

УДК 533.6.011+533.69.61

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О НЕСТАЦИОНАРНОМ ОБТЕКАНИИ ТОНКОГО ПРОФИЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Д. Н. ГОРЕЛОВ, Р. Л. КУЛЯЕВ

(Новосибирск)

В работах [1-3], появившихся в последнее время, разрабатываются методы решения ряда задач нелинейной теории крыла в нестационарном потенциальном потоке вязкой несжимаемой жидкости. Нелинейность этих задач обусловлена влиянием вихревой пелены за крылом, форма которой не задается заранее, а определяется в процессе решения. Общим для всех методов является линеаризация задачи в малой окрестности каждого момента времени и моделирование пелены за крылом системой свободных вихрей. Это позволяет строить решение шаг за шагом по времени, начиная с момента, для которого известно поле скоростей течения.

Аналогичный подход применяется и в данной работе при исследовании обтекания тонкого профиля. Профиль заменяется системой дискретных вихрей, распределенных вдоль средней дужки, с соблюдением некоторых условий. Условие непротекания жидкости выполняется в конечном числе точек, выбираемых специальным образом. В качестве примера приводятся результаты расчета обтекания пластины, колеблющейся с конечными амплитудами.

1. Рассмотрим нестационарное безотрывное обтекание тонкого криволинейного профиля плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости.

Введем декартову систему координат x, y , в бесконечно удаленной точке которой жидкость покоится. Пусть скорость движения точек профиля постоянна при $t < 0$ и переменна при $t > 0$ (t — время). Пренебрегая влиянием толщины профиля, заменим его средней дужкой L_1 . Вихревой след, возникающий за профилем при $t > 0$, схематизируем линией контактного разрыва L_2 . Движение жидкости вне контуров L_1 и L_2 предположим потенциальным.

В принятых допущениях потенциал скорости движения жидкости $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1)$$

вне контура $L(t) = L_1(t) + L_2(t)$ и граничным условиям непротекания жидкости через профиль

$$(\nabla \varphi - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (x, y) \in L_1 \quad (1.2)$$

непрерывности давления и нормальной составляющей скорости течения при переходе через линию вихревого следа

$$[p] = [\nabla \varphi \cdot \mathbf{v}] = 0, \quad (x, y) \in L_2 \quad (1.3)$$

затухания скорости течения при бесконечном удалении от профиля

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nabla \varphi = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.4)$$

отсутствия перепада давления в задней кромке профиля (постулат Жуковского)

$$[p] \rightarrow 0 \quad \text{при } (x, y) \rightarrow (X, Y), \quad (x, y) \in L_1 \quad (1.5)$$

Здесь V — скорость движения точек заданного контура $L_1(t)$; \mathbf{v} — орт нормали к L ; p — гидродинамическое давление; X, Y — координаты задней кромки контура L_1 .

К условиям (1.1) — (1.5) следует добавить начальное условие

$$L = L_1, \quad V = V_0, \quad t = 0 \tag{1.6}$$

где V_0 — постоянная скорость движения профиля при $t < 0$.

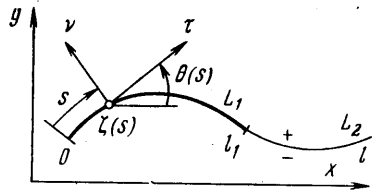
2. Предварительно рассмотрим некоторые соотношения, которые будут использованы для построения решения задачи (1.1) — (1.6).

Введем комплексную скорость $v^\circ(z, t) = v_x - iv_y$, регулярную в комплексной плоскости $z = x + iy$ всюду вне L . Обозначим

$$\gamma(s, t) = v_{\tau-} - v_{\tau+}, \quad v_a(s, t) = (v_- + v_+) / 2$$

где s — дуговая абсцисса точки $\zeta = \xi + i\eta \in L$, отсчитываемая от передней кромки контура L_1 (фиг. 1), индексы плюс и минус означают предельные значения функции в точке ζ при подходе к L сверху и снизу соответственно, а индекс τ — проекцию вектора на орт $\boldsymbol{\tau}$ касательной к L в точке ζ , направленный в сторону отсчета s .

Предположим, что в каждый момент времени контур L гладкий в смысле Ляпунова [4], а функция γ удовлетворяет условию Гельдера по s при $s > 0$. Тогда комплексную скорость \bar{v} можно определить через скачок v_τ на L как решение соответствующей краевой задачи теории аналитических функций



Фиг. 1

$$\bar{v}(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{l(t)} \frac{\gamma(s, t) ds}{z - \zeta(s, t)} \tag{2.1}$$

где l — длина контура L .

Из формул Сохоцкого — Племели [3] следует, что

$$v_a^\circ(s, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)} \tag{2.2}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения Коши.

Введем подвижную декартову систему координат, начало которой находится на контуре L . Для абсолютного движения жидкости в этой системе координат имеем интеграл Коши — Лагранжа

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\delta\phi}{\delta t} + \frac{1}{2} (v_r^2 - v_e^2) = F(t)$$

где производная $\delta/\delta t$ вычисляется в подвижной системе координат, индексы r и e относятся соответственно к относительной и переносной скоростям частиц жидкости, ρ — плотность жидкости, F — произвольная функция. Отсюда перепад давления $\Delta p = p_- - p_+$ в точке $\zeta(s) \in L$ можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho} \Delta p(s, t) = \gamma(v_{e\tau} - v_{a\tau}) - \frac{\delta}{\delta t} \int_0^s \gamma(\sigma, t) d\sigma \tag{2.3}$$

Наконец, рассмотрим выражение для подсосывающей силы, полученное Л. И. Седовым [6]

$$Q = -\rho\pi \lim_{z \rightarrow z_0} \{ \overline{(z - z_0) v^{o2}(z)} \}$$

где z_0 — комплексная координата передней кромки контура L_1 . Подставляя в это равенство выражение (2.1), после ряда преобразований получим

$$Q(t) = -\rho \frac{\pi}{4} A^2(t), \quad A = \lim_{s \rightarrow 0} \{ \sqrt{s} \gamma(s, t) \} \quad (2.4)$$

3. Возвращаясь к задаче (1.1) — (1.6). Заменим контур L вихревым слоем с интенсивностью γ . Тогда поле скоростей, определяемое формулой (2.1), удовлетворяет уравнению Лапласа (1.1), условию $[\nabla\phi \cdot \mathbf{v}] = 0$ на L_2 и условию (1.4). Условие непротекания (1.2) можно представить в виде

$$\text{Im} \left\{ e^{i\theta(s, t)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma(\sigma, t) d\sigma}{\zeta(s, t) - \zeta(\sigma, t)} - V^o(s, t) \right) \right\} = 0, \quad s \in (0, l_1) \quad (3.1)$$

Здесь θ — наклон орта τ к оси x (фиг. 1), l_1 — длина контура L_1 , $V^o = V_x - iV_y$.

Для выполнения условия неразрывности давления в следе достаточно вихревой слой на L_2 рассматривать в качестве системы свободных вихрей. Действительно, пусть каждая точка произвольного элемента $(s_1(t), s_2(t))$ контура L_2 перемещается со скоростью v_a , определяемой по формуле (2.2), а суммарная интенсивность вихревого слоя на этом элементе остается неизменной

$$\int_{s_1(t)}^{s_2(t)} \gamma(\sigma, t) d\sigma = \text{const}, \quad l_1 < s_1 < s_2 < l \quad (3.2)$$

Полагая в формуле (2.3)

$$v_e(s, t) = v_a(s, t), \quad s \in (s_1, s_2) \quad (3.3)$$

получим, что $\Delta p = 0$ на этом элементе и в силу произвольности s_1 и s_2 на всем контуре L_2 .

Вихревой слой L_2 в каждый момент времени пополняется в результате схода с задней кромки профиля свободных вихрей с интенсивностью

$$\gamma(l_1, t) = -\frac{1}{U} \frac{d\Gamma}{dt} \quad (3.4)$$

где

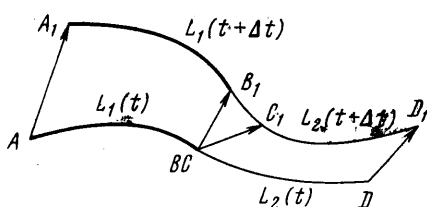
$$\Gamma = \int_0^{l_1} \gamma(\sigma, t) d\sigma, \quad U = v_{a\tau}(l_1, t) - V_\tau(l_1, t) \quad (3.5)$$

Равенство (3.4) эквивалентно постулату Жуковского (1.5) и является следствием соотношений (3.2), (3.3) и теоремы Томсона о постоянстве циркуляции скорости вдоль жидкого контура, охватывающего L .

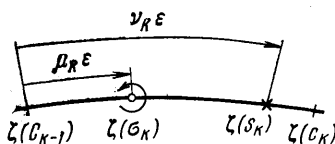
Таким образом, задача (1.1) — (1.6) свелась к задаче о движении вихревого слоя L , в которой при заданном законе движения контура L_1 и начальных данных (1.6) требуется определить в каждый момент времени из условий (3.1) — (3.4) контур вихревого следа L_2 и функцию γ распределения вихрей вдоль контура $L = L_1 + L_2$.

4. Основная трудность, которая возникает при решении поставленной задачи, состоит в том, что неизвестный контур L_2 входит в уравнения (3.1), (3.3) и (3.4) нелинейным образом. Следуя работам [1-3, 7], эту задачу для малых промежутков времени можно линеаризовать следующим образом.

Предположим, что в некоторый момент времени t известны контур L и функция γ распределения вдоль него вихрей. Построим решение для момента времени $t + \Delta t$ при малом Δt .



Фиг. 2



Фиг. 3

За время Δt контур L_1 переместится из положения AB в новое положение A_1B_1 по заданному закону его движения (фиг. 2), а отрезок CD контура L_2 займет положение C_1D_1 , которое можно определить по скоростям v_a точек этого контура в момент t

$$\zeta(s_1(t + \Delta t), t + \Delta t) = \zeta(s_1(t), t) + v_a(s_1, t) \Delta t \quad (4.1)$$

Участок B_1C_1 контура $L_2(t + \Delta t)$, возникающий вследствие схода вихрей с профиля за время Δt , можно считать отрезком прямой. Теперь контур $L(t + \Delta t)$ оказывается заданным, и задача сводится к определению распределения вихрей вдоль него. Интенсивность вихрей $\gamma(s, t + \Delta t)$ на отрезке C_1D_1 определяется условием (3.2), на отрезках A_1B_1 и B_1C_1 — из условия непротекания (3.1) и условия (3.4), которое можно переписать в виде

$$\Gamma(t + \Delta t) + \int_{(B_1C_1)} \gamma(s, t + \Delta t) ds = \Gamma(t) \quad (4.2)$$

Описанная линеаризация задачи (3.1) — (3.4) позволяет строить ее приближенное решение для ряда последовательных моментов времени, достаточно мало отстоящих один от другого.

5. Наиболее простой и удобный для проведения расчетов алгоритм решения получается при замене вихревого слоя L системой дискретных вихрей. Рассмотрим подробно этот вопрос для начального момента времени.

Задача (3.1) — (3.4) в момент $t = 0$ сводится к сингулярному интегральному уравнению (3.1) относительно функции γ на контуре $L = L_1$ с дополнительным условием $\gamma(l_1) = 0$. Решение этого уравнения имеет вид [5]

$$\gamma(s) = \left(\frac{l_1 - s}{s} \right)^{1/2} g(s) \quad (5.1)$$

где $g(s)$ — ограниченная функция, которая в передней кромке может иметь нуль лишь порядка выше $1/2$.

Разделим контур L_1 точками $\zeta(c_j)$, $j = 0, 1, \dots, N$, на N отрезков равной длины $\varepsilon = l_1/N$ (фиг. 3). Заменяем каждый отрезок (c_{k-1}, c_k) , $k =$

$= 1, \dots, N$, вихревого слоя L_1 дискретным вихрем интенсивности

$$\Gamma_k = \int_{c_{k-1}}^{c_k} \gamma(\sigma) d\sigma \quad (5.2)$$

помещенным в точку $z_k = \zeta(\sigma_k)$, где

$$\sigma_k = \frac{1}{\Gamma_k} \int_{c_{k-1}}^{c_k} \gamma(\sigma) \sigma d\sigma \quad (5.3)$$

а условие непротекания выполним в точке $Z_k = \zeta(s_k)$, $s_k \in (\sigma_k, c_k)$, в которой нормальные составляющие скоростей, индуцируемых вихревым слоем и системой дискретных вихрей, совпадают

$$\operatorname{Im} \left\{ e^{i\theta(s_k)} \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{Z_k - z_j} - \int_0^{l_1} \frac{\gamma(\sigma) d\sigma}{\zeta(s_k) - \zeta(\sigma)} \right) \right\} = 0 \quad (5.4)$$

Введем коэффициенты μ_k и ν_k , определяющие положение точек z_k и Z_k на отрезке (c_{k-1}, c_k) в долях его длины

$$\mu_k = (\sigma_k - c_{k-1}) / \varepsilon, \quad \nu_k = (s_k - c_{k-1}) / \varepsilon$$

Величина этих коэффициентов зависит от вида функции γ , формы контура L_1 и числа отрезков N .

Предположим, что в равенстве (5.4) $g(0) \neq 0$, $g(l_1) \neq 0$. Тогда можно показать, что при $N \rightarrow \infty$ коэффициенты μ_k и ν_k стремятся к следующим предельным значениям (округленным до двух десятичных знаков), не зависящим от конкретного вида функции γ и контура L_1

k	1	2	3	4	...	8	9	...	$N-8$	$N-7$...	$N-3$	$N-2$	$N-1$	N
$\mu_k(0)$	0.33	0.47	0.48	0.49	...	0.49	0.50	...	0.50	0.49	...	0.49	0.48	0.47	0.40
$\nu_k(0)$	0.94	0.98	0.99	0.99	...	0.99	1.00	...	1.00	0.99	...	0.99	0.98	0.95	0.80

Неравномерность распределения точек z_k и Z_k вблизи кромок контура L_1 объясняется тем, что функция γ имеет особенность порядка $1/2$ в передней кромке и нуль того же порядка в задней кромке.

Построим приближенное решение задачи, подразумеваемая под ним определение величин Γ_k . Выберем по таблице точки расположения вихрей и точки, в которых выполняется условие непротекания, и подставим их в равенства

$$\operatorname{Im} \left\{ e^{i\theta(s_k)} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^N \frac{\Gamma_j}{Z_k - z_j} - \bar{V}_0 \right) \right\} = 0$$

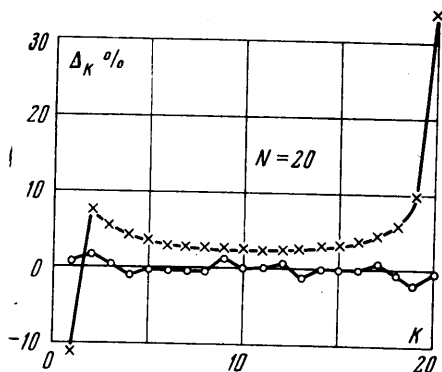
которые следуют из (3.1) и (5.4). Полученная система линейных алгебраических уравнений относительно интенсивностей вихрей имеет единственное решение.

Было проведено исследование предлагаемой схемы дискретных вихрей на примере стационарного обтекания решеток пластин без выноса густоты $b/h = 0, 0.5, 1, 2, 3$, где b — хорда пластины, h — шаг решетки. В этом случае известно точное решение

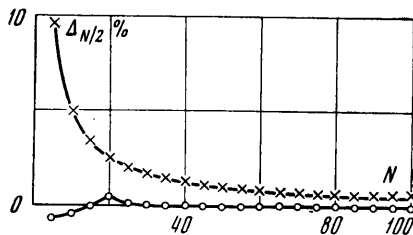
$$\gamma(s) = -2|v_0| \sin \alpha \operatorname{sh} \frac{\pi}{h}(b-s) \left[\operatorname{ch} \frac{\pi b}{2h} \operatorname{sh}^{-1/2} \frac{\pi}{h} s \right]^{-1}$$

где v_0 — полусумма скоростей жидкости на бесконечности перед и за решеткой, α — угол между хордой пластины и v_0 . Последняя формула получена из выражений для скорости течения на пластине, приведенных в работе [8].

Знание точного решения позволило вычислить относительную погрешность Δ_k определения величин Γ_k , $k = 1, \dots, N$. В расчетах число N менялось от 5 до 100 с шагом 5. Для случая одиночной пластины на фиг. 4 приведена характерная зависимость Δ_k от номера вихря k при $N = 20$, а на фиг. 5 — зависимость погрешности расчета среднего вихря $\Delta_{N/2}$ от числа



Фиг. 4



Фиг. 5

вихрей N . Точки соответствуют расчету по предлагаемой схеме, а крестики — по известной схеме С. М. Белоцерковского [9], в которой $\mu_k = 1/k$, $\nu_k = 3/k$ при всех k . Для решеток пластин характер зависимости сохраняется.

Результаты расчета по предлагаемой схеме показывают, что при $N \geq 15$ величины $|\Delta_k| < 1 \div 2\%$ при всех k . Это позволяет (по формулам п. 7) эффективно определять гидродинамические реакции потока на обтекаемый контур, включая и подсазывающую силу.

Отметим некоторые особенности использованной схемы дискретных вихрей. Выбор табличных значений μ_k , ν_k с учетом двух десятичных знаков рассчитан на схему с $N = 15 \div 20$, хотя это и не исключает возможность применения табличных значений μ_k , ν_k для значений $N > 20$. При этом следует иметь в виду, что вихри в средней части профиля считаются тем точнее, чем больше N , а точность расчета Γ_k вблизи концов профиля с ростом N практически не меняется. Для уменьшения погрешности расчета Γ_k вблизи кромок нужно одновременно с увеличением N увеличивать число десятичных знаков в таблице для μ_k , ν_k . Однако для практических приложений, учитывая технические возможности современных ЭЦВМ, в большинстве задач будет, видимо, достаточно приведенных в таблице значений.

В схеме С. М. Белоцерковского наблюдается более медленная по сравнению с предлагаемой схемой сходимости расчета интенсивности средних вихрей к их точным значениям, а расчет вихрей вблизи кромок производится с относительно высокой погрешностью, например при $N \rightarrow \infty \Delta_1 \rightarrow -11.2\%$, $\Delta_N \rightarrow 32.9\%$. В результате расчетов выяснилась интересная особенность схемы С. М. Белоцерковского. А именно в случае стационарного обтекания расчет по этой схеме при любом числе вихрей N дает точные значения подъемной силы и ее момента для одиночной пластины и точное значение подъемной силы для решетки пластин.

6. Построим теперь алгоритм решения задачи (3.1) — (3.4) для последовательных моментов времени $t_n > t_0 = 0$, $n = 1, 2, \dots$. При этом будем исходить из того, что движение контура L_1 задается функцией $\zeta(s, t)$, $s \in (0, l_1)$. Тогда

$$V(s, t) = \frac{\partial \zeta}{\partial t}(s, t), \quad \theta(s, t) = \frac{1}{i} \ln \frac{\partial \zeta}{\partial s}(s, t)$$

Для упрощения алгоритма ограничимся случаем, когда профиль не растягивается ($l_1 = \text{const}$). Кроме того, предположим, что при всех n функция $\psi(s, t_n)$ имеет особенность в передней кромке ($s = 0$), а порядок нуля этой функции в задней кромке ($s = l$) контура $L(t_n)$ равен $1/2$.

Вначале опишем переход от момента t_0 к t_1 . Вычислим величину $U(t_0)$, определяемую равенством (3.5), по формуле

$$U(t_0) = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta(l_1, t_0)} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k(t_0)}{Z(t_0) - z_k(t_0)} - V^\circ(l_1, t_0) \right) \right\}$$

где Z — комплексная координата задней кромки контура L_1 . Способ замены вихревого слоя $L_1(t_0)$ дискретными вихрями, изложенный в п. 5, обеспечивает весьма малую погрешность последней формулы.

Выберем $t_1 = t_0 + \varepsilon / U(t_0)$, где $\varepsilon = l_1 / N$. Тогда длина следа $L_2(t_1)$, сошедшего с профиля за время $t_1 - t_0$, будет мало отличаться от величины ε . Заменяем вихревой слой $L(t_1)$ системой дискретных вихрей, располагая N вихрей на контуре $L_1(t_1)$ и один вихрь на $L_2(t_1)$. Потребуем выполнения условий (5.2) — (5.4) для всего контура $L(t_1)$. Тогда вихрь на $L_2(t_1)$ следует поместить в точке $\zeta_1(t_1) = Z(t_1) + \mu_N(t_0) \varepsilon \exp \{i\theta(l_1, t_1)\}$, вихри на $L_1(t_1)$ — в точках $z_k(t_1) = \zeta(\sigma_k, t_1)$, $\sigma_k = \varepsilon(k - 1 + \mu_k(t_1))$, а условие непротекания следует выполнять в точках $Z_k(t_1) = \zeta(s_k, t_1)$, $s_k = \varepsilon(k - 1 + \nu_k(t_1))$. Здесь

$$\mu_k(t_1) = \begin{cases} \mu_k(t_0), \\ \mu_{k-1}(t_0), \end{cases} \quad \nu_k(t_1) = \begin{cases} \nu_k(t_0), & k = 1, \dots, N-8 \\ \nu_{k-1}(t_0), & k = N-7, \dots, N \end{cases}$$

В качестве величин $\mu_k(t_0)$, $\nu_k(t_0)$ берутся их табличные значения, приведенные в п. 5.

Интенсивности $\Gamma_k(t_1)$ вихрей на контуре $L_1(t_1)$ и γ_1 вихря на $L_2(t_1)$ определяются единственным образом из системы линейных алгебраических уравнений

$$\operatorname{Im} \left\{ e^{i\theta(s_k, t_1)} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{Z_k - z_m} + \frac{1}{2\pi i} \frac{\gamma_1}{Z_k - \zeta_1} - V(s_k, t_1) \right) \right\} = 0$$

$$\sum_{m=1}^N \Gamma_m + \gamma_1 = \sum_{m=1}^N \Gamma_m(t_0), \quad k = 1, \dots, N$$

Здесь первые N уравнений представляют собой условие непротекания (3.1), а последнее — условие (4.2).

В последующие моменты времени задача (3.1) — (3.4) решается аналогичным образом. Для выполнения условий (3.2), (3.3) дискретные вихри, моделирующие вихревой слой L_2 , считаем свободными.

Предположим, что решение задачи в момент t_n , $n \geq 1$, известно. Выберем шаг по времени $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n = \varepsilon / U(t_n)$, где $U(t_n)$ вычисляется по формуле (3.5), в которой

$$\bar{v}_a(l_1, t_n) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k(t_n)}{Z(t_n) - z_k(t_n)} + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{Z(t_n) - \zeta_j(t_n)} \right\}$$

Здесь γ_j — интенсивности, а ζ_j — комплексные координаты свободных вихрей.

Новое положение свободных вихрей найдем по формуле

$$\zeta_j(t_{n+1}) = \zeta_j(t_n) + v_a(\zeta_j, t_n) \Delta t_{n+1}, \quad j = 1, \dots, n$$

где

$$v_a^\circ(\zeta_j, t_n) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k(t_n)}{\zeta_j(t_n) - z_k(t_n)} + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^n \frac{\gamma_m}{\zeta_j(t_n) - \zeta_m(t_n)} \right\}$$

Поместим $n + 1$ -й свободный вихрь, который заменяет участок следа, сошедший с профиля за время Δt_{n+1} , в точке

$$\zeta_{n+1}(t_{n+1}) = Z(t_{n+1}) + \kappa_n \varepsilon \exp\{i\theta(l_1, t_{n+1})\}, \quad \kappa_n = \begin{cases} \mu_{N-n}, & n < 8 \\ 1/2, & n \geq 8 \end{cases}$$

вихри на $L_1(t_{n+1})$ — в точках $z_k(t_{n+1}) = \zeta(\sigma_k, t_{n+1})$, $\sigma_k = \varepsilon(k - 1 + \mu_k(t_{n+1}))$, а условие непротекания выполним в точках $Z_k(t_{n+1}) = \zeta(s_k, t_{n+1})$, $s_k = \varepsilon(k - 1 + \nu_k(t_{n+1}))$. Здесь

$$\mu_k(t_{n+1}) = \begin{cases} \mu_k(t_0), \\ 1/2, \\ 1/2, \\ \mu_{k-n-1}(t_0), \end{cases}$$

$$\nu_k(t_{n+1}) = \begin{cases} \nu_k(t_0), & k = 1, \dots, N - 8 \\ 1, & k = N - 7, \dots, N, n \geq 7 \\ 1, & k = N - 7, \dots, N + n - 6 \\ \nu_{k-n-1}(t_0), & k = N + n - 5, \dots, N \end{cases} \quad n < 7$$

Таким образом, контур L_2 при своем движении как бы «стягивает» с контура L_1 неравномерность расположения точек z_k и Z_k вблизи задней кромки.

Интенсивности $\Gamma_k(t_{n+1})$ вихрей на контуре $L_1(t_{n+1})$ и γ_{n+1} свободного вихря с номером $n + 1$ определим из системы уравнений

$$\operatorname{Im} \left\{ e^{i\theta(s_k, t_{n+1})} \left(\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^N \frac{\Gamma_m}{Z_k - z_m} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\gamma_j}{Z_k - \zeta_j} - \bar{V}(s_k, t_{n+1}) \right) \right\} = 0$$

$$\sum_{m=1}^N \Gamma_m + \gamma_{n+1} = \sum_{m=1}^N \Gamma_m(t_n), \quad k = 1, \dots, N$$

Описанный алгоритм весьма прост и может быть реализован на ЭЦВМ с быстродействием порядка $1 \cdot 10^5$ операций в секунду. Например, на БЭСМ-6 время счета составляет $\sim 16T^2 + 49NT^2 + 32N^2T$ мксек, где T — число шагов по времени.

7. Перейдем к эффективному вычислению гидродинамических реакций потока на обтекаемый контур.

Вначале рассмотрим вопрос о расчете реакций, возникающих вследствие перепада давления в точках контура. На отрезок (c_{k-1}, c_k) контура L_1 действует сила

$$P_k(t) = \int_{c_{k-1}}^{c_k} \Delta p(s, t) ds \quad (k = 1, \dots, N)$$

Подставим в это равенство вместо Δp его выражение по формуле (2.3). Полагая $v_e = V$ при $\zeta \in L_1$ и отбрасывая величины порядка $\varepsilon \Gamma_k$ и выше, можно показать, что

$$\frac{1}{\rho} P_k(t_n) = q_{1k} + q_{2k} + q_{3k} \quad (7.1)$$

где

$$q_{1k} = \Gamma_k \{V_\tau(\sigma_k) - v_{a\tau}(\sigma_k)\}, \quad q_{2k} = -\varepsilon \sum_{j=1}^{k-1} \frac{d\Gamma_j}{dt}, \quad q_{3k} = -\varepsilon(1 - \mu_k(t_n)) \frac{d\Gamma_k}{dt} \quad (7.2)$$

Здесь величину $v_{a\tau}(\sigma_k)$ можно аппроксимировать выражением

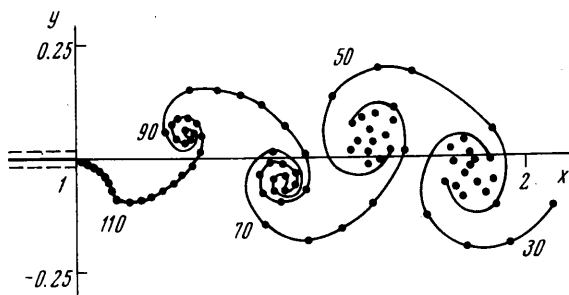
$$v_{a\tau}(\sigma_k, t_n) = \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta(\sigma_k, t_n)} \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N \frac{\Gamma_m}{z_k - z_m} + \sum_{j=1}^n \frac{\gamma_j}{z_k - \zeta_j} \right) \right\}$$

производные $d\Gamma_k/dt$ — отношением конечных разностей

$$\frac{d\Gamma_k}{dt}(t_n) = \frac{\Gamma_k(t_n) - \Gamma_k(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}}$$

а коэффициенты $\mu_k(t_n)$ определяются равенствами (6.1). Для определения главного вектора сил p_k достаточно просуммировать все эти силы, заменяя каждую дужку (c_{k-1}, c_k) контура L_1 отрезком прямой.

Величина главного момента сил q_{jk} ($j = 1, 2, 3$) в пределе при $N \rightarrow \infty$ не зависит от того, в какой точке отрезка (c_{k-1}, c_k) приложить эти силы. На



Фиг. 6

практике, однако, число N ограничено. Поэтому для уменьшения погрешности определения момента положение этих точек, особенно вблизи передней кромки, следует уточнить. Аналогично тому, как были получены равенства (7.1), (7.2), можно показать, что силы q_{jk} приложены к отрезку (c_{k-1}, c_k) в точках с дуговыми абсциссами $c_{k-1} + \varepsilon f_{jk}$, где

$$f_{1k} = \mu_k, \quad f_{2k} = 1/2, \quad f_{3k} = (3 - 2\mu_k) / (6(1 - \mu_k))$$

Подсасывающая сила определяется формулой (2.4) через величину $A = \lim_{s \rightarrow 0} (\sqrt{s} \gamma(s))$. Выразим A через интенсивности дискретных вихрей, расположенных вблизи передней кромки. С этой целью представим функцию γ на отрезке $(0, m\varepsilon)$ в виде

$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \left(A + \sum_{j=1}^{m-1} a_j s^j \right) \quad (a_j = \text{const}; \quad m = 1, 2, \dots) \quad (7.3)$$

Вычисляя Γ_j по формулам (5.2) и (7.3), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных A и a_j . Решая эту систему, получим, что

$$A = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \sum_{j=1}^m \left\{ \Gamma_j \sum_{r=j}^m \frac{(-1)^{r+1} m!}{\sqrt{r} (m-r)! r!} \right\} \quad (7.4)$$

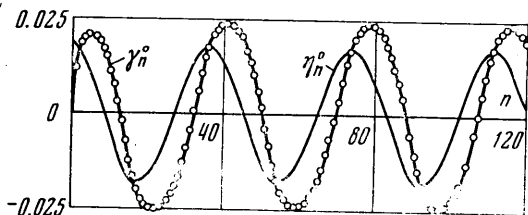
Для оценки эффективности последней формулы от числа m был проведен расчет коэффициента A в случаях стационарного обтекания решетки

пластин, рассмотренных в п. 5. Расчет по точным значениям Γ_j ($j = 1, \dots, m$) показал, что при $m = 1$ погрешность достигала 5%, при $m = 2$ не превышала 1%, а с увеличением m быстро убывала. При расчете же по значениям Γ_j , получаемым по предлагаемой схеме, было выяснено, что формула (7.4) оказывается наиболее эффективной при $m = 2$ (в этом случае погрешность расчета не превышала 1%). В соответствии с этим подсказывающую силу будем определять по формулам (2.4) и (7.4) при $m = 2$.

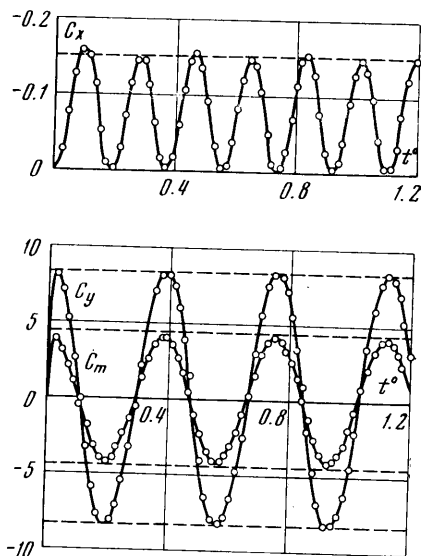
8. В качестве примера приведем некоторые результаты расчета обтекания пластинки, движение которой описывается вдоль оси x законом $\xi(s, t) = V_0 t$, вдоль оси y — законом $\eta(s, t) = \eta_0$ при $t < 0$, $\eta(s, t) = \eta_0 \cos \omega t$ при $t > 0$. Здесь η_0 — амплитуда, ω — круговая частота колебаний.

Для этого случая известны эксперименты Брэтта [10], в которых проводилось фотографирование вихревого следа за крылом (след фиксировался с помощью дыма). На фиг. 6 приведена расчетная форма следа для значений параметров $\eta_0/l_1 = 0.0183$, $\omega l_1/V_0 = 17$. Налицо хорошее совпадение экспериментальной и расчетной форм следа. Аналогичное сравнение проведено в работах [1, 3].

На фиг. 6 указаны номера, а на фиг. 7 — безразмерные интенсивности $\gamma_n^\circ = \gamma_n / (V_0 l_1)$ свободных вихрей и зависимость безразмерной величины $\eta_n^\circ = \eta(t_n) / l_1$ от времени $t_n^\circ = t_n V_0 / l_1$, определяющей положение профиля в момент схода с него свободного вихря с номером n . Приведенные результаты свидетельствуют о том, что около вихрей с экстремальной интенсивностью с течением времени происходит концентрация (до 70—80% суммарной интенсивности) других вихрей с образованием конфигурации, похожей на обращенную вихревую дорожку Кармана. При этом наблюдается интересная особенность, обнаруженная ранее экспериментально Р. И. Виноградовым [11].



Фиг. 7



Фиг. 8

Вихри экстремальной интенсивности сходят с профиля вблизи его крайних положений, перемещаясь затем в противоположную сторону. Так, например, вихрь, сходящий с профиля в его крайнем верхнем положении, оказывается с течением времени в нижнем ряду вихрей и наоборот. Следует отметить, что это обстоятельство не соответствует схеме В. В. Голубева, принятой им в задаче о машущем полете [12].

На фиг. 8 приводятся зависимости от времени t_n° безразмерных коэффициентов подъемной силы $C_y = P_y / (q l_1)$, гидродинамического момента относительно передней кромки профиля $C_m = M / (q l_1^2)$ и подсасывающей силы $C_x = Q / (q l_1)$, где $q = \frac{1}{2} \rho V_0^2$. Там же пунктирными линиями отмечены амплитуды этих коэффициентов, вычисленных по линейной теории крыла в нестационарном потоке. В рассмотренном случае колебаний профиля результаты расчета гидродинамических реакций по линейной и нелинейной теориям практически совпадают.

Поступило 4 I 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Giesing J. P. Nonlinear two-dimensional unsteady potential flow with lift. J. Aircraft, 1968, vol. 5, No. 2.
2. Giesing J. P. Nonlinear interaction of two lifting bodies in arbitrary unsteady motion. ASME Sympos. on unsteady flow, 1968. (Рус. перев.: Теоретические основы инженерных расчетов, 1968, № 3.)

3. Djojodihardjo R. H., Widnall S. E. A numerical method for the calculation of nonlinear unsteady lifting potential flow problems. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 10. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1969, № 10.)
4. Соболев С. Л. Уравнения математической физики, Изд. 4. М., «Наука», 1966.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения, Изд. 3. М., «Наука», 1968.
6. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
7. Ashley H., Landahl M. T., Widnall S. E. New directions in lifting surface theory. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 1. (Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 1.)
8. Кочин Н. Е. Гидродинамическая теория решеток. М., Гостехиздат, 1949.
9. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
10. Bratt J. B. Flow patterns in the wake of an oscillating aerofoil. Aeronaut. Res. Concl Repts and Mem., 1953, No. 2773.
11. Виноградов Р. И. Зависимость параметров вихревой обращенной дорожки от числа Струхали. Изв. вузов, Сер. Авиац. техн., 1959, № 4.
12. Голубев В. В. Труды по аэродинамике. М.—Л., Гостехиздат, 1957.