int_A^F dy$$

а так как на свободной линии тока $d\psi = 0$, то

$$dy = \frac{\sin\theta}{v_0} d\varphi = \frac{\sin\theta}{v_0} dw$$

На линии тока $AF$ $\Omega = -i\theta$, и интеграл (1) может быть записан в виде

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \frac{F(\varkappa, \varphi)}{K_1(\varkappa)} \qquad \left(\varkappa^2 = \frac{1}{1 - t_F}\right)$$

где $F(\varkappa, \varphi)$ и $K_1(\varkappa)$ — соответственно неполный и полный нормальные эллиптические интегралы Лежандра первого рода с модулем $\varkappa^2$.

Величины $t$ и $\varphi$ связаны между собой соотношением

$$t = -\frac{\varkappa'^2 \sin^2\varphi}{1-\varkappa'^2\sin^2\varphi} \qquad (\varkappa' = (1-\varkappa^2)^{1/2})$$

где $\varkappa'$ — дополнительный модуль.

Полученные соотношения дополняются уравнением неразрывности, которое можно записать в виде

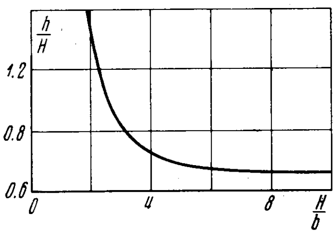
$$\varepsilon = \frac{H}{b(1+E)^{1/2}}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{b}\int\limits_D^E dx, \qquad dx = \frac{\cos\theta}{v_0(1+E)^{1/2}}\,dw$$

Здесь $b$ — полуширина сливного отверстия, $\varepsilon$ — коэффициент сжатия струи.

На фиг. 2 приведен график зависимости относительной глубины динамического провала уровня $h/H$ от относительной глубины жидкости в сосуде $H/b$, построенный по полученным формулам.

Как видно из фигуры, глубина динамического провала уровня свободной поверхности жидкости при больших значениях $H/b$ почти не зависит от глубины жидкости, асимптотически уменьшаясь до значения $2/\pi$ (см. ниже) и резко возрастая при уменьшении глубины жидкости. Провал уровня достигает дна сосуда на оси сливного отверстия при глубине жидкости, лишь немного превышающей ширину сливного отверстия.

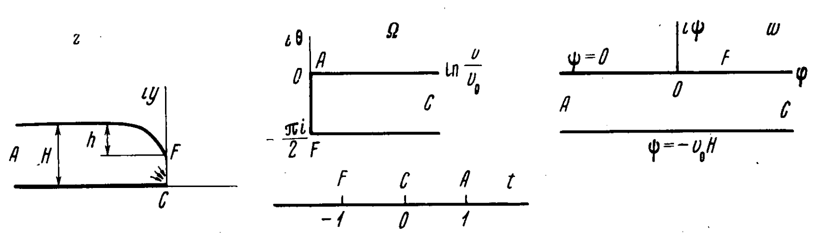



Фиг. 2

Несколько неожиданной явилась полученная при расчетах крайне слабая зависимость от глубины жидкости величины коэффициента сжатия $\varepsilon$. При изменении относительной глубины жидкости $H/b$ от 2 до 8 величина $\varepsilon$ изменилась от 0.9575 до 0.9581. Таким образом, коэффициент сжатия струи в этом случае примерно в полтора раза выше, чем в классическом случае истечения жидкости из бесконечно заполненного сосуда (0.611) и практически не зависит от глубины жидкости в сосуде.

При $H/b \to \infty$ сливное отверстие может быть заменено (фиг. 3) точечным стоком интенсивности $q = 2v_0H$ в точке $C$ плоскости $z$.

Прямоугольник в плоскости логарифмического годографа $\Omega$ вырождается при этом в полубесконечную полосу, отображение которой при помощи интеграла Шварца — Кристоффеля на верхнюю полуплоскость




Фиг. 3

$\operatorname{Im} t > 0$ при выбранном соответствии точек $t_C = 0$, $t_A = 1$ и $t_F = -1$ дает соотношение

$$\Omega(t) = -i/2 \arccos t^{-1}$$

В плоскости комплексного потенциала рассматриваемому течению соответствует бесконечная полоса, отображение которой на полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ может быть осуществлено при помощи интеграла Шварца — Кристоффеля. Удобнее, однако, найти $w(t)$ непосредственно, воспользовавшись соответствием особенностей и разместив в точке $A$ плоскости $t$ источник, а в точке $C$ — сток производительностью $2q = 2v_0H$. Для полученного фиктивного течения в плоскости $t$

$$w(t) = \frac{v_0 H}{\pi} \ln \frac{t-1}{t}, \qquad dw = \frac{v_0 H}{\pi} \frac{dt}{t(t-1)}.$$

На свободной поверхности жидкости

$$\theta = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{t}, \quad \text{или} \quad t = \frac{1}{\cos 2\theta}, \qquad dt = 2 \frac{\sin 2\theta}{\cos^2 2\theta} d\theta$$

Относительная глубина динамического провала уровня в этом случае равна

$$\lim_{H/b \to \infty} \frac{h}{H} = \frac{1}{H} \int_A^F dy = -\int_A^F \frac{\sin\theta}{v_0} dw = \frac{2}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{0} \cos\theta \, d\theta = \frac{2}{\pi}$$

Этот результат соответствует горизонтальной асимптоте полученной выше зависимости величины $h/H$ от относительной глубины слоя жидкости в сосуде $H/b$.

В заключение отметим, что полученные результаты справедливы и для случая расположения сливного отверстия у вертикальной стенки, что непосредственно следует из свойства симметричности рассмотренной задачи.

Поступило 28 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. М., Изд-во иностр. лит., 1963.