

УДК 533.69.01

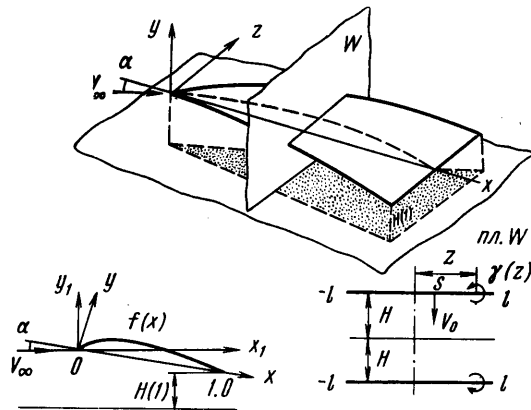
## НЕПЛОСКОЕ КРЫЛО МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

В. И. ХОЛЯВКО

(Харьков)

Рассматривается обтекание потоком вязкой жидкости тонкого изогнутого в продольном направлении крыла малого удлинения вблизи твердой или свободной (случай подводного крыла) поверхности. Анализируется возможность применения цилиндрической крутки (кривизны) крыла для обеспечения необходимой продольной балансировки и уменьшения сопротивления при заданной подъемной силе. Исследование ведется методами теории тонкого тела.

1. Пусть тонкое изогнутое в продольном направлении крыло малого удлинения движется под малым углом атаки  $\alpha$  с постоянной скоростью  $v_\infty$  вблизи твердой или свободной поверхности (фиг. 1). Предполагается, что все геометрические параметры крыла и его положение относительно поверхности раздела удовлетворяют допущениям теории тонкого тела. Следуя этой теории [1], пространственное течение жидкости, вызванное движением крыла, заменяется двумерным течением в фиксированной поперечной плоскости  $w$ . После этого задача сводится к изучению движения плоской пластины переменной ширины вблизи поверхности раздела. Скорость перемещения пластины  $v_0$  в общем случае определяется углом атаки крыла  $\alpha$ , скоростью  $v_\infty$  и кривизной крыла. Если  $y = f(x)$  является уравнением поверхности крыла по корневой хорде  $0 \leq x \leq 1$  в связанной с крылом системе координат, то



Фиг. 1

$$v_0 = v_\infty \left( \alpha - \frac{dy}{dx} \right) = v_\infty \left( \alpha - \frac{df}{dx} \right) \quad (1.1)$$

Течение в плоскости  $w$ , вызванное смещением пластины и изменением ее ширины, приводит к изменению присоединенной массы  $m_1$  пластины на величину, соответствующую приращению подъемной силы крыла на длине  $dx \approx dx_1 = v_\infty dt$ . Таким образом

$$\frac{dY}{dx} = \frac{d(m_1 v_0)}{dt} = v_\infty \frac{d(m_1 v_0)}{dx} \quad (1.2)$$

Подъемная сила всего крыла определяется интегрированием (1.2) по длине хорды. С учетом (1.1) получим

$$Y = v_\infty^2 m_1(1) \left[ \alpha - df/dx \right]_{x=1} \quad (1.3)$$

Здесь  $m_1(1)$  — присоединенная масса пластины, определяемая в сечении крыла по максимальному размаху, которое по предположению совпадает с задней кромкой. При интегрировании (1.2) принято дополнительное условие у вершины крыла, т. е. при  $x = 0, z = 0$ .

Пользуясь соотношением (1.2), можно вычислить продольный аэродинамический момент относительно оси  $z$ , проходящей через вершину крыла, и сопротивление давления крыла без учета подсосывающего эффекта на ведущих краях

$$M_z = - \int_0^1 \frac{dY}{dx} x dx, \quad X = \int_0^1 \frac{dY}{dx} \left[ \alpha - \frac{df}{dx} \right] dx \quad (1.4)$$

Введем коэффициенты аэродинамических характеристик и безразмерную величину присоединенной массы

$$c_y = \frac{Y}{qS}, \quad c_x = \frac{X}{qS}, \quad m_z = \frac{M_z}{qS^2 L}, \quad m(x) = \frac{m_1(x)}{\pi \rho L^2}$$

где  $q = \frac{1}{2} \rho v_\infty^2$ ,  $S$  — площадь проекции крыла в плане,  $L$  — полуразмах.

После несложных преобразований из (1.3) и (1.4) получим

$$\begin{aligned} c_y &= \frac{\pi \lambda}{2} m(1) \left[ \alpha - \frac{df}{dx} \right]_{x=1} \\ c_x &= \frac{\pi \lambda}{2} m(1) \left\{ \left[ \alpha - \frac{df}{dx} \right]_{x=1}^2 + \int_0^1 \frac{m(x)}{m(1)} \left[ \alpha - \frac{df}{dx} \right] \frac{d^2 f}{dx^2} dx \right\} \\ m_z &= - \frac{\pi \lambda}{2} m(1) \left\{ \alpha - \frac{df}{dx} \right]_{x=1} - \int_0^1 \frac{m(x)}{m(1)} \left[ \alpha - \frac{df}{dx} \right] dx \right\} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Формулам (1.5) можно придать другой вид, более удобный для анализа аэродинамических характеристик неплоских крыльев

$$c_y = c_y^\alpha (\alpha - \alpha_0), \quad c_x = A c_y^2 + B c_y + C, \quad m_z = m_{z_0} + m_z c_y \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} c_y^\alpha &= \frac{\pi \lambda}{2} m(1), \quad \alpha_0 = \frac{df}{dx} \Big|_{x=1}, \quad A = \frac{1}{c_y^\alpha} \\ B &= \int_0^1 \frac{m(x)}{m(1)} \frac{d^2 f}{dx^2} dx, \quad C = \frac{\pi \lambda}{2} \int_0^1 m(x) \left[ \alpha_0 - \frac{df}{dx} \right] \frac{d^2 f}{dx^2} dx \\ m_{z_0} &= \frac{\pi \lambda}{2} \int_0^1 m(x) \left[ \alpha_0 - \frac{df}{dx} \right] dx, \quad m_z c_y = \int_0^1 \frac{m(x)}{m(1)} dx - 1 \end{aligned}$$

Полученные выше формулы (1.5) или (1.6) носят универсальный характер (естественно, в рамках теории тонкого тела) и могут быть применены во всех случаях, когда справедливы допущения этой теории.

Действительно, из приведенных соотношений следует, что аэродинамические характеристики крыла определяются деформацией поверхности  $f(x)$  и изменением присоединенной массы поперечных сечений крыла вдоль хорды  $m(x)$ . Последнее, в свою очередь, зависит от формы крыла в плане (этим определяется закон изменения местного размаха крыла) и от условий обтекания, например крыло в безграничном потоке, крыло вблизи границы раздела, крыло с расположенными вблизи его поверхности другими телами и т. п. В каждом конкретном случае изменение присоединенной массы при заданной форме крыла в плане будет другим и это в конечном счете приведет к различным значениям аэродинамических характеристик для данного крыла.

Таким образом, при заданной форме крыла в плане определение аэродинамических характеристик сводится к вычислению присоединенной массы  $m(x)$ , исходя из условий обтекания крыла. Возможна и обратная постановка задачи, когда по выбранному закону изменения присоединенной массы  $m(x)$  найдется условия обтекания (или форма крыла в плане), которым этот закон удовлетворяет.

Применим полученные соотношения для анализа аэродинамических характеристик неплоского крыла в полуограниченном потоке. Так как крыло изогнуто только в продольном направлении, то в этом случае задача состоит в определении присоединенной массы плоской пластины вблизи поверхности раздела.

2. Для определения присоединенной массы воспользуемся методом особенностей и распределим по длине пластины  $-l \leq z \leq l$  вихревой слой с непрерывной интенсивностью  $\gamma(z)$ . Очевидно, что  $\gamma(z) = -\gamma(-z)$ . Влияние поверхности раздела учтем введением фиктивной пластины (фиг. 1).

Распределение  $\gamma(z)$  должно удовлетворять граничному условию на пластине, согласно которому частица жидкости, прилегающая к пластине в любой точке  $s$ , должна обладать скоростью  $v_0$ . Исходя из этого условия, составим интегральное уравнение для определения  $\gamma(z)$

$$\int_{-l}^l \frac{\gamma(z) dz}{z-s} + k \int_{-l}^l \frac{\gamma(z)(z-s) dz}{(z-s)^2 + 4H^2} = 2\pi v_0 \quad (2.1)$$

В этом уравнении  $k = \pm 1$ , где знак плюс относится к случаю движения пластины под свободной поверхностью (подводное крыло), а знак минус — к движению крыла вблизи твердой поверхности. Местный полуразмах  $l$  и величина  $H$  определяются в поперечной плоскости течения  $w$  в зависимости от координаты  $x$ , которая входит в уравнение (2.1) как параметр.

Введем новую переменную из соотношения  $z = l \cos \vartheta$  ( $s = l \cos \theta$ ). Проведем также замену  $\gamma(z) \rightarrow \gamma(\vartheta)$  и обозначим  $h = H/l$ . Тогда уравнение (2.1) приводится к следующему виду:

$$\int_0^\pi \frac{\gamma(\vartheta) \sin \vartheta}{\cos \vartheta - \cos \theta} d\vartheta + k \int_0^\pi \frac{\gamma(\vartheta) (\cos \vartheta - \cos \theta) \sin \vartheta}{(\cos \vartheta - \cos \theta)^2 + 4h^2} d\vartheta = 2\pi v_0 \quad (2.2)$$

Укажем два частных решения уравнения (2.1) или (2.2). Одно из них соответствует движению пластины в безграничной среде ( $h = \infty$ )

$$\gamma_\infty = \frac{2v_0 z}{\sqrt{l^2 - z^2}} = 2v_0 \operatorname{ctg} \vartheta \quad (2.3)$$

Второе решение имеет асимптотический смысл для пластины под свободной поверхностью при  $h \rightarrow 0$ . В этом случае  $\gamma_0 = 1/2 \gamma_\infty$ .

Для решения уравнения (2.2) в общем случае представим неизвестную функцию  $\gamma(\vartheta)$  в виде следующего ряда:

$$\gamma(\vartheta) = 2v_0 \left( A_0 \operatorname{ctg} \vartheta + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin 2n\vartheta \right) \quad (2.4)$$

в котором первое слагаемое при  $A_0 = 1$  определяется решением (2.3), а второе слагаемое и  $A_0 \neq 1$  характеризуют дополнительную нагрузку, возникающую на пластине из-за влияния границ потока. Очевидно, что при  $h \rightarrow \infty$  коэффициент  $A_0 \rightarrow 1$ , а  $A_{2n} \rightarrow 0$ .

Если решение (2.4) известно, то можно вычислить потенциалы скоростей на поверхности пластины

$$\varphi_{\pm} = \pm \frac{1}{2} \int_{-l}^z \gamma(z) dz = \quad (2.5)$$

$$= \pm v_0 l \left\{ A_0 \sin \vartheta + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \left[ \frac{\sin(2n-1)\vartheta}{2n-1} - \frac{\sin(2n+1)\vartheta}{2n+1} \right] \right\}$$

где верхний знак относится к верхней поверхности ( $\varphi_+$ ), а нижний — к нижней ( $\varphi_-$ ). Разность значений потенциала скоростей  $\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$  дает распределение аэродинамической нагрузки по размаху пластины. Применительно к крылу имеем

$$\frac{dY}{dz} = \rho v_{\infty}^2 [\alpha - \alpha_0] \Delta\varphi \quad (2.6)$$

В безграничном потоке ( $h = \infty$ ) это распределение нагрузки эллиптическое.

Формулы (2.5) и (2.6) могут служить для непосредственного определения аэродинамических характеристик заданного крыла. Однако в данном случае целесообразно вычислить присоединенную массу поперечных сечений крыла, чтобы воспользоваться общими соотношениями (1.5) или (1.6).

Формула для присоединенной массы пластины записывается так:

$$m_1 = -\rho \oint_c \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dz = 4\rho \int_0^l \varphi_+(z) dz = 4\rho l \int_0^{\pi/2} \varphi_+(\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta$$

Подставляя сюда выражение  $\varphi_+(\vartheta)$  из (2.5) при  $v_0 = 1$ , получим

$$m_1 = \pi \rho l^2 (A_0 + 1/2 A_2) \quad (2.7)$$

Таким образом, для определения присоединенной массы пластины необходимо знать первые два коэффициента разложения (2.4). При  $h = \infty$  из (2.3) и (2.7) следует известный результат для присоединенной массы плоской пластины в безграничном потоке  $m_{\infty} = \pi \rho l^2$ .

Для определения коэффициентов разложения  $A_{2n}$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) подставим (2.4) в исходное уравнение (2.2). После несложных преобразований получается следующая зависимость между  $A_0$  и  $A_{2n}$ :

$$A_0 [1 + 1/2 k (J_0 - 2J_1 \cos \theta + J_2)] - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \{ 1/4 k [J_{2n+2} - 2 \cos \theta (J_{2n+1} - J_{2n-1}) - J_{2n-2}] + \cos 2n\theta \} = 1 \quad (2.8)$$

где

$$J_m(h, \theta) = (-1)^m J_m(h, \pi - \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos m\vartheta d\vartheta}{(\cos \vartheta - \cos \theta)^2 + 4h^2}$$

Интегралы  $J_m$  при  $m \geq 2$  связаны рекуррентной формулой

$$J_{m+2} - 4J_{m+1} \cos \theta + 2(1 + 2 \cos^2 \theta + 8h^2)J_m - 4J_{m-1} \cos \theta + J_{m-2} = 0$$

Нетрудно заметить, что соотношение (2.8) симметрично относительно  $\theta = 1/2\pi$ .

Если в этом соотношении зафиксировать ряд значений  $\theta_s = \pi s(2p)^{-1}$ , где  $s = 0, 1, \dots, p$ , то получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов  $A_{2n}$ . Число фиксированных точек  $\theta_s$  определит число уравнений в системе и, следовательно, число искоемых коэффициентов  $A_{2n}$  ( $n = 0, 1, \dots, p$ ). Оставшиеся коэффициенты с индексами  $n = p+1, p+2, \dots$  должны быть приняты равными нулю.

По данной методике были проведены расчеты коэффициентов  $A_{2n}$  при различном числе фиксированных точек. Оказалось, что системы алгебраических уравнений, к которым сводится задача, обладают большой устойчивостью. Начиная уже с  $p \geq 2$  и при относительном расстоянии  $h \geq 0.05$ , значения присоединенной массы пластины, вычисленные по различным приближениям, практически совпадают одно с другим. Распределенные характеристики могут быть определены в приближениях, соответствующих  $p \geq 3$ . В основу дальнейших исследований положены расчеты, выполненные при  $p = 6$ .

Изменение присоединенной массы плоской пластины в долях  $m_\infty = \rho r l^2$  вблизи поверхности раздела показано на фиг. 2. При  $h \geq 0.10$  точные значения присоединенной массы удовлетворительно аппроксимируются следующими формулами (пунктир на фиг. 2):

для твердой поверхности (верхние кривые на фиг. 2)

$$m^* = \frac{m_1}{m_\infty} = \frac{\sqrt{1+9h^2}}{3h} \quad (2.9)$$

Для свободной поверхности (нижние кривые)

$$m^* = \left[ 2 - \frac{3h}{\sqrt{1+9h^2}} \right]^{-1} \quad (2.10)$$

Формулы (2.9) и (2.10) используются ниже при анализе аэродинамики неплоского крыла вблизи поверхности раздела.

3. Согласно (1.5) или (1.6) аэродинамические характеристики любого тонкого крыла малого удлинения с продольной цилиндрической кривой зависят от кривизны поверхности  $f(x)$  и формы крыла в плане, которая входит в расчетные формулы через относительную величину присоединенной массы  $m(x)$ . Меняя геометрические параметры неплоского крыла, можно обеспечить заданные аэродинамические характеристики и одновременно получить некоторый выигрыш по сравнению с плоским крылом.

Проведем сравнение поляра изогнутого и плоского крыльев. Поляра изогнутого крыла задается вторым уравнением (1.6), если в коэффициент  $C$  добавить сопротивление трения  $c_f$ . Поляра плоского крыла следует из (1.6) при  $f(x) = 0$

$$c_x^0 = A^0 c_y^2 + c_f^0$$

Эти две поляры имеют одну точку пересечения  $(c_{y_1}, c_{x_1})$  которая, для случая  $A = A^0$  и  $c_f = c_f^0$  определяется по формулам

$$c_{y_1} = -C/B, \quad c_{x_1} = c_f + AC^2/B^2$$

Если задана подъемная сила  $c_y > c_{y_1}$ , то на изогнутом крыле ее можно получить при меньшем сопротивлении, чем на плоском крыле. Выигрыш в сопротивлении  $\Delta c_x = c_x^0 - c_x$  составляет

$$\Delta c_x = -B(c_y - c_{y_1}) \quad (3.1)$$

С другой стороны, чтобы получить выигрыш в максимальном аэродинамическом качестве, необходимо удовлетворить следующей зависимости между коэффициентами поляры (при условии  $A = A^0$ ,  $c_f = c_f^0$ ):

$$-B > 2\sqrt{A}(\sqrt{C + c_f} - \sqrt{c_f}) \quad (3.2)$$

Рассмотрим самобалансировку неплоского крыла. Если продольный аэродинамический момент вычислять относительно оси, проходящей через центр тяжести  $x = x_T$ , то формула (1.6) для момента примет вид

$$m_z = m_{z_0} - \Delta x_T c_y$$

где  $\Delta x_T = -m_z^0 c_y - x_T$  — запас центровки.

На режиме балансировки  $m_z = 0$  и балансировочный коэффициент подъемной силы определится

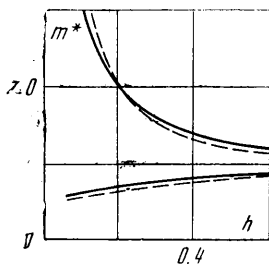
$$c_y = m_{z_0} / \Delta x_T.$$

С учетом этого балансировочная поляра неплоского крыла может быть представлена в форме, аналогичной поляре плоского крыла [2, 3]

$$c_x = A c_y^2 (1 + \delta) + c_f, \quad \delta = \frac{B}{A m_{z_0}} \Delta x_T + \frac{C}{A m_{z_0}^2} \Delta x_T^2 \quad (3.3)$$

Параметр  $\delta$  характеризует изменение индуктивного сопротивления неплоского крыла от самобалансировки по сравнению с плоским крылом при заданном  $c_y$ . Зависимость  $\delta(\Delta x_T)$  представляет собой параболу, вершина которой определяется координатами

$$\Delta x_T^0 = -\frac{1}{2} \frac{B m_{z_0}}{C}, \quad \delta^0 = -\frac{B^2}{2AC} \quad (3.4)$$



Фиг. 2

Из (3.4) следует, что для обеспечения самобалансировки неплоского крыла ( $\Delta x_T > 0$ ) в заданном диапазоне запаса центровки  $0 < \Delta x_T < 2\Delta x_T^0$  без увеличения сопротивления необходимо иметь следующие значения коэффициентов крыла:  $m_{z_0} > 0$ ,  $B < 0$ ,  $C > 0$ . Условие  $m_{z_0} > 0$  — это условие статической устойчивости. Отрицательные значения коэффициента  $B$  представляют согласно (3.1) и (3.2) также необходимое и достаточное условие уменьшения сопротивления неплоского крыла по сравнению с плоским при заданном  $c_y > c_{y_1}$  и необходимое условие получения выигрыша в максимальном аэродинамическом качестве неплоского крыла.

4. Для количественной оценки полученных результатов рассмотрим семейство крыльев, форма в плане и изгиб срединной поверхности которых заданы уравнениями

$$\begin{aligned} l(x) &= z(x) = Lx^k, \\ f(x) &= ax(1-x)(1-nx) \\ k > 0, \quad -\infty > n > \infty \end{aligned} \quad (4.1)$$

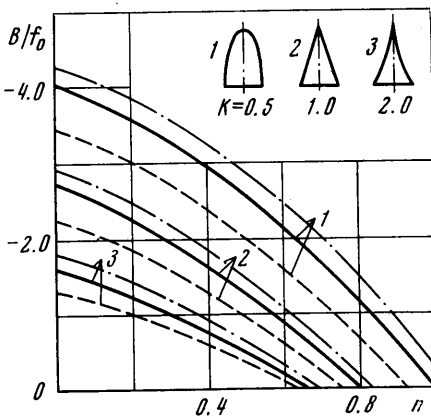
Параметр  $a$  в (4.1) связан с максимальной вогнутостью крыла  $f_0$  и ее положением  $x_0$  следующим образом:

$$\begin{aligned} a &= \frac{f_0}{x_0(1-x_0)(1-nx_0)}, \\ x_0 &= \frac{n+1 - [(n+1)^2 - 3n]^{1/2}}{3n} \end{aligned}$$

Так как форма крыла известна, то необходимо определить изменение присоединенной массы поперечных сечений крыла вдоль хорды. Для этого воспользуемся формулами (2.9) и (2.10). Применительно к крылу величина  $h$  есть отношение положения данного сечения крыла относительно поверхности раздела  $H(x)$  к местному полуразмаху  $l(x)$  (Фиг. 1). В общем случае  $h$  зависит от координаты  $x$ .

При малых углах атаки можно записать (корневая хорда крыла принята равной единице)

$$h(x) = \frac{H(x)}{l(x)} \approx \frac{H(1)}{l(x)} \pm \frac{1-x}{l(x)} \alpha - \frac{x}{l(x)} \alpha + \frac{f(x)}{l(x)}$$



Фиг. 3

где знак плюс относится к движению крыла вблизи твердой поверхности, а минус — к подводному крылу. Последние три слагаемые имеют порядок  $a/\lambda$  и при некоторых условиях могут быть соизмеримы с первым слагаемым. Однако ограничимся случаем, когда ими можно пренебречь. Тогда изменения присоединенной массы сечений крыла с учетом (4.1) определяются

для крыла вблизи твердой поверхности

$$m(x) = \frac{\sqrt{x^{2k} + 9h^2}}{3h} x^{2k} \quad (4.2)$$

для подводного крыла

$$m(x) = x^{2k} \left[ 2 - \frac{3h}{\sqrt{x^{2k} \pm 9h^2}} \right]^{-1} \quad (4.3)$$

В формулах (4.2) и (4.3)  $h$  есть положение задней кромки  $H(1)$  в долях полуразмаха крыла  $L$ .

Некоторые результаты расчетов по формулам (1.6) и (3.4) с использованием (4.2) и (4.3) представлены на фиг. 3, 4. Здесь сплошные линии соответствуют движению крыла в безграничном пространстве ( $h = \infty$ ), штрих-пунктирные и пунктирные — подводному крылу и крылу вблизи твердой поверхности при  $h = 0.2$ .

Так как согласно (3.1) выигрыш в сопротивлении при заданном  $c_y > c_{y_0}$  на изогнутом крыле по сравнению с плоскими будет тем большим, чем больше абсолютные значения коэффициента  $B$ , то при фиксированной вогнутости лучшими оказываются крылья, у которых форма в плане имеет более полную носовую часть и положение максимальной вогнутости смещено назад (малые значения  $k$  и  $n$  на фиг. 3). Расчеты показывают, что такие крылья дают также выигрыш в аэродинамическом качестве.

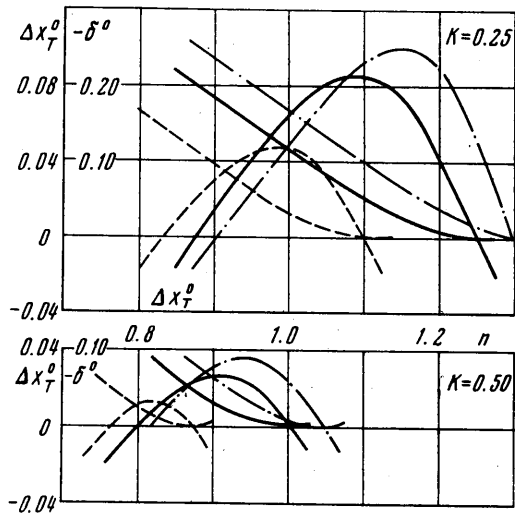
Из фиг. 4 видно, что самобалансировка неплоского крыла при заданном запасе устойчивости  $\Delta x_T$  может быть достигнута при уменьшении индуктивного сопротивления. В этом отношении лучшими являются крылья с выпуклой передней кромкой ( $k < 1$ ) и максимальной вогнутостью, смещенной вперед, когда увеличивается  $S$ -образность крыла.

Движение под свободной поверхностью на конечной глубине расширяет возможности использования неплоского крыла и увеличивает его преимущества перед плоским крылом. Напротив, при движении вблизи твердой поверхности плоское крыло имеет преимущество перед неплоским.

Поступило 15 II 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нилсен Дж. Аэродинамика управляемых снарядов. М., Оборонгиз, 1962.
2. Бульгина Е. В. Самобалансировка сверхзвуковых крыльев с переменной стреловидностью передней кромки. Изв. вузов, Авиац. техн., 1960, № 4.
3. Коробейников Н. П. К расчету аэродинамических характеристик тонких изогнутых тел и неплоских крыльев. Изв. вузов, Авиац. техн., 1961, № 3.



Фиг. 4