

УДК 533.6.013.2.011.5:029.7.025.73

К ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ НА КЛИНЕ, ДВИЖУЩЕМСЯ СО СВЕРХЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

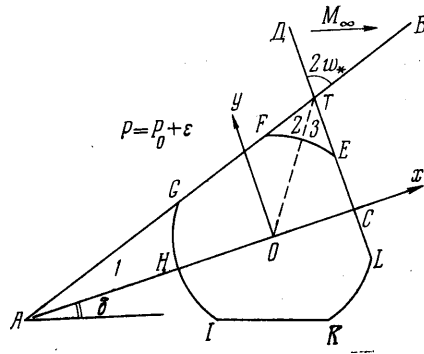
В. П. КОЛГАН

(Москва)

Рассмотрено поле течения при дифракции ударной волны на движущемся клине в случае малых изменений условий, при которых картина дифракции достаточно проста.

Проблема дифракции ударной волны исследовалась в работах Лайтхилла [1], Тинга и Лудлоффа [2], которые получили решение задачи о дифракции скачка произвольной интенсивности на неподвижных тонких телах. Ряд работ [3, 4] посвящен изучению картины дифракции на движущихся телах в частных случаях, когда возможно введение малого параметра. В работе [3] найдены специальные условия, налагаемые на параметры задачи для реализации простой картины дифракции на движущемся клине. Влияние малых отклонений параметров задачи от точных значений рассматривалось также в работе [4].

1. Постановка задачи. Пусть бесконечный клин движется (фиг. 1) с таким числом Маха M_∞ , что угол между присоединенной ударной волной и нормалью к верхней поверхности клина равен $2\omega_*$ (ω_* — критический угол падения ударной волны). Навстречу клину в направлении, параллельном верхней поверхности клина, распространяется плоская ударная волна, интенсивность которой равна интенсивности присоединенной волны. При указанных условиях все ударные волны, участвующие во взаимодействии, остаются прямолинейными; внутри области АТС будет течение с постоянными параметрами.



Фиг. 1

Угол падения и интенсивность набегающей ударной волны, а также угол между присоединенной ударной волной и клином могут в действительности отличаться от тех точных значений, которые требуются для реализации описанной картины течения. Предположим, что малые отклонения этих параметров от заданных значений вызывают малые возмущения в области АТС. Выберем систему координат (x', y') так, чтобы ось x' была направлена вдоль стенки клина, а начало координат свяжем с частицей, которая в момент начала ($t = 0$) взаимодействия волн находилась в носике клина. При наличии возмущений внешних параметров в первом приближении существенно неоднородное возмущенное течение будет ограничено звуковой окружностью с центром в начале координат, а в области 1, прилежащей к точке А, и в областях 2 и 3, прилежащих к точке Т, будут течения с постоянными значениями возмущений. В общем случае при наличии возмущений области 2 и 3 разделяются контактным разрывом OT , проходящим также и через область неоднородного течения. В данной работе ограничимся рассмотрением таких невозмущенных состояний карти-

ны дифракции, чтобы точка T пересечения скачков FG и EC находилась вне звуковой окружности.

Так как в задаче отсутствует характерный размер, удобно перейти к автомодельным переменным

$$x = \frac{x'}{ct}, \quad y = \frac{y'}{ct} \quad (1.1)$$

где c — скорость звука в возмущенной области.

Формулируя задачу только для возмущения давления p , можно в первом приближении записать уравнения газовой динамики в виде одного уравнения второго порядка относительно p

$$(x^2 - 1)p_{xx} + 2xyp_{xy} + (y^2 - 1)p_{yy} + 2(xp_x + yp_y) = 0 \quad (1.2)$$

Запишем граничные условия для уравнения (1.2). Вдоль CE выполняется условие, полученное из соотношений на ударной волне

$$yp_x + (B_1 - A_1 y^2)p_y = 0 \quad (1.3)$$

$$A_1 = \frac{\Omega + M}{1 - M^2}, \quad B_1 = \frac{1}{2M}, \quad \Omega = \frac{1}{2M} \frac{(3\gamma - 1)M^2 + 3 - \gamma}{M^2(\gamma - 1) + 2}$$

где M — число Маха для газа в возмущенной области относительно ударной волны CE , γ — показатель адиабаты.

Вдоль ударной волны GF выполняется аналогичное (1.3) условие, получаемое из (1.3) преобразованием поворота координат на угол $(\pi - 2\omega_*)$.

Вдоль дуг единичной окружности GH и EF возмущение давления p принимает соответственно значения p_1 и p_2 , определяемые через возмущения параметров задачи. На линии HC , соответствующей стенке, должно выполняться условие непротекания

$$p_y = 0 \quad (1.4)$$

Кроме того, из физических соображений ясно, что возмущение вертикальной скорости v должно быть непрерывной функцией вдоль скачка CE , так как поверхность ударной волны не может иметь ступенчатых разрывов. Из соотношений на ударной волне следует связь между возмущениями v и p

$$\frac{2M^2 R c}{1 - M^2} v_y = \frac{p_y}{y} \quad (1.5)$$

где R — плотность газа в возмущенной области.

Интегрируя (1.5) вдоль ударной волны CE , получаем

$$\int_{CE} \frac{p_y dy}{y} = \frac{2M^2 R c}{1 - M^2} v_E \quad (1.6)$$

где v_E — возмущение вертикальной скорости v в точке E , возмущение v на HC всюду равно нулю.

Аналогичное интегральное соотношение должно выполняться также и на втором скачке GF (в его правую часть войдет разность между возмущениями касательной к скачку скорости в точках G и F).

Итак, сформулированная для возмущения давления задача сводится к отысканию решения уравнения (1.2), удовлетворяющего кроме двух указанных выше дифференциальных граничных условий вида (1.3) и усло-

вий постоянства давлений на дугах единичной окружности еще и двум интегральным соотношениям вдоль скачков CE и GF вида (1.6). Если функция p будет найдена, то возмущения плотности и компонент скоростей найдутся простыми квадратурами.

2. Сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению. Известно, что уравнение (1.2) при помощи преобразования Буземана можно свести к уравнению Лапласа, фундаментальным решением которого является источник вида

$$\varphi = \ln |r - r_0| \quad (2.1)$$

Если в плоскости, которая соответствует переменным уравнения Лапласа, взять два источника противоположной интенсивности и расположить их в точках, взаимно сопряженных относительно единичной окружности, то с помощью обратного преобразования Буземана можно получить выражение для источника, удовлетворяющего уравнению (1.2) (с точностью до множителя и слагаемого, зависящих от ξ и η)

$$\varphi(x, y, \xi, \eta) = (1 - \xi^2 - \eta^2)^{-1/2} \ln \frac{[(1 - x\xi - y\eta)^2 - (1 - x^2 - y^2)(1 - \xi^2 - \eta^2)]^{1/2}}{1 - x\xi - y\eta - [(1 - x^2 - y^2)(1 - \xi^2 - \eta^2)]^{1/2}} \quad (2.2)$$

$$(x^2 + y^2 < 1, \xi^2 + \eta^2 < 1)$$

В предельном случае $x^2 + y^2 \rightarrow 1$ выражение для $\varphi(x, y, \xi, \eta)$ переходит в

$$\varphi(x, y, \xi, \eta) = \frac{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}{1 - x\xi - y\eta} \quad (\xi^2 + \eta^2 = 1) \quad (2.3)$$

Будем искать решение $p(x, y)$ в виде контурного интеграла

$$p(x, y) = \oint_C g(s) \varphi(x, y, \xi, \eta) ds \quad (2.4)$$

В качестве контура C возьмем границу всего многоугольника $EFGIKL$; для выполнения условия непротекания на стенке будем считать, что источники расположены симметрично относительно HC .

Отметим некоторые свойства интеграла (2.4). При подходе к дуге единичной окружности изнутри контура справедливо следующее равенство (предполагается непрерывность функции g):

$$\lim p(x, y) = 2\pi g(x, y), \quad x^2 + y^2 \rightarrow 1-0 \quad (2.5)$$

Из равенства (2.5) сразу определяется интенсивность источников на дугах EF , KL и GI . Отметим, что части интеграла (2.4), соответствующие дугам единичной окружности с постоянной интенсивностью источников на них, можно проинтегрировать аналитически. Приведем выражение, дающее заданное значение возмущения давления p_1 на дуге GI и нуль на всей остальной части единичной окружности

$$F_1(x, y) = \frac{p_1}{\pi} \operatorname{arccos} \frac{1 + R_1 x}{\sqrt{(x + R_1)^2 + y^2(1 - R_1^2)}} \quad (2.6)$$

где $R_1 = 1 / \cos \varphi$, φ — длина дуги GH .

Рассмотрим поведение производных интеграла (2.4) при подходе к ударной волне EL изнутри контура. Можно показать, что предельное значение касательной производной p_y при подходе к ударной волне совпадает со значением p_y на самой волне, а предельное значение нормальной производной p_x не совпадает со значением p_x на контуре. Именно

$$\begin{cases} p_y(M-0, y) = p_y(M, y) \\ p_x(M-0, y) = p_x(M, y) + \frac{\pi}{1-M^2} g(M, y) \end{cases} \quad (2.7)$$

Аналогичные равенства справедливы и для скачка FG .

Будем в выражении (1.3) понимать значения p_x и p_y как предельные значения соответствующих производных. Тогда для участка EL подстановкой (2.7) в (1.3) получим после несложных выкладок уравнение для интенсивности $g_1(y)$ на участке EL

$$\begin{aligned} a(y)g_1(y) + \frac{b(y)}{\pi} \int_{-k}^k \frac{g_1(\eta) d\eta}{\eta - y} + c(y)\Phi(y) &= 0 \quad (2.8) \\ a(y) &= y(k^2 - y^2)^{1/2} [y^2(k^2 - y^2) + (B_1 - A_0 y^2)^2 k^4]^{-1/2} \\ b(y) &= k^2 (B_1 - A_0 y^2) [y^2(k^2 - y^2) + (B_1 - A_0 y^2)^2 k^4]^{-1/2} \\ c(y) &= k^2 \pi^{-1} [y^2(k^2 - y^2) + (B_1 - A_0 y^2)^2 k^4]^{-1/2} \\ A_0 &= A_1 - \frac{M}{1 - M^2}, \quad k = \sqrt{1 - M^2} \\ \Phi(y) &= \sqrt{k^2 - y^2} (yJ_{1x} + (B_1 - A_1 y^2)J_{1y}) \end{aligned}$$

где J_{1x} и J_{1y} — производные по x и по y от давления, индуцируемого в точке (M, y) участка EL всеми источниками контура, исключая сам участок EL .

Отметим, что аналогичное (2.8) уравнение можно составить и для функции g_2 , характеризующей интенсивность распределенных источников на участке GF . В уравнении для g_1 значение функции g_1 в свободный член $c(y)\Phi(y)$ не входит, в то время как в уравнении для g_2 значение g_2 входит в свободный член $c(y)\Phi(y)$ из-за зеркальной симметрии участков FG и IK . Уравнения вида (2.8) относятся к классу полных сингулярных интегральных уравнений для разомкнутых контуров.

3. О решении характеристического уравнения. Регуляризация основных уравнений. Рассмотрим характеристическое уравнение для уравнения (2.8)

$$a(y)f(y) + \frac{b(y)}{\pi} \int_{-k}^k \frac{f(\eta) d\eta}{\eta - y} = 0 \quad (3.1)$$

Будем искать решение уравнения (3.1) в классе ограниченных функций. Для уравнения (3.1) индекс уравнения κ в классе ограниченных функций равен единице. Решение уравнения (3.1), соответствующее выбранному κ , записывается в квадратурах

$$f(y) = \sqrt{k^2 - y^2} b(y) \exp \Gamma(y) \quad (3.2)$$

где

$$\Gamma(y) = - \frac{k^2}{\pi} \int_0^k \frac{\ln |y^2 - \tau^2|}{\sqrt{k^2 - \tau^2}} \frac{2A_0 \tau^2 (k^2 - \tau^2) + (B_1 - A_0 \tau^2)(k^2 - 2\tau^2)}{\tau^2 (k^2 - \tau^2) + (B_1 - A_0 \tau^2)^2 k^4} d\tau$$

Решение (3.2) записано с точностью до постоянного множителя. Полученное в явном виде решение характеристического уравнения (3.2) позволяет провести для уравнений типа (2.8) регуляризацию решением характеристического уравнения. Причем так как решение (3.2) представляет собой ограниченную функцию, то и решение полного уравнения вида (2.8) будет ограниченной функцией, и вычисленное по формуле (2.4) возмущение давления тоже будет ограниченной функцией. В итоге после регуляризации получаем следующее интегральное уравнение для участка EL :

$$g_1(y) + \int_{C'} L_1 [\sqrt{k^2 - y^2} (y i_x + (B_1 - A_1 y^2) i_y)] ds + C_1 f(y) = 0 \quad (3.3)$$

где оператор L_1 введен по формуле

$$L_1 [z(y)] = a(y) c(y) z(y) - \frac{f(y)}{\pi} \int_{-k}^k \frac{c(\tau) z(\tau)}{f(\tau)(\tau - y)} d\tau$$

i_x и i_y — производные по x и по y от давления, индуцируемого в точке (M, y) участка EL элементарным источником, который принадлежит контуру C' (C' — контур, окружающий область неоднородного течения, исключая участок EL); C_1 — произвольная константа. Отметим, что значение функции $g_1(y)$ в интеграл по C' не входит.

Аналогичное (3.3) уравнение получается после регуляризации уравнения относительно g_2 на участке GF

$$g_2(y) + \int_{C''} L_1 [\sqrt{k^2 - y^2} (y i_x + (B_1 - A_1 y^2) i_y)] ds + C_2 f(y) = 0 \quad (3.4)$$

В качестве контура интегрирования C'' , аналогичного контуру C' , берется граница возмущенного течения, исключая участок GF . Отметим, что в интеграл по C'' значение функции g_2 входит из-за зеркальной симметрии интенсивности источников на участках GF и IK .

Из теории особых интегральных уравнений следует, что уравнения (3.3), (3.4) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, которые можно решать приближенными численными методами. Итак, задача сведена к совместному решению двух интегральных уравнений с непрерывным ядром. Значения произвольных констант C_1 и C_2 определяются из двух условий нормировки вида (1.6).

4. Решение уравнений на ЭВМ. Примеры расчетов. Для получения решения применим следующую приближенную схему. Участок CE и GF разобьем соответственно на N и $2N$ равных частей и приближенно примем, что на каждом элементарном отрезке функция g постоянна. Интегралы в выражениях вида (3.3), (3.4) и (1.6) заменим конечными суммами.

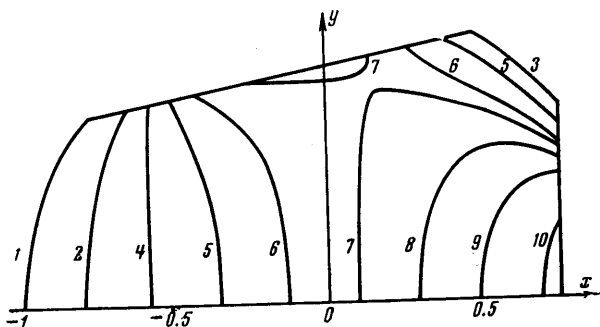
Пусть теперь в выражениях (3.3) и (3.4) переменная y пробегает ряд значений, соответствующих середине каждого элементарного отрезка. Тогда из (3.3), (3.4) и двух условий нормировки вида (1.6) получаем систему $3N + 2$ алгебраических линейных уравнений относительно значений функции g на каждом элементарном участке g_i ($i = 1, 2, \dots, 3N$) и констант C_1 и C_2 . Коэффициенты этой системы выражаются через интегралы, содержащие интегрируемые особенности. Каждый из этих интегралов был сведен к интегралу от непрерывной функции путем выделения главной части. Особенный случай возникает при вычислении интеграла типа (1.6), а именно в той его части, где область интегрирования по двум переменным совпадает с нормируемым участком. Очень удобно в этом случае применять извест-

ную формулу перестановки в двойных интегралах [7]. Например, для участка EL

$$\int_{-k}^k \frac{dy}{y} \int_{-k}^k g_1(\eta) \varphi_v(M, y, M, \eta) d\eta = \int_{-k}^k \frac{dy}{y} \int_{-k}^k \frac{g_1(\eta) d\eta}{\sqrt{k^2 - y^2(\eta - y)}} =$$

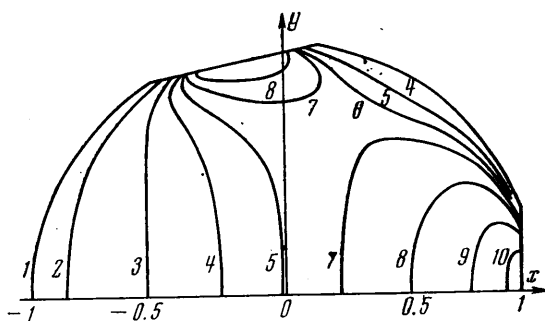
$$= -\frac{\pi^2 g_1(0)}{k} + \int_{-k}^k g_1(\eta) \int_{-k}^k \frac{dy}{y \sqrt{k^2 - y^2(\eta - y)}} = -\frac{\pi^2 g_1(0)}{k} \quad (4.1)$$

По описанному выше методу была составлена программа расчета для ЭВМ. Возмущения внешнего потока выражались в том, что интенсивность набегающей на клин ударной волны отличалась на малую величину ε от расчетного значения, при котором осуществлялось точное решение, описанное в работе [5]. Расчеты показали, что при увеличении числа N , характеризующего точность полученного решения, функция g быстро стремится к своему предельному значению, а вычисленное по формуле



Фиг. 2

(2.4) давление $p(x, y)$ при больших значениях N практически не зависит от N . Приводимые ниже результаты были получены при показателе адиабаты $\gamma = 1.4$ и числе $N = 48$. На фиг. 2, 3 приведены линии постоянных значений возмущения давления $p/\varepsilon = \text{const}$ для чисел Маха набегающего на клин потока $M_\infty = 4.3, 4.8$, что соответствует углам движущегося клина $\delta = 7.36^\circ, 1.39^\circ$. Перепад давления на фрон-



Фиг. 3

те присоединенной к клину ударной волны соответственно принимает значения $\Delta p/p = 1.097, 0.179$. Кривые 1-10 определяются численными значениями параметра p/ε , указанными в скобках соответственно для фиг. 2 и фиг. 3.

1(1.7459, 1.14755), 2(1.7557, 1.14760), 3(1.7578, 1.14763), 4(1.7597, 1.14766), 5(1.7625, 1.14767), 6(1.7647, 1.14768), 7(1.7665, 1.14769), 8(1.7683, 1.14771), 9(1.7707, 1.14774), 10(1.7752, 1.14781).

Из полученных расчетов следует, что при увеличении перепада в набегающей ударной волне по сравнению с расчетной величиной, при которой реализуется достаточной простая картина взаимодействия, в возмущенной области от центра звуковой окружности к носу клина распространяется волна сжатия и, наоборот, при перепаде в набегающей волне, меньшем расчетного, к носу двигается волна расширения. Можно ожидать, что в действительном течении при увеличении интенсивности набегающей ударной волны внутри возмущенной области вместо волны сжатия сформируется ударная волна.

Поступило 13 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast. I. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1949, vol. 198, pp. 454—470.
2. Ting L., Ludloff H. F. Aerodynamics of blasts. J. Aeronaut. Sci., 1952, vol. 19, No. 5, pp. 317—328.
3. Smyrn J. L. The impact of a shock-wave on a thin two-dimensional aerofoil moving at supersonic speed. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, pt. 2.
4. Тер-Минасянц С. М. Задача о дифракции плоской волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 4.
5. Голубинский А. И. Набегание ударной волны на клин, движущийся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
6. Бежанов К. А. Дифракция ударной волны на клине, движущемся со сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
7. Чахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1958.