

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zijlstra W. G., Mook G. A. Medical reflection photometry. Assen, 1962.
2. Brinkman R., Zijlstra W. G., Jansonius N. J. Quantitative evaluation of the rate of rouleaux formation of erythrocytes by measuring light reflection («syllectometry»). Koninkl. Nederl. Acad. van Wetenschappen, Amsterdam, Proc. Ser. C., 1963, vol. 66, No. 3.
3. Jansonius N. J., Zijlstra W. G. Various factors influencing rouleaux formation of erythrocytes studied with the aid of syllectometry. Koninkl. Nederl. Acad. van Wetenschappen, Amsterdam, Proc., Ser. C, 1965, vol. 68, No. 2.
4. Mook G. A., Osypka P., Sturm R. E., Wood E. H. Fibre optic reflection photometry on blood. Cardiovasc. Res., 1968, vol. 2, No. 1.
5. Павловский Ю. Н., Регирер С. А., Скобелева И. М. Гидродинамика крови. Итоги науки. Гидромеханика, 1968, М., ВИНТИ, 1970.
6. Lew H. S., Fung Y. C. Entry flow into blood vessels at arbitrary Reynolds number. J. Biomech., 1970, vol. 3, No. 1.
7. Cokelet G. R., Merrill E. W., Gilliland E. R., Shin H., Britten A., Wells R. E. The rheology of human blood-measurement near and at a zero shear rate. Trans. Soc. Rheol., 1963, vol. 7.
8. Попель А. С., Регирер С. А. Об основных уравнениях гидродинамики крови. Научн. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 1.
9. Левтов В. А., Шадрин Н. Х. О зависимости яркости крови от скорости кровотока. Физиол. ж., 1971, № 1.

УДК 532.546.013.2:532.546.06

### НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗ ЭКРАНИРОВАННЫХ ВОДОХРАНИЛИЩ И НАКОПИТЕЛЕЙ ПРОМСТОКОВ

Б. С. ШЕРЖУКОВ

(Москва)

Рассмотрена осесимметричная задача неустановившейся фильтрации из водохранилища или накопителя промстоков круговой в плане формы.

Расчеты фильтрации из водохранилищ наливного типа, накопителей промстоков и растворохранилищ производятся обычно в предположении, что уровень на границе (в водохранилище или накопителе) постоянен [1-4]. Зависимости для ступенчатого графика изменения уровня во времени получают суперпозицией решений, отвечающих первому случаю. Получены также решения для условий изменения уровня на границе во времени по некоторому заранее заданному закону: линейному [5], степенному [6] или параболическому [7]. Вместе с тем при решении многих задач требуется принимать условия постоянства подаваемого в водохранилище или накопитель расхода жидкости, когда фильтрационный расход, а следовательно, и уровень на границе заранее неизвестны и должны определяться из решений самой задачи. Одномерная задача неустановившейся фильтрации из водохранилищ и накопителей промстоков удлиненной в плане формы с заданным постоянным расходом подачи или отбора жидкости рассмотрена Н. Н. Веригиным и автором в работе [8]. При этом учитывались неполнота вскрытия водоносного горизонта и сопротивление противофильтрационного экрана.

Считаем, что накопитель (или водохранилище) радиуса  $r_0$  выполняется в водонепроницаемом пласте с постоянной проводимостью  $km = \text{const}$ , где  $k$  и  $m$  — коэффициент фильтрации и мощность нижнего проводящего пласта (фиг. 1). Уровень подземных вод располагается в покровном слое грунта с коэффициентом фильтрации  $k^*$  и свободной пористостью  $\delta$ , причем  $k^* \ll k$ ; начальное значение напора в нижнем пласте  $h_0 = \text{const}$ . Накопитель имеет экранирующую облицовку толщиной  $m_0$  с коэффициентом фильтрации  $k_0$ ; мощность грунтов в его основании  $m_1$ .

Во внутренней области  $0 \leq r \leq r_0$  под накопителем принимается жесткий режим фильтрации, характеризуемый дифференциальным уравнением [9]

$$\frac{d^2 h_1}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dh_1}{dr} - \gamma [h_1 - H(t)] = 0, \quad \gamma^2 = \frac{k_0}{km_0 m_1} \quad (1)$$

где  $h_1(r)$  и  $H(t)$  — напоры в области под накопителем и в самом накопителе.



Решение уравнения (11) при использовании условия (13) записывается в виде

$$u - h_0 / p = CK_0(\beta r), \quad \beta = (p/a)^{1/2} \quad (14)$$

где постоянная  $C$  определяется подстановкой (14) в условие (12). В результате получаем

$$C = \frac{H_0 - h_0 + Q/\pi r_0^2 p}{\beta \psi} \quad (15)$$

$$\psi = \beta \left[ a\beta K_0(\beta r_0) + \frac{1}{\alpha} \left( p + \frac{2kma}{r_0} \right) K_1(\beta r_0) \right]$$

Изображение (14) может быть представлено в виде суммы двух функций

$$u - h_0 / p = u_1 + u_2 \quad (16)$$

Принимая за плоскость отсчета напоров начальное положение уровня подземных вод в пласте, т. е. переходя к понижениям (или повышениям) напора относительно этой плоскости, выразим искомое решение задачи по аналогии с (16) также в виде суммы частных решений

$$h(r, t) - h_0 = s(r, t) = s_1 + s_2 \quad (17)$$

Первый член этой суммы  $s_1$  представляет собой отклик на мгновенный импульс понижения или повышения напора на границе (в накопителе) в момент времени  $t = 0$ , а второй  $s_2$  характеризует перераспределение напоров в пласте под действием подачи в накопитель постоянного расхода жидкости  $Q$ . Если

$$u_1 = \frac{(H_0 - h_0)K_0(\beta r)}{\beta \psi} \quad (18)$$

то

$$u_2 = \frac{Q}{\pi r_0^2 (H_0 - h_0)} \frac{u_1}{p} \quad (19)$$

Переход к оригиналу осуществляется по формуле обращения Римана — Меллина. Имеем для оригинала функции (18)

$$s_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} u_1(r, p) e^{pt} dp \quad (20)$$

В связи с наличием одной точки ветвления подынтегральной функции при  $p = 0$  интегрирование в (20) производится по контуру, состоящему из малой окружности радиуса  $\epsilon$ , заключающей точку ветвления и соединенной разрезом с большой полуокружностью радиуса  $R \rightarrow \infty$ , которая расположена слева от мнимой оси.

Получаем

$$s_1(r, t) = \frac{2}{\pi} (H_0 - h_0) \int_0^\infty \frac{M(\mu)}{N(\mu)} e^{-\mu^2 \tau} d\mu \quad \left( \tau = \frac{at}{r_0^2} \right) \quad (21)$$

$$M(\mu) = J_0(\mu r^*) [\mu Y_0(\mu) - 0.5(4\delta - \zeta \mu^2) Y_1(\mu)] - Y_0(\mu r^*) [\mu J_0(\mu) - 0.5(4\delta - \zeta \mu^2) J_1(\mu)]$$

$$N(\mu) = [\mu J_0(\mu) - 0.5(4\delta - \zeta \mu^2) J_1(\mu)]^2 + [\mu Y_0(\mu) - 0.5(4\delta - \zeta \mu^2) Y_1(\mu)]^2$$

$$(\zeta = 2/a r_0)$$

$$(r^* = r/r_0)$$

Для оригинала (19) по теореме интегрирования оригиналов имеем

$$s_2(r, t) = \frac{Q}{\pi r_0^2 (H_0 - h_0)} \int_0^t s_1(r, \theta) d\theta \quad (22)$$

Наибольший практический интерес представляет определение величины фильтрационного расхода, поступающего из накопителя в пласт, и динамики уровня

в самом накопителе. Для получения этих величин необходимо иметь значения напора  $h$  и его градиента  $\partial h / \partial r$  на границе  $r = r_0$ .

Из (21) при  $r = r_0$  с использованием известного соотношения

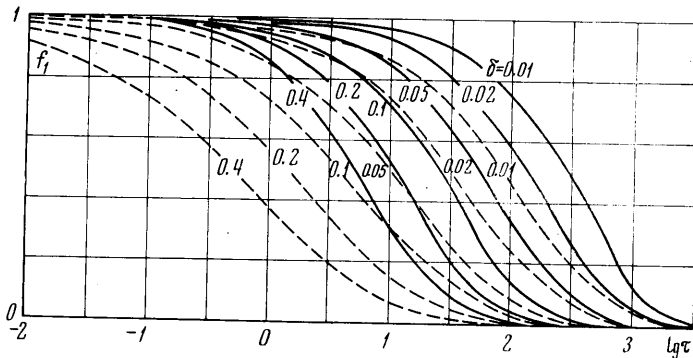
$$J_0(\mu) Y_1(\mu) - J_1(\mu) Y_0(\mu) = -2 / \mu$$

получаем

$$s_1(r_0, t) = \frac{2}{\pi^2} (H_0 - h_0) \int_0^{\infty} \frac{(4\delta - \zeta \mu^2) e^{-\mu^2 \tau}}{N} \frac{d\mu}{\mu} \quad (23)$$

Используя этот результат в (22), имеем

$$s_2(r_0, t) = \frac{2Q}{\pi^3 a} \int_0^{\infty} \frac{(4\delta - \zeta \mu^2)}{N} (1 - e^{-\mu^2 \tau}) \frac{d\mu}{\mu^3} \quad (24)$$



Фиг. 2

Градиенты понижений при  $r = r_0$  находятся дифференцированием выражений (21) и (22), что дает

$$\frac{\partial s_1(r_0, t)}{\partial r} = -\frac{4}{\pi^2} \frac{(H_0 - h_0)}{r_0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu^2 \tau}}{N} \mu d\mu \quad (25)$$

$$\frac{\partial s_2(r_0, t)}{\partial r} = -\frac{4}{\pi^3} \frac{Q}{a r_0} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\mu^2 \tau}}{N} \frac{d\mu}{\mu} \quad (26)$$

Фильтрационный расход, поступающий из накопителя в пласт, равен

$$Q_0 = -2\pi r_0 k m \partial s / \partial r |_{r=r_0} \quad (27)$$

или с учетом (25) и (26)

$$Q_0 = Q_1 + Q_2 = km(H_0 - h_0)\varphi_1 + Q\varphi_2 \quad (28)$$

$$\varphi_1(\delta, \zeta, \tau) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu^2 \tau}}{N} \mu d\mu, \quad \varphi_2(\delta, \zeta, \tau) = 1 - \frac{8\delta}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu^2 \tau}}{N} \frac{d\mu}{\mu}$$

Для определения динамики уровня в накопителе используется соотношение (8), которое в принятой системе отсчета напоров может быть записано так:

$$H(t) - h_0 = S(t) = S_1 + S_2, \quad S_{1,2} = S_{1,2}(r_0, t) - \frac{\zeta r_0}{2} \frac{\partial S_{1,2}(r_0, t)}{\partial r} \quad (29)$$

Отсюда, подставляя выражения (23) и (24), имеем

$$S_1(t) = (H_0 - h_0) f_1, \quad f_1(\delta, \zeta, \tau) = \frac{8\delta}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\mu^2 \tau}}{N} \frac{d\mu}{\mu} \quad (30)$$

$$S_2(t) = \frac{Q}{\pi a} f_2, \quad f_2(\delta, \zeta, \tau) = \frac{8\delta}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\mu^2 \tau}}{N} \frac{d\mu}{\mu^3} \quad (31)$$

Нетрудно заметить, что

$$f_2 = \int_0^\tau f_1 d\tau, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{\delta} \frac{\partial f_1}{\partial \tau}$$

Сопоставление функций  $\varphi_2$  в (28) и  $f_1$  в (30) показывает, что  $\varphi_2 = 1 - f_1$ . Эта зависимость отвечает физически очевидному факту накопления разности между подаваемым и фильтрующимся расходами жидкости, которое вызывает подъем уровня в накопителе.

Участвующие в решении задачи вспомогательные функции  $\varphi_{1,2}$  и  $f_{1,2}$  протабулированы (вычисления производились на ЭЦВМ БЭСМ-2М А. С. Малышевым) и представлены в виде графиков. На фиг. 2 и фиг. 3 представлены графики функций  $f_1$  и  $f_2$  только для значений коэффициента сопротивления  $\zeta = 0$  (штриховые линии) и  $\zeta = 10$  (сплошные линии). Сопоставление кривых, отвечающих этим значениям, иллюстрирует большую роль учета сопротивления экранов и грунтов основания накопителя промстоков или водохранилища при расчетах фильтрации из этих сооружений.

Получим также асимптотические формы решения задачи. При малых значениях времени  $\tau \leq 0.1$  (больших  $\beta$ ) в выражении (14) возможна замена функций Бесселя их асимптотическим представлением при больших значениях аргумента

$$K_n(z) \approx \sqrt{1/2\pi} / ze^{-z}$$

Тогда при  $r = r_0$  имеем

$$u(r_0) = \frac{\alpha \sqrt{a} (H_0 - h_0 + Q/\pi r_0^2 p)}{\sqrt{p} (p + \alpha \sqrt{a} \sqrt{p} + g)}, \quad g = \frac{2k\tau a}{r_0} \quad (32)$$

Переход к оригиналу в (32) дает уже известное решение [8] для случая линейной фильтрации из накопителя промстоков удлиненной в плане формы с расходом на единицу площади зеркала  $q = Q/\pi r_0^2$ .

При больших значениях времени  $\tau \geq 10$  и достаточно больших величинах сопротивления экрана накопителя  $\zeta \geq 10$

$$K_1(z) \approx 1/z, \quad K_0(z) \ll K_1(z)$$

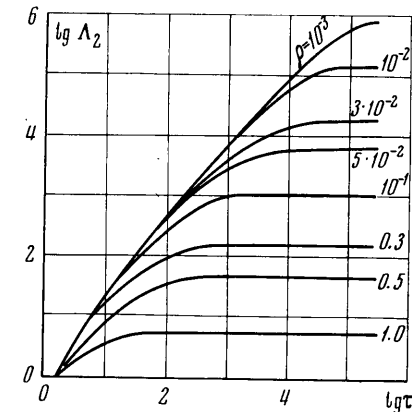
Тогда из (18) получаем

$$u_1(r_0) = (H_0 - h_0) \frac{2K_0(\beta r_0)}{\zeta(p + g)} \quad (33)$$

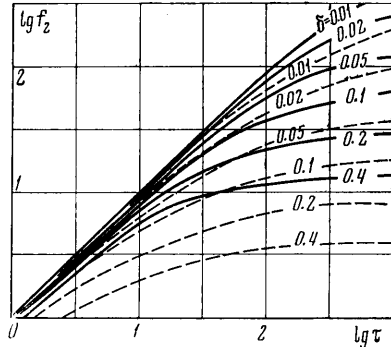
Переход к оригиналу дает выражение для понижений уровня за экранирующей облицовкой накопителя

$$s_1(r_0, t) = \frac{H_0 - h_0}{\zeta} \Lambda_1(w, \rho) \quad \left( w = \frac{r_0^2}{4at} \right) \quad (34)$$

$$\Lambda_1(w, \rho) = \exp \frac{-\rho^2}{4w} \int_w^\infty \exp \left( \frac{\rho^2}{4v} - v \right) \frac{dv}{v} \quad \left( \rho^2 = \frac{4\delta}{\zeta} \right)$$



Фиг. 4



Фиг. 3

Таблица и график функции  $\Lambda_1$  приводятся в работе Ф. М. Бочевера [10].  
 Дальнейший переход к величинам фильтрационного расхода и изменений уровня в накопителе приводит к зависимостям вида (28), (30) и (31), в которых вместо  $\Phi_{1,2}$  и  $f_{1,2}$  в случае больших значений  $\tau$  вводятся функции

$$\begin{aligned} \Phi_1^* &= \frac{4\pi}{\zeta} \exp \frac{-\rho^2}{4w}, & \Phi_2^* &= 1 - \exp \frac{-\rho^2}{4w}, & f_1^* &:= \exp \frac{-\rho^2}{4w} + \frac{\Lambda_1}{\zeta} \\ f_2^* &= \left(1 - \exp \frac{-\rho^2}{4w}\right) \frac{\zeta}{2\delta} + \frac{\Lambda_2}{\zeta}, & \Lambda_2 &= \int_0^\tau \Lambda_1 d\tau \end{aligned} \quad (35)$$

График функции  $\Lambda_2$  приведен на фиг. 4.

В заключение отметим возможность применения полученных зависимостей для решения других технических задач. В принятых обозначениях аналогично решается задача о неустановившейся фильтрации в скважину с дополнительным сопротивлением  $\zeta$ , учитывающим ее несовершенство по характеру и степени вскрытия водоносного пласта (общий скин-эффект). При этом может быть реализована возможность определения фильтрационных параметров пласта  $k$  и  $a$ , а также показателя скин-эффекта  $\zeta$  по данным экспериментальных исследований скважин при режимах мгновенного налива или откачки и налива с постоянным дебитом. Без учета сопротивлений в призабойной зоне скважины такая задача рассмотрена ранее в работе [11]. К полученным здесь зависимостям сводится также решение задачи о температурном режиме цилиндрической полости в слое грунта неограниченной мощности, причем учитывается термическое сопротивление теплоизоляции и аккумуляция подаваемого с постоянной интенсивностью тепла.

Поступило 20 VIII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
2. Веригин Н. Н. О неустановившемся движении грунтовых вод вблизи водохранилищ. Докл. АН СССР, 1949, т. 66, № 6.
3. Веригин Н. Н. Методы прогноза движения грунтовых вод вблизи каналов и подпертых бьефов и их применение в районах Сталинградского гидроузла и ВДСК им. В. И. Ленина. ВНИИ ВОДГЕО, 1955.
4. Васильев С. В. Фильтрация из накопителя промстоков в неоднородных грунтах. Тр. ин-та ВОДГЕО, 1967, вып. 18.
5. Аверьянов С. Ф. Фильтрация из каналов и ее влияние на режим грунтовых вод. В сб. «Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод», Изд. АН СССР, 1956.
6. Чуйко В. М. Плоскопараллельная и радиальная задачи неустановившейся фильтрации с переменными граничными условиями. Тр. координационных совещаний по гидротехнике, 1966, вып. 25.
7. Веригин Н. Н. Режим грунтовых вод при наполнении и сработке водохранилищ. Гидротехн. ст-во, 1952, № 11.
8. Веригин Н. Н., Шержуков Б. С. Фильтрация из водохранилищ и накопителей промстоков с изменяющимся во времени уровнем. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 2, Новосибирск, «Наука», 1969.
9. Гамаюнов Н. И., Шержуков Б. С. О снижении пьезометрических напоров в подстилающих дренируемые грунты водоносных горизонтах. ПМТФ, 1962, № 1.
10. Бочевер Ф. М. Теория и практические методы гидрогеологических расчетов эксплуатационных запасов подземных вод. М., «Недра», 1968.
11. Шержуков Б. С., Гамаюнов Н. И. Методика расчета гидрогеологических параметров водоносных пластов при опробовании их опытной скважиной. Изв. вузов, Геология и разведка, 1964, № 5.