

УДК 533.6.011

НЕВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ТУПОГО ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ ВДОЛЬ ОСИ

В. В. ЛУНЕВ

(Москва)

В рамках гиперзвуковой теории тонкого ударного слоя для окрестности критической точки тупого тела [1] показано, что в переменных А. А. Дородницына толщина ударного слоя, профили скоростей и продольный градиент давления не зависят от профилей плотности вдоль оси, переменность которых вызвана неравновесностью, излучением и т. д. и остаются теми же, что и для адиабатических течений совершенного или равновесно-диссоциированного газа с почти постоянной плотностью (см. также [2, 3]).

Ниже использованы обозначения: ρ_∞ , V — плотность и скорость набегающего потока; $\rho_\infty V^2 p$, $\rho_\infty \rho$ — давление и плотность; x , y — криволинейная система координат вдоль и по нормали к телу с началом в критической точке; uV , vV — составляющие скорости по этим осям; $K = R^{-1}$, $K_s = R_s^{-1}$ — кривизны тела и ударной волны, а δ — толщина ударного слоя на оси; r — расстояние до оси симметрии. Степени $\nu = 0$ и $\nu = 1$ относятся соответственно к плоским и осесимметричным течениям. Индекс δ относится к величинам на ударной волне. Малый параметр k — отношение плотностей до и сразу после прямой ударной волны.

1. Система уравнений, описывающих течение в тонком сжатом слое на гладком теле, в криволинейной системе координат имеет следующую предельную форму:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.1)$$

$$\frac{u^2}{R} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho u r^\nu}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r^\nu}{\partial y} = 0$$

В этой системе опущены члены порядка δ/R , обусловленные криволинейностью системы координат. Это отношение мало вместе с отношением k плотностей до и сразу после ударной волны, однако член того же порядка оставлен в правой части первого уравнения (1.1); в противном случае из этого уравнения получим ньютоновское течение с постоянной скоростью вдоль линий тока и с нулевой скоростью, в частности, на поверхности тела, в то время как действительный порядок скорости на теле $u \sim k^{1/2}$. Это будет ясно также из полученного ниже решения.

Для гладких тел в пределе, при $\delta K \ll 1$ форма ударной волны стремится к форме тела, поэтому ниже примем $R \approx R_s$. В этих допущениях рассматриваемая задача становится асимптотически (при $k \rightarrow 0$) параболической, и появляется возможность локального замкнутого решения в окрестности критической точки.

¹ Результаты приближенного анализа течения в окрестности критической точки произвольного тела приведены в работе [2], где показано, что отношение отхода ударной волны к радиусу ее кривизны практически не зависит от формы тела. Подтверждение этому дано также в работе [3].

Будем искать решение в окрестности оси разложением его по степеням xK с учетом лишь первых членов

$$\begin{aligned} v &= -v_0(y) + \dots, & u &= Kxu_1(y) + \dots, & r &= x + \dots \\ p &= p_0(y) - K^2x^2\beta(y) + \dots, & k\rho &= \rho_0(y) + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Граничные условия на теле и ударной волне примут вид

$$\begin{aligned} y &= 0, & v_0 &= 0 \\ y &= \delta, & u &\approx Kx, & p &\approx (1-k)(1-K^2x^2), & v &= -k, & \rho_0 &= 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

В этих формулах опущены члены порядка k и δK .

2. Перейдем к переменным

$$\eta = K \int_0^y \rho_0 dy, \quad f = \rho_0 v_0, \quad y = R \int_0^\eta \frac{d\eta}{\rho_0} \quad (2.1)$$

Тогда из уравнения неразрывности (1.1), приравнявая члены при первых степенях xK , получим

$$(1+v)u_1 = \frac{R}{\rho_0} \frac{d\rho_0 v_0}{dy} = \frac{df}{d\eta} = f'(\eta) \quad (2.2)$$

Граничные условия в новых переменных примут вид

$$\begin{aligned} \eta &= 0, & f &= 0 \\ \eta &= \eta_0 = \eta(\delta), & f &= k, & f' &= (1+v), & \beta &= 1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Первые уравнения (1.1) приводятся к виду

$$f'^2 - (1+v)ff'' = 2k(1+v)^2\beta/\rho_0 \quad (2.4)$$

$$k(1+v)^2\beta' = -f'^2 \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) можно проинтегрировать с помощью уравнения (2.4), если в последнем пренебречь правой частью, что внесет пренебрежимо малую ошибку порядка k

$$k(1+v)^2(\beta - 1) = \int_\eta^{\eta_0} f'^2 d\eta = \frac{1+v}{2+v} [(1+v)k - ff'] \quad (2.6)$$

Как видно, связь функции u_1 и f , а также β и f имеет тот же вид, что и для постоянной плотности. В частности, для поверхности тела получим известную формулу

$$\beta_0 = \beta(0) = (3+v)/(1+v)$$

Хотя с принятой в работе точностью $\rho_0 = 1$ всюду, получим более точную формулу для величины $\rho_0' = \rho_0(0)$.

Вдоль оси имеем уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial y}, \quad p' = 1 - \frac{k}{2} \int_0^1 \frac{1}{\rho_0} d\left(\frac{f^2}{k^2}\right) \quad (2.7)$$

При $\rho_0 = 1$ отсюда следует известная формула

$$\rho_0' = 1 - 1/2k$$

Величина ρ_0' зависит от конкретного вида функции $\rho_0(\eta)$ и при $\rho_0 > 1$ будет больше своего значения при постоянной плотности, оставаясь, однако, заключенной в узких пределах $1 - \rho_0' = 0 \div 1/2k$.

Легко показать, что свойства универсальности распределения давления при $k \rightarrow 0$ относятся ко всей лобовой части гладкого тела. В самом деле, из уравнения (1.2) получим формулу Буземана

$$p = p_\infty - \frac{1}{(2\pi r)^\nu R} \int_0^{\psi_\delta} u d\psi \quad (2.8)$$

Здесь ψ — функция тока. В предельном ньютоновском течении скорость газа не зависит от градиента давления и распределение ее по линиям тока в ударном слое остается тем же, что и на ударной волне, а поскольку форма последней в этом случае совпадает с формой тела, то из формулы (2.8) следует независимость предельного распределения давления по телу от физики течения. Этот вывод хорошо подтверждается сравнением кривых p/p_0' для сферы для различных условий обтекания, построенных по данным [4, 5].

3. Для дальнейшего исследования уравнения (2.4) перейдем к новым переменным

$$\zeta = \frac{f}{k} = \frac{\psi}{\psi_\delta}, \quad z = \frac{f'}{(1+\nu)} = \frac{u}{u_\delta} \quad (3.1)$$

В этих переменных уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{1+\nu}{2} \zeta \frac{dz^2}{d\zeta} - z^2 = -\frac{2k\beta}{\rho_0} = -2k_0\beta_0 - 2k\varphi \quad (3.2)$$

$$k_0 = \frac{k}{\rho_0(0)}, \quad \varphi = \frac{\beta}{\rho_0} - \frac{\beta_0}{\rho_0(0)}$$

Функция $z(\zeta)$ дает распределение касательной скорости по линиям тока и удовлетворяет условию $z = 1$ при $\zeta = 1$.

Без потери общности положим $\varphi = \varphi(\zeta)$. Тогда уравнение (3.2) имеет решение

$$z^2 = (1 - 2k_0\beta_0) \zeta^{2/(1+\nu)} + 2k_0\beta_0 + 2kI(\zeta) \quad (3.3)$$

$$I(\zeta) = \frac{2}{1+\nu} \zeta^{2/(1+\nu)} \int_\zeta^1 \varphi \zeta^{-(3+\nu)/(1+\nu)} d\zeta$$

Возвращаясь к переменным ζ, η , получаем

$$t = \frac{\eta}{k} = \frac{1}{1+\nu} \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{z} \quad (3.4)$$

Полагая здесь $\zeta = 1$, получаем граничное значение t_δ , которое назовем приведенной толщиной ударного слоя.

Рассмотрим поведение решения (3.4). В основной части ударного слоя, где $\zeta^{2/(1+\nu)} \sim 1$, в выражении для $z(\zeta)$ под интегралом будет существенным лишь первый член, а остальные два при малых k можно опустить. Однако эти члены будут существенны в пристеночной области, определяемой условием

$$\zeta = \psi / \psi_\delta \lesssim k^{(1+\nu)/2} \ll 1 \quad (3.5)$$

так как величина $z(\zeta)$ в интеграле (3.4) входит в знаменатель. При $\zeta \rightarrow 0$ функция $I(\zeta) \approx \text{const} \varphi \rightarrow 0$. Поэтому в непосредственной близости стен-

ки при конечных k_0 решение определяется лишь значениями $k_0 \beta_0$

$$z \approx \sqrt{2k_0\beta_0}, \quad \zeta = t(1 + \nu)\sqrt{2k_0\beta_0} \quad (3.6)$$

В связи с этим возможны два крайних режима течения, которые и рассмотрим ниже.

4. Пусть в пристеночной области (3.5) распределение плотности подчиняется условию

$$\varphi \leq \text{const } \zeta^{2/(1+\nu)} \leq k$$

Поскольку здесь $I(\zeta) \sim \varphi$, то последний член в $z(\zeta)$ будет мал всюду и его можно выбросить.

Тогда распределение плотности и продольный градиент давления вдоль оси будут влиять на решение в переменных подобия (ζ, t) , в том числе на приведенную толщину t_0 , лишь через свои значения на теле, при $\zeta = 0$, и это решение будет тем же, что и для постоянной по толщине ударного слоя плотности, равной k_0^{-1} . Для осесимметричных течений решение (3.4) имеет вид

$$t_0 = \eta_0 / k = (1 + \sqrt{2k_0\beta_0})^{-1} \quad (4.1)$$

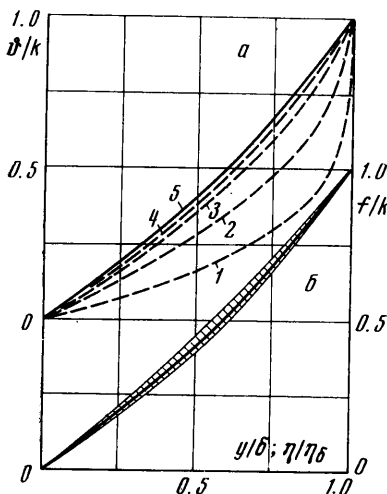
$$\zeta = f/k = 2\sqrt{2k_0\beta_0}t + (1 - 2k_0\beta_0)t^2$$

Это решение слабо зависит от параметра k_0 , кроме узкой, порядка $t \sim k_0^{1/2}$, пристеночной области, где

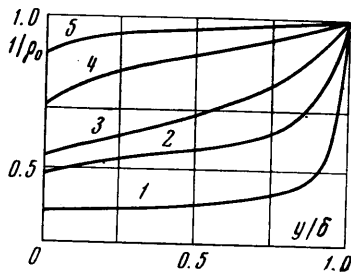
$$\zeta \approx 2\sqrt{2k_0\beta_0}t, \quad u \approx Kx\sqrt{2k_0\beta_0} \quad (4.2)$$

На фиг. 1, а пунктиром показаны профили осевой скорости в зависимости от исходной координаты y/δ для профилей плотности, показанных на фиг. 2. Эти кривые значительно разнятся, в то время как в координатах подобия ζ и t они образуют узкий пучок, заштрихованный на фиг. 1, б. Сплошная линия на обеих фигурах соответствует формуле (4.1) при $k_0 = 0.1$.

Приведенные толщины $t_0 = \eta_0/k \approx 0.80$ для всех условий фиг. 2, что практически совпадает с значением $\delta/kR \approx 0.78$ в диапазоне $k = 0.05 \div$



Фиг. 1



Фиг. 2

$\div 0.2$, полученным в [5] для обтекания сферы равновесно-диссоциирующим воздухом. В то же время истинные толщины δ/kR , равные для кривых 1—5 соответственно 0.32, 0.47, 0.56, 0.72, 0.77, существенно зависят от распределения плотности.

Для плоских течений решение (3.4) имеет вид

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{2k_0\beta_0}{1-2k_0\beta_0} \right)^{1/2} \left[\left(\frac{\sqrt{1-2k_0\beta_0} + 1}{\sqrt{2k_0\beta_0}} \right)^{\eta/\eta_0} - \left(\frac{\sqrt{2k_0\beta_0}}{1 + \sqrt{1-2k_0\beta_0}} \right)^{\eta/\eta_0} \right] \approx \approx [(1/2k_0\beta_0)^{(1-\eta/\eta_0)/2} - (1/2k_0\beta_0)^{(1+\eta/\eta_0)/2}] \quad (4.3)$$

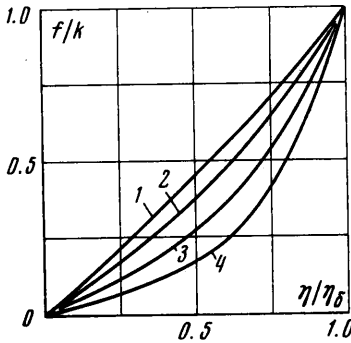
$$t_0 = \frac{\eta_0}{k} = (1 - 2k_0\beta_0)^{-1/2} \ln(2k_0\beta_0)^{-1/2} [1 + (1 - 2k_0\beta_0)^{1/2}] \approx 1/2 \ln(2/k_0\beta_0)$$

В отличие от случая $\nu = 1$ это решение зависит от k_0 всегда, однако в реальном диапазоне значений $k_0 = 0.05 \div 0.2$ эта зависимость сравнительно слабая, что следует из фиг. 3, где кривые 1-4 соответствуют формуле (4.3) при $k_0 = 0.2, 0.05, 0.01$ и 0.001 . Поэтому и в плоском случае следует ожидать известной универсальности функции $\zeta(\eta/\eta_0)$, что, однако, пока нечем подтвердить.

5. Рассмотрим кратко случай, когда в отличие от п. 4 распределение плотности вблизи стенки имеет особенность и в подслое (3.5) происходит существенное изменение плотности¹⁾, например, по закону

$$\rho \approx \alpha \zeta^m, \quad I \approx \alpha \zeta^m, \\ 0 < m \ll 1, \quad \alpha = (1 - \rho_0^{-1}(0))\beta_0 \quad (5.1)$$

Если m столь мало, что $k^{(1+\nu)m/2} \sim 1$, то все три члена в $z(\zeta)$ могут быть одного порядка в подслое (3.5) и полученное выше решение уже не будет пригодным. Здесь на течение, особенно в пристеночном слое, уже будет влиять конкретный вид профиля плотности.



Фиг. 3

Однако практически вследствие слабой зависимости решения от параметра k_0 , т. е.

от плотности газа в пристеночном слое, следует ожидать, что универсальность профилей $\zeta(\eta/\eta_0)$, сохранится и в этом случае.

Простое наглядное решение можно получить в предельном случае, когда ζ^m отличается от единицы лишь в области $\zeta^{2/(1+\nu)} \ll k$, в которой первым членом в $z(\zeta)$ можно пренебречь. Тогда, интегрируя (3.4) по частям с точностью до членов порядка m получим

$$(1 + \nu)t \approx \zeta(2k_0\beta_0 + 2k\alpha\zeta^m)^{-1/2} \quad (5.2)$$

При $\zeta^m \approx 1$ это решение переходит в $\zeta \approx (1 + \nu)\sqrt{2k_0\beta_0}t$, совпадающее с решением (4.1) и (4.3), если в последних заменить k_0 на k и устремить $t \rightarrow 0$.

Следовательно, всюду, за исключением упомянутого подслоя, решение будет совпадать с тем же для случая постоянной плотности, равной своему значению за ударной волной.

Универсальность профилей осевой скорости в переменных (ζ, η) может существенно упростить расчет структуры вязкого ударного слоя с учетом различных физических процессов. В самом деле, уравнения изме-

¹ Например, при сильно замороженном ударном слое, когда равновесие наступает лишь в непосредственной окрестности критической точки.

нения искомых физических величин вдоль оси симметрии (концентрации, энтальпии торможения и т. д.) имеют общий вид

$$\frac{dq_i}{W_i(q_j)} = d\lambda, \quad \lambda = \int_y^{\eta_0} \frac{dy}{v} = R \int_{\eta}^{\eta_0} \frac{d\eta}{f(\eta)} \quad (i, j = 1, \dots, N)$$

Здесь правые части W_i зависят лишь от искомых величин и не зависят от координаты. Кроме того, зависимостью их от давления также можно пренебречь, считая его постоянным.

Первая группа уравнений совпадает с той же для структуры прямой ударной волны, где λ пропорциональна расстоянию от фронта. Связь же λ и η вследствие универсальности или известного из решений (4.1) или (4.3) характера $f(\eta)$ определяется заранее. Переход к физическим переменным осуществляется затем элементарно, с помощью последней квадратуры (2.1).

Поступило 7 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ли Тинг И., Гейгер. Критическая точка тупоносого тела. Сб. «Механика», 1957.
2. Лунев В. В., Мурзинов И. Н. Влияние излучения на течение в окрестности критической точки тупого тела. ПМТФ, 1961, № 6.
3. Стулов В. П. О законе подобия при сверхзвуковом обтекании затупленных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
4. Белоцерковский О. М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. ВЦ АН СССР, 1967.
5. Лунев В. В., Павлов В. Г., Сянченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равномерно-диссоциирующим воздухом. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, № 1.