

УДК 536.24.01 : 532.526

ВЛИЯНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ НАБЕГАЮЩЕГО ПОТОКА НА ТЕПЛОБМЕН В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРЕДНЕЙ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

А. А. ФРОЛОВ

(Москва)

Рассматривается температурный пограничный слой несжимаемой жидкости в окрестности точки торможения. Все параметры течения, кроме температуры набегающего потока, полагаются стационарными. Для сопряжения решений в пограничном слое и в идеальной жидкости строится специальная асимптотика. При малых числах Струхала исследование проводится методом Мура [1]. Случай произвольного изменения температуры набегающего потока рассмотрен с помощью частотного анализа.

1. Уравнение температурного пограничного слоя в окрестности передней критической точки имеет вид

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + f \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

$$f(\xi) = -\frac{v(y)}{\sqrt{U_e v}}, \quad \xi = y \left(\frac{U_e}{v} \right)^{1/2}, \quad \tau = \frac{t}{U_e} \quad (1.1)$$

$$U_e = \frac{\partial u_e}{\partial x}, \quad \theta = \frac{T}{T_w} - 1, \quad P = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad \theta(0, \tau) = 0$$

Здесь $f(\xi)$ — стационарная функция, известная из решения уравнений динамического пограничного слоя. Для выбора граничного условия на внешней границе необходимо предварительно исследовать решение для идеальной жидкости. При достаточно больших ξ в уравнении (1.1) можно пренебречь членом, задающим влияние теплопроводности, при этом $f(\xi) = \xi - \gamma$, где γ — толщина вытеснения. Тогда уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = (\xi - \gamma) \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$$

а его общее решение имеет вид

$$\theta(\xi, \tau) = \theta_0 \left(\tau + \ln \frac{\xi - \gamma}{\xi_0 - \gamma} \right), \quad \theta_0 = \theta(\xi_0, \tau) \quad (1.2)$$

Формула (1.2) задает возмущение, распространяющееся со скоростью идеального внешнего потока от точки $\xi = \xi_0$ по направлению к поверхности тела. Однако видно, что это возмущение никогда ее не достигнет, так как при $\xi - \gamma \rightarrow 0$ время $\tau \rightarrow \infty$. В реальном случае возмущение температуры передается к стенке теплопроводностью.

Можно оценить, до каких значений ξ изменение температуры в уравнении (1.1) определяется в основном конвективными членами. По формуле (1.2)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \theta_0 \cdot \left(\tau + \ln \frac{\xi - \gamma}{\xi_0 - \gamma} \right) \frac{1}{U_e^2 (\xi - \gamma)^2} - \theta_0 \cdot \left(\tau + \ln \frac{\xi - \gamma}{\xi_0 - \gamma} \right) \frac{1}{U_e (\xi - \gamma)^2}$$

где точкой обозначено дифференцирование по t . Тогда

$$\frac{1}{P} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \left(f \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^{-1} = \left(\frac{\theta_0''}{\theta_0' U_e} - 1 \right) \frac{1}{P(\xi - \gamma)^2}$$

Если число Струхали, определенное в данном случае как $Sh = \theta_0'' (\theta_0' U_e)^{-1}$, мало или имеет порядок единицы, то относительное влияние теплопроводности имеет порядок ϵ при $y/L \geq (\epsilon PR)^{-1/2}$ ($R = U_e L^2 / \nu$, L — характерный размер тела). Если $Sh > 1$, то оно будет иметь порядок ϵ при $y/L \geq (Sh)^{1/2} (\epsilon PR)^{-1/2}$. При $R \gg 1$ область, в которой влияние теплопроводности относительно мало, хотя и расположена далеко вне пограничного слоя, однако распространяется вплоть до малых значений y/L , при которых можно пренебречь следующими членами в разложении $v(y)$ по степеням y . Ограничиваясь такими значениями y , уравнение (1.1) можно применять не только для пограничного слоя, но и для идеальной жидкости.

При уменьшении ξ логарифмическая особенность, определяемая формулой (1.2) будет сглаживаться из-за влияния теплопроводности, однако температура вблизи внешней границы пограничного слоя будет оставаться быстро меняющейся функцией. Поэтому в качестве условия на внешней границе обычное требование асимптотического стремления температуры к константе необходимо заменить требованием стремления температуры к функции, задающей решение в идеальной жидкости. При этом решение будет зависеть от выбора точки ξ_0 , в которой задается изменение температуры набегающего потока. Чтобы исключить эту зависимость, предлагается решение для идеальной жидкости экстраполировать вплоть до значения $\xi_0 = 1 + \gamma$ и полученную величину

$$T_e = T_0 [\tau - \ln(\xi_0 - \gamma)]$$

принять за характерную температуру набегающего потока. Тогда температура в идеальной жидкости будет определяться формулой

$$T = T_e [\tau + \ln(\xi - \gamma)] \quad (1.3)$$

которая справедлива только при $\xi \gg 1$, а при $\xi \approx 1 + \gamma$ задает экстраполяцию в область, где влияние теплопроводности уже существенно.

В данной работе стремление температуры к функции (1.3) при $\xi \rightarrow \infty$ рассматривается как условие на внешней границе при решении уравнения (1.1).

2. При малых числах Струхали решение уравнения (1.1) строится разложением в ряд по степеням оператора $(U_e^{-1} \partial / \partial t)$ [1]

$$\theta(\xi, t) = \left(\frac{T_e(t)}{T_w} - 1 \right) \theta_0(\xi) + \frac{1}{T_w} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_e^{(n)}(t)}{U_e^n} \theta_n(\xi) \quad (2.1)$$

где первый член ряда задает квазистационарное приближение.

Подставляя (2.1) в уравнение (1.1) и приравнивая члены при соответствующих производных, для функций θ_n можно получить

$$P^{-1} \theta_0'' + f \theta_0' = 0, \quad P^{-1} \theta_n'' + f \theta_n' = \theta_{n-1} \quad (n \geq 1),$$

$$\theta_n(0) = 0 \quad (2.2)$$

(штрих обозначает дифференцирование по ξ).

При больших ξ зависимость (2.1) должна перейти в решение для идеальной жидкости, задаваемое формулой (1.3). Для малых чисел Струхали эта формула преобразуется к виду

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_e^{(n)}(t)}{U_e^n n!} [\ln(\xi - \gamma)]^n$$

Отсюда следует, что при больших ξ для функций $\theta_n(\xi)$ должны асимптотически выполняться следующие соотношения:

$$\theta_n(\xi) = \frac{1}{n!} [\ln(\xi - \gamma)]^n$$

В частности, при $\xi = \xi_0 \gg 1$

$$\theta_n(\xi) = \frac{1}{n!} [\ln(\xi_0 - \gamma)]^n \quad (2.3)$$

Формула (2.3) рассматривалась как граничное условие при численном решении системы (2.2). При этом согласно проведенной ранее оценке зависимость решения от выбора ξ_0 имела порядок $(\xi_0 - \gamma)^{-2}$.

Тепловой поток к стенке при $Sh \ll 1$ задается выражением

P	$\theta_0'(0)$	$\theta_1'(0)$	$[\theta_2'(0)]$	τ_1	τ_2
1	0.570	-0.20	0.21	1.01	1.74
0.5	0.433	0.05	0.13	1.43	1.21
2	0.744	-0.66	0.58	0.63	2.41

$$q_w = q_{w0}(t) \times \left[1 + \frac{1}{\sigma T_e} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \frac{T_e^{(n)}(t)}{U_e^n} \right]$$

$$\sigma = 1 - \frac{T_w}{T_e}, \quad \alpha_n = \frac{\theta_n'(0)}{\theta_0'(0)}$$

В таблице приведены значения $\theta_n'(0)$ при $\xi_0 = 12.5$ для плоскопараллельного течения.

3. Случай произвольного изменения температуры набегающего потока может быть с помощью преобразования Фурье сведен к случаю периодического ее изменения. Для одной гармоники можно положить $\theta(\xi, \tau) = \theta(\xi, \omega) e^{i\omega\tau}$, где $\theta(\xi, \omega)$ удовлетворяет уравнению

$$i\omega\theta = P^{-1}\theta'' + f\theta, \quad \theta(0) = 0 \quad (3.1)$$

Если принять амплитуду колебаний безразмерной температуры набегающего потока равной единице, то при $\xi \gg 1$ по формуле (1.3) имеем

$$\theta(\xi, \omega) = e^{i\omega \ln(\xi - \gamma)}$$

В частности, при $\xi = \xi_0$

$$\theta = e^{i\omega \ln(\xi_0 - \gamma)} \quad (3.2)$$

Соотношение (3.2) рассматривалось как второе граничное условие при решении (3.1).

Тепловой поток к стенке задается величиной

$$\theta'(0, \omega) = A(\omega) e^{i\phi(\omega)}$$

Здесь $A = |\theta'(0, \omega)|$, а ϕ определяет фазу теплового потока.

На фиг. 1 и фиг. 2 нанесены значения $A(\omega)$ и $\phi(\omega)$, полученные в результате численного решения (3.1) при $\xi_0 = 12.5$ для плоскопараллельного течения.

Кроме того, уравнение (3.1) было исследовано аналитически при малых и больших ω . Для $\omega \ll 1$ решение задается формулой (2.1) при

$$T_e = T_w(1 + e^{i\omega\tau})$$

Тогда, ограничиваясь квадратичным по ω приближением, получим

$$\theta'(0, \omega) = \theta_0'(0) + i\omega\theta_1'(0) - \omega^2\theta_2'(0)$$

$$A = \theta_0'(0) - \omega^2 \left\{ \theta_2'(0) - \frac{1}{2} \frac{[\theta_1'(0)]^2}{\theta_0'(0)} \right\}, \quad \phi = \omega \frac{\theta_1'(0)}{\theta_0'(0)} \quad (3.3)$$

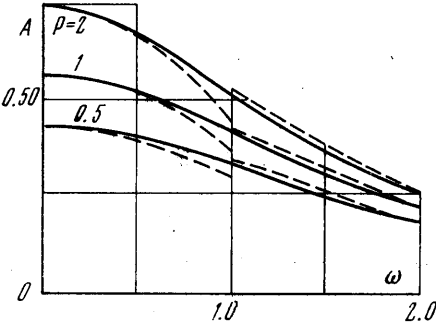
При $\omega \gg 1$ решение уравнения (3.1) удобно искать в виде

$$\theta = \exp \left(\int \mu d\xi \right)$$

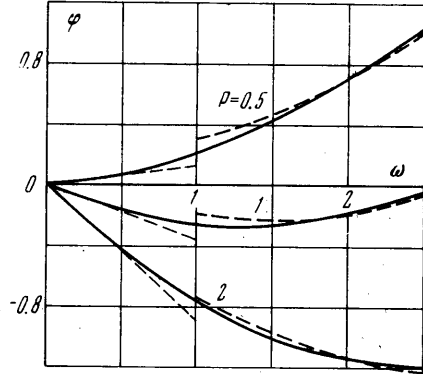
Здесь функция $\mu(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$P^{-1}(\mu^2 + \mu') + f\mu - i\omega = 0 \tag{3.4}$$

Такая замена учитывает, что при большой частоте $\theta(\xi)$ — осциллирующая функция с малой длиной волны и члены в (3.1), содержащие производные по ξ , будут иметь порядок члена, содержащего ω множителем. В то же время относительно



Фиг. 1



Фиг. 2

функции $\mu(\xi)$ можно предположить, что производные от нее будут иметь порядок самой функции. Тогда уравнение (3.4) допускает следующее асимптотическое разложение при $\omega \gg 1$:

$$\mu = \sqrt{P\omega} \mu_0 + \mu_1 + \dots \tag{3.5}$$

где μ_0 и μ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\mu_0^2 + \frac{2\mu_0}{B} - i\omega = 0, \quad B = \frac{2\sqrt{\omega}}{f(\xi)\sqrt{P}}$$

Отсюда

$$2(\mu_0 + 1/B)\mu_1 = -\mu_0'$$

$$\mu_0 = \frac{\pm \sqrt{1 + iB^2} - 1}{B}, \quad \mu_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 + iB^2} - 1}{2} \frac{f'}{f}$$

Вблизи от стенки $B \rightarrow \infty$, в идеальном газе $B \rightarrow 0$. Знак минус (корень μ_i) соответствует решению [2] при $\xi \ll 1$, при увеличении ξ $\mu_i \rightarrow -\infty$. Знак плюс (корень μ_e) соответствует непрерывному переходу от решения в пограничном слое к решению в идеальной жидкости. При больших ξ имеем $\mu_e = i\omega / (\xi - \gamma)$ и

$$\theta \sim e^{i\omega \ln(\xi - \gamma)}$$

что согласуется с формулой (3.2), определяющей решение в идеальном потоке. При больших ω решение (3.1) с граничным условием (3.2) имеет вид

$$\theta = e^{i\omega \ln(\xi_0 - \gamma)} \left(\exp \left(\int_{\xi_0}^{\xi} \mu_e d\xi \right) - \exp \left(\int_{\xi_0}^0 \mu_e d\xi \right) \exp \left(\int_0^{\xi} \mu_i d\xi \right) \right)$$

Тогда

$$\theta(\xi, \omega) = \exp \left[i\omega \ln(\xi_0 - \gamma) + \int_{\xi_0}^{\xi} \mu_e d\xi \right] \quad (\xi \gg 1)$$

$$A = 2 \sqrt{P\omega} \exp \left(- \int_0^{\xi_0} \operatorname{Re} \mu_e d\xi \right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + i\omega \ln(\xi_0 - \gamma) - \int_0^{\xi_0} \operatorname{Im} \mu_e d\xi$$

Ограничиваясь первым членом в разложении (3.5), можно получить

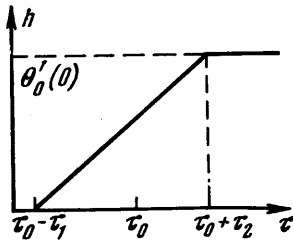
$$\theta(\xi, \omega) = \exp \left\{ \omega \left[i \ln(\xi - \gamma) - \frac{1}{2P} \frac{\omega}{(\xi - \gamma)^2} \right] \right\}, \quad \xi - \gamma > \sqrt{\omega} \quad (3.6)$$

$$A = c_1 \sqrt{\omega} \exp \left\{ -\omega \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \gamma \sqrt{\frac{P}{\omega}} \right) \right\} \quad (3.7)$$

$$\varphi = c_2 + \omega \ln \left(4 \sqrt{\frac{\omega}{P}} \right) - \frac{1}{2} \omega - \sqrt{\frac{P\omega}{2}} \gamma \quad (3.8)$$

Формула (3.6) показывает, что изменение амплитуды колебаний температуры набегающего потока из-за влияния теплопроводности становится значительным при $\xi \approx \omega$, в то же время влияние теплопроводности на фазу становится существенным только при $\xi \approx \sqrt{\omega}$.

Для определения коэффициентов c_1 и c_2 в формулах (3.7) и (3.8) необходимо рассмотреть следующие члены в разложении (3.4). Если стыковать формулы (3.7) и (3.8) при $\omega = 2$ с численным решением, то



Фиг. 3

$$A = 1.53 \sqrt{P\omega} e^{-0.78\omega - 0.46\sqrt{P\omega}}$$

$$\varphi = 0.78 + \frac{1}{2} \omega \ln \omega / P - \frac{1}{2} \omega - 0.46 \sqrt{P\omega}$$

$$(\gamma = 0.65).$$

На фиг. 1 и фиг. 2 пунктиром нанесены значения A и φ , задаваемые асимптотическими формулами при малых и больших ω .

4. В качестве примера применения частотного анализа приближенно рассмотрен случай скачкообразного изменения температуры набегающего потока.

Пусть $\theta'(0, \tau) = h(\tau)$ задает величину теплового потока к стенке при следующих граничных и начальных условиях:

$$\theta(\xi, 0) = 0, \quad \theta(\xi_0, \tau) = 1, \quad \theta(0, \tau) = 0$$

Тогда [3]

$$\theta'(0, \omega) = e^{i\omega \ln(\xi_0 - \gamma)} \int_{-\infty}^{\infty} h'(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$h'(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \theta'(0, \omega) e^{i\omega[\tau - \ln(\xi_0 - \gamma)]} d\omega$$

Если ограничиться определением характерного времени установления в пограничном слое, то истинную зависимость $h(\tau)$ можно аппроксимировать линейной (фиг. 3), где $\tau_0 = \ln(\xi_0 - \gamma)$, τ_1 и τ_2 задают начало и конец переходного процесса. Тогда

$$\theta'(0, \omega) = \frac{\theta_0'(0)}{\tau_1 + \tau_2} \frac{e^{i\omega\tau_1} - e^{-i\omega\tau_2}}{i\omega}$$

При малых ω имеем

$$\theta'(0, \omega) = \theta_0'(0) \left[1 + \frac{i\omega}{2}(\tau_1 - \tau_2) - \frac{\omega^2}{6}(\tau_1^2 - \tau_1\tau_2 + \tau_2^2) \right]$$

Сравнивая с (3.3), получим

$$\frac{1}{2}(\tau_1 - \tau_2) = \frac{\theta_1'(0)}{\theta_0'(0)}, \quad \frac{1}{6}(\tau_1^2 - \tau_1\tau_2 + \tau_2^2) = \frac{\theta_2'(0)}{\theta_0'(0)} \quad (4.1)$$

Значения τ_1 и τ_2 , найденные из решения системы (4.1), приведены в таблице.

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 4 II 1971

1. Moore F. K. Unsteady laminar boundary layer — flow. NACA TN, No. 2471, 1951.
2. Lighthill M. I. The response of laminar skin friction and heat transfer to fluctuations in the stream velocity. Proc. Roy. Soc. London A, 1954, vol. 224, No. 1156, pp. 1—23.
3. Бейтман Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований, т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М., «Наука», 1965.