№ 6 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1971

УДК 532.5 : 629.19

О ПОТЕНЦИАЛАХ ЖУКОВСКОГО ДЛЯ ПОЛОСТЕЙ С ПЕРЕГОРОДКАМИ

Л. В. ДОКУЧАЕВ

(*Москва*)

Получены точные решения краевых задач о движении идеальной несжимаемой жидкости, целиком заполняющей сферическую и цилиндрическую полость с произвольным числом сплошных радиальных перегородок. Приводятся численные значения безразмерных моментов инерции эквивалентного тела для разного числа перегородок.

Устойчивость вращательного движения тела с полостью, наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, была подробно изучена в работах Н. Г. Четаева и В. В. Румянцева [1, 2]. В первой предполагается потенциальность течения жидкости и рассмотрен случай цилиндрической полости. В аналогичной постановке в работе [3] проведены исследования для случая конических полостей. При этом основной трудностью является определение моментов инерции эквивалентного тела, чему посвящена фундаментальная работа Н. Е. Жуковского [4]. Для полостей сложной формы применяются численные методы, разработанные, например, в [5, 6].

Ниже получены точные значения потенциалов Жуковского для сферической полости, разделенной на произвольное число отсеков сплошными перегородками, проходящими через одну ось. Значения моментов инерции эквивалентного тела в случае одной диаметральной перегородки совпадают с результатами, полученными Н. Е. Жуковским другим способом [4]. Кроме того, даются значения моментов инерции эквивалентного тела для случая произвольного числа перегородок в цилиндрической полости.

При рассмотрении потенциального движения идеальной несжимаемой жидкости в сфере с радиальными перегородками во внутренней неоднородной задаче Неймана отделим круговую координату, как это делалось в [6]. Тогда потенциалы Жуковского будут определяться функциями Φ_m и F_m, которые должны удовлетворять краевым задачам, имеющим в сферической системе координат следующий вид:

$$\Delta'\Phi_m - \frac{m^2}{R^2\sin^2\theta}\Phi_m = 1, \qquad \left.\frac{\partial\Phi_m}{\partial R}\right|_{R=1} = 0$$

$$\Delta' F_m - \frac{m^2}{R^2\sin^2\theta}F_m = (m^2-1)\operatorname{ctg}\theta, \qquad \left.\frac{\partial F_m}{\partial R}\right|_{R=1} = 0 \tag{1}$$

$$\Delta' = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

Здесь предполагается, что начало системы координат помещено в центре единичной сферы, ось Ox_1 проходит по линии пересечения радиальных перегородок, ось Ox_2 расположена в биссекториальной плоскости отсека, образованного двумя перегородками.

Решения краевых задач (1) можно представить в виде рядов по присоединенным полиномам Лежандра

$$\Phi_m(R,\theta) = \frac{1}{4-m^2}\left[R^2\sin^2\theta - \sum_{n=m}^{\infty}\frac{2C_{nm}}{nN_{nm}^2}R^nP_n^m(\cos\theta)\right] \tag{2}$$

$$F_m(R,\theta) = -R^2 \sin\theta\cos\theta + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2D_{nm}}{nN_{nm}^2} R^n P_n^m(\cos\theta)$$

Коэффициенты рядов определяются квадратурами от сферических полиномов

$$C_{nm} = \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)\sin^3\theta\, d\theta, \qquad D_{nm} = \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)\sin^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$N_{nm}^2 = \int_0^\pi [P_n^m(\cos\theta)]^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!} \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда сфера разделена на k одинаковых отсеков. Обозначим через J_1 суммарный момент инерции эквивалентного тела относительно оси, проходящей через линию пересечения перегородок. В случае $k > 2$ суммарные моменты инерции относительно поперечных осей J_2 и J_3 становятся равными. Подставляя в общие формулы для моментов инерции [6] выражения (2), получаем следующие значения моментов инерции эквивалентного тела с единичной плотностью

$$J_1 = \frac{4k}{15}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{k} - \frac{8k^2}{\pi}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\alpha_{nm}}{\rho_n} \tag{4}$$

$$J_2 = J_3 = -\frac{4k^2}{\pi}\left[\cos^2\frac{\pi}{k}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\gamma_{nm}}{\rho_n} + \sin^2\frac{\pi}{k}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\delta_{nm}}{\rho_n}\right]$$

Здесь приняты обозначения и использовались тождества [6], вытекающие из свойств тригонометрических и сферических функций

$$\alpha_{nm} = \frac{A_{nm}^2}{N_{nm}^2}, \quad \gamma_{nm} = \frac{B_{nm}^2}{N_{nm}^2}, \quad m = \frac{k}{2}(2s+1)$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{m^2-4} = \frac{\pi}{4k}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{k}, \quad \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{1-m^2} = -\frac{\pi}{2k}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{k}, \quad m = \frac{k}{2}(2s+1)$$

$$\delta_{nm} = \frac{B_{nm}^2}{\sigma_0 N_{nm}^2}, \quad \sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(1-m^2)\sigma_0} = \frac{\pi}{2k}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{k}, \quad m = ks \tag{5}$$

$$A_{nm} = \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta, \quad B_{nm} = \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$$\rho_n = n(n-2)(n+3)^2, \qquad \sigma_0 = \begin{cases} 1, & m \neq 0 \\ 2, & m = 0 \end{cases}$$

При одной диаметральной перегородке ($k = 2$) приходим к случаю, рассмотренному Н. Е. Жуковским, который использовал другие разложения потенциалов скоростей [4]. В этом случае момент инерции относительно оси, перпендикулярной диаметральной перегородке, равен нулю ($J_2 = 0$), а моменты инерции относительно осей, лежащих в плоскости перегородки, становятся равными ($J_1 = J_3$).

При числе перегородок, равном $k = 4$, в выражении (4) для момента инерции J_1 появляются особенности, которые устранимы, так как предел первых двух слагаемых конечен

$$\lim\left[\frac{4k}{15}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{k}-\frac{8k^2}{\pi}\left(\frac{\alpha_{mm}}{\rho_m}\right)_{m=k/2}\right]=\frac{64}{15\pi} \tag{6}$$

Вращение круговой цилиндрической полости с плоскими днищами и k радиальными перегородками относительно продольной оси было рассмотрено Н. Е. Жуковским [4]. Н. Г. Четаев получил выражения моментов инерции для случая вращения относительно поперечной оси цилиндрической полости с одной ($k=2$) и с двумя крестообразно расположенными ($k=4$) диаметральными перегородками [1].

Выражения функций, аналогичных потенциалам Жуковского, для более общего случая соосных цилиндров с произвольным числом перегородок можно найти, например, в работе [6].

В ней обращено внимание на то, что разложение функции r в ряд по бесселевым функциям на круговом секторе единичного радиуса определяется с точностью до постоянной

$$r=a_m+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{E_{pm}}{N_{pm}^{\ 2}}Y_{pm}(r) \tag{7}$$

Здесь с учетом (5) введены обозначения

$$E_{pm}=\int_0^1 r^2Y_{pm}(r)\,dr,\qquad Y_{pm}(r)=\frac{J_m(\xi_{pm}r)}{J_m(\xi_{pm})},$$
$$N_{pm}^{\ 2}=\frac{\xi_{pm}^{\ 2}-m^2}{2\xi_{pm}^{\ 2}},\qquad a_m=\frac{2}{3}(\sigma_0-1) \tag{8}$$

а ξ_{pm} — p-й корень уравнения $J_m'(\xi)=0$.

В случае единичного кругового цилиндра, длина образующей которого $2h$, функция F_m в цилиндрической системе координат x, r, η после отделения круговой координаты должна удовлетворять краевой задаче

$$\Delta' F_m-\frac{m^2}{r^2}F_m=(m^2-1)\frac{x}{r},\qquad \left.\frac{\partial F_m}{\partial x}\right|_{x=\pm h}=r,\qquad \left.\frac{\partial F_m}{\partial r}\right|_{r=1}=-x$$

С учетом формул (7), (8) решение этой задачи для любого числа перегородок ($k>2$) можно представить в виде

$$F_m(x,r)=(2a_m-r)x+2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{E_{pm}}{N_{pm}^{\ 2}\xi_{pm}}\frac{\operatorname{sh}(\xi_{pm}x)}{\operatorname{ch}(\xi_{pm}h)}Y_{pm}(r) \tag{9}$$

Выражение для момента инерции эквивалентного тела относительно поперечной оси в случае цилиндрической полости с k радиальными перегородками при единичной плотности записывается следующим образом:

$$J_2=J_3=2\pi h\left(h^2/3-\frac{3}{4}+2r_c^{\ 2}\right)+ \tag{10}$$
$$+\frac{16k^2}{\pi}\left[\cos^2\frac{\pi}{k}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\beta_{pm}\operatorname{th}(\xi_{pm}h)+\sin^2\frac{2\pi}{k}\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{p=1}\varepsilon_{pm}\operatorname{th}(\xi_{pm}h)\right]$$

Здесь приняты обозначения

$$\beta_{pm}=\frac{E_{pm}^{\ 2}}{(1-m^2)^2N_{pm}^{\ 2}\xi_{pm}},\qquad m=\frac{k}{2}(2s+1)$$
$$\varepsilon_{pm}=\frac{E_{pm}^{\ 2}}{(1-m^2)^2\sigma_0N_{pm}^{\ 2}\xi_{pm}},\qquad m=ks,\quad r_c=\frac{2k}{3\pi}\sin\frac{\pi}{k}$$

а величина r_c представляет собой расстояние от продольной оси цилиндра до центра площади кругового сектора. В работе [1] величина r_c потеряна.

<table>
<tr><th rowspan="2">k</th><th colspan="3">Сфера</th><th colspan="3">Цилиндр ($h = 0{,}6$)</th></tr>
<tr><th>J_1</th><th>J_2</th><th>J_3</th><th>J_1</th><th>J_2</th><th>J_3</th></tr>
<tr><td>2</td><td>0.60</td><td>0</td><td>0.60</td><td>0.62</td><td>0.24</td><td>0.61</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0.78</td><td colspan="2">0.60</td><td>0.79</td><td colspan="2">0.61</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0.86</td><td colspan="2">0.70</td><td>0.86</td><td colspan="2">0.70</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0.90</td><td colspan="2">0.75</td><td>0.91</td><td colspan="2">0.75</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0.93</td><td colspan="2">0.77</td><td>0.93</td><td colspan="2">0.77</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0.95</td><td colspan="2">0.79</td><td>0.95</td><td colspan="2">0.78</td></tr>
<tr><td>16</td><td>0.97</td><td colspan="2">0.80</td><td>0.97</td><td colspan="2">0.80</td></tr>
<tr><td>32</td><td>0.99</td><td colspan="2">0.82</td><td>0.99</td><td colspan="2">0.82</td></tr>
<tr><td>∞</td><td>1.00</td><td colspan="2">0.82</td><td>1.00</td><td colspan="2">0.82</td></tr>
</table>

В следующей ниже таблице приведены численные значения моментов инерции для сферы и для цилиндра, отнесенные к моментам инерции затвердевшей жидкости.

Поступило 19 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
2. Румянцев В. В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6.
3. Докучаев Л. В. Относительно устойчивости движения тела с идеальной жидкостью, заполняющей коническую полость. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
4. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. 2, М.— Л., Гостехиздат, 1948.
5. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
6. Фещенко С. Ф., Луковский И. А., Рабинович Б. И., Докучаев Л. В. Методы определения присоединенных масс жидкости в подвижных полостях. Киев, «Наукова Думка», 1969.