УДК 532.546.013.2

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ИЗ ОГРАНИЧЕННОГО ПЛАСТА В ОДИНОЧНУЮ СКВАЖИНУ

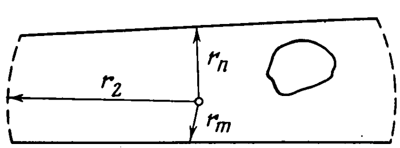
Т. Ф. ИВАНОВ

(*Харьков*)

Рассматривается задача пространственной фильтрации жидкости из неоднородного ограниченного пласта в одиночную скважину. Показано, что метод приводит к незначительным погрешностям даже в тех случаях, когда область фильтрации существенно отличается от круговой, а фильтрация — от радиальной.

При фильтрации жидкости (газа) в одиночную скважину некруговая форма области фильтрации, неоднородность пласта, несовершенство скважин и ряд других причин могут вызвать существенное отличие реального фильтрационного потока от радиального.

Для решения двухмерных плоских задач стационарной фильтрации в однородной пористой среде имеются достаточно общие аналитические и графические методы исследования [1, 2]. Однако методы эти сложны, а их распространение на двухмерные и тем более трехмерные задачи нестационарной или квазистационарной фильтрации при упругом режиме связано с большими вычислительными трудностями.



1. Пусть ось скважины совпадает с осью z цилиндрической системы координат (r, z, φ), непроницаемая кровля пласта совпадает с плоскостью $z = 0$ и непроницаемая подошва пласта совпадает с плоскостью $z = H$.

Далее полагаем, что внешняя граница области фильтрации в скважину образует поверхность вертикального цилиндра (в общем случае не круговую).

Проведем окружность с центром на оси z, радиус которой r_3 равен минимальному расстоянию от оси до контура (фигура).

Часть области фильтрации, заключенную в кольце между скважиной и окружностью радиуса r_3, обозначим D_1, а площадь не поперечного сечения — S_1. Внешнюю по отношению к D_1 часть области фильтрации обозначим через D_2, а площадь ее поперечного сечения — S_2.

Отметим следующее обстоятельство, имеющее важное значение при построении радиальных моделей фильтрации. При гидродинамических исследованиях скважин определяются осредненные по φ забойное давление [3] и радиальная составляющая скорости фильтрации в призабойной зоне (измерением дебитомерами в стволе скважины). Поэтому и при оценке падения давления в области фильтрации в зависимости от дебита скважины всегда имеется ввиду осредненное по φ давление.

Если $S_1 \gg S_2$, то для гидродинамических расчетов допустимо полагать область фильтрации круговой. Например, из работы Метьюса и др. [4] следует, что если $S_1 > 5S_2$, то погрешность при оценке падения пластового давления в замкнутой области фильтрации по расчетам на простейшей радиальной модели составляет не более 1—2%. Однако применение этого метода при $S_1 \leqslant S_2$ может привести к большим погрешностям.

Пусть плотность σ и кинематическая вязкость ν жидкости, пористость m, горизонтальная k_r и вертикальная k_z проницаемости пласта определяются уравнениями

$$\sigma=\sigma_0\Theta_\sigma(p-p_0),\quad \nu=\nu_0\Theta_\nu(p-p_0),\quad m=m_0(z)\Theta_m(p-p_0)$$
$$k_r=k_{r0}(z)\Theta_k(p-p_0),\quad k_z=k_{z0}(z)\Theta_k(p-p_0)\quad (p_0=\text{const})\tag{1.1}$$

Здесь $m_0(z)$, $k_{r0}(z)$, $k_{z0}(z)$ — непрерывные функции от z, соответствующие z — неоднородному пласту [5].

Далее полагаем, что функции Θ_m, Θ_σ, Θ_ν, Θ_k удовлетворяют условиям

$$\frac{d\Theta_m\Theta_\sigma}{dp}=\beta\frac{\Theta_\nu}{\Theta_k}=\beta\frac{d\Psi}{dp},\qquad \beta=\beta(\Psi)\tag{1.2}$$

Здесь Ψ — обобщенная функция Лейбензона. Учитывая (1.1), (1.2) и используя цилиндрическую систему координат (r, z, φ), запишем систему уравнений неразрывности и закона Дарси в виде

$$\beta\sigma_0 m_0(z)\frac{\partial\Psi}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}u_\varphi+\frac{\partial}{\partial z}u_z=0\tag{1.3}$$
$$\nu_0u_r=-k_{r0}(z)\frac{\partial\Psi}{\partial r},\quad \nu_0u_\varphi=-k_{r0}(z)\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi},\quad \nu_0u_z=-k_{z0}(z)\frac{\partial\Psi}{\partial z}$$

Интегрируя (1.3) по φ в пределах области фильтрации, получим после преобразований уравнения относительно осредненных по φ составляющих скорости $u^\circ(r)$, $u^\circ(z)$ и обобщенной функции Лейбензона Ψ°

$$\beta\sigma_0 m_0(z)\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r^\circ)+\frac{\partial}{\partial z}u_z^\circ+f(r,z)=0\tag{1.4}$$
$$\nu_0u_r^\circ=-k_{r0}(z)\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial r},\quad \nu_0u_z^\circ=-k_{z0}(z)\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial z},\quad \nu_0f(r,z)=-k_{r0}\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial\varphi}$$

В области D_1 функция $f(r,z)$ равна нулю. В области D_2 функция $f(r,z)$ в общем случае не равна нулю. Однако при построении приближенной радиальной модели области фильтрации будем этой функцией пренебрегать.

Проведем в горизонтальной плоскости окружность радиуса с центром на оси z. Длину всех частей окружности, проходящих внутри области фильтрации (фигура), обозначим через $l(r)$. Полагаем, что при любых r в $[r_1, r_2]$ величина $l(r)$ определяется равенством вида

$$l(r)=2\pi r[1+\rho(r)]^{-1}b[r_1,r_2],\ \rho(r)\equiv 0 \text{ в } [r_1,r_m]\tag{1.5}$$

Здесь r_2 — максимальное расстояние от оси скважин до контура.

Полагаем, что функция $\rho(r)$ непрерывна в промежутке $[r_1, r_2]$ и имеет внутри его непрерывную производную. Для построения радиальной модели области фильтрации полагаем, что проницаемость и пористость модели в кольцевой области $[r_3, r_2]$ связаны с пористостью и проницаемостью реального пласта зависимостью

$$m_0^*=\frac{m_0(z)}{1+\rho(r)},\quad k_{r0}^*=\frac{k_{r0}(z)}{1+\rho(r)},\quad k_{z0}^*=\frac{k_{z0}(z)}{1+\rho(r)}\quad \text{в } [r_3,r_2]\tag{1.6}$$

Отсюда и из (1.5) следует, что в любом кольцевом пространстве модели, ограниченном двумя окружностями, поровый объем равен поровому объему части реальной области фильтрации, заключенной между этими окружностями, а суммарная радиальная (вертикальная) проводимость модели при любых z и r равна соответственно суммарной радиальной (вертикальной) проводимости реального пласта.

Согласно (1.4), (1.6) уравнение фильтрации в радиальной модели описывается уравнением вида

$$\beta\mu_0 m_0(z)\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial t}=\frac{(1+\rho)k_{r0}}{r}\frac{\partial r}{\partial r}\left[r(1+\rho)^{-1}\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{z0}\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial z}\right) \quad (1.7)$$

По условию функция $\rho(z)$ всюду в области фильтрации непрерывна и имеет непрерывную первую производную. Поэтому уравнение (1.7) имеет непрерывные в кольце $[r_1, r_2]$ коэффициенты.

Если из ограниченной области фильтрации длительное время происходит постоянный отбор жидкости (газа), то изменение обобщенной функции Лейбензона во времени равно

$$\beta\mu_0\frac{\partial\Psi^\circ}{\partial t}=-2B_0, \qquad B_0=\text{const}$$

Введем потенциал Φ, определяемый равенством

$$\Phi(r, z)=\Psi^\circ-2m_0(z)B_0t$$

Отсюда и из (1.7) получим уравнение квазистационарной фильтрации

$$\frac{(1+\rho)k_{r0}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{1+\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{z0}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+2m_0(z)B_0=0 \qquad (1.8)$$

При $B_0=0$ из (1.8) имеем уравнение фильтрации в жесткой системе.

Решения уравнения (1.8), как и в случае кругового неоднородного пласта [5, 6], можно выразить в виде ряда функций методом разделения переменных

$$\Phi=\Phi_2+A\psi_0(r)+\varphi_0(z)+\sum_{n=1}a_n\varphi_n(z)\psi_n(r) \qquad (\Phi_2, A, a_n=\text{const}) \quad (1.9)$$

Здесь функции $\psi_0(r)$, $\varphi_0(z)$ определяются уравнениями

$$(1+\rho)\frac{d}{dr}\frac{r\psi'(r)}{1+\rho(r)}+2rB_0B_1=0, \qquad B_1=\frac{1}{H}\int_0^H\frac{m_0(z)}{k_{r0}(z)}dz \qquad (1.10)$$

$$\frac{d}{dz}[k_{z0}(z)\varphi_0'(z)]+2B_0[m_0(z)-B_1k_{r0}(z)]=0 \qquad (1.11)$$

Функции $\varphi_n(z)$, $\psi_n(r)$ $(n=1, 2, \ldots)$ определяются уравнениями

$$\frac{d}{dz}[k_{z0}\varphi_n'(z)]+c_n^2k_{r0}\varphi_n(z)=0, \qquad \varphi_n'(z)=0 \quad \text{при } z=0, H$$

$$(1+\rho)\frac{d}{dr}\left[\frac{r'\psi_n'(r)}{1+\rho}\right]-c_n^2r\psi_n(r)=0, \qquad c_n=\text{const} \qquad (1.12)$$

При фильтрации в жесткой системе $(B_0=0)$ функция $\varphi_0(z)$ тождественно равна нулю и все функции $\psi_n(z)$ должны удовлетворять условиям

$$\psi_n(r_2)=0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots) \qquad (1.13)$$

При упругом режиме фильтрации в замкнутой области должны выполняться условия

$$\psi_n'(r) = 0 \quad \text{при } r = r_2, \quad A = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.14}$$

Как и при радиальной фильтрации [5, 6], постоянными A, a_n в решении (1.9) следует распорядиться так, чтобы оно удовлетворяло с достаточной точностью условиям, заданным на стенках скважины. Рассмотренный метод обобщается также на случай, когда внутри области фильтрации имеются непроницаемые тела в виде вертикальных цилиндров, проходящих через всю мощность пласта. Контур одного из таких цилиндров показан на фигуре сплошной замкнутой кривой внутри области фильтрации. В этом случае использование радиальной модели также допустимо, если функция $\rho(r)$ непрерывна в промежутке $[r_1, r_2]$ и имеет внутри его непрерывную первую производную.

Рассмотрим несколько примеров использования радиальной модели при исследовании фильтрации из плоского пласта к совершенной скважине. В этом случае все постоянные a_n в решении (1.9) равны нулю и зависимость между падением потенциала и массовым дебитом скважины определяется равенством

$$\Delta\Phi = \frac{\nu_0 Q}{2\pi H k_{r0}} \left[\ln\frac{r_2}{r_1} + \int_{r_3}^{r_2} \frac{\rho}{r}\, dr \right] - B_0 B_1 \left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{2} + y \right)$$

$$y = \int_{r_3}^{r_2} \left[r\rho(r) - \frac{2(1+\rho)}{r} \int_{r_3}^{r} \frac{\eta\rho(\eta)\, d\eta}{1+\rho} \right] dr \tag{1.15}$$

При упругом режиме фильтрации в замкнутом пласте между B_0 и Q существует зависимость

$$Q\nu_0 = 2\pi H m_0 B_0 \left(r_2^2 - \int_{r_3}^{r_2} \frac{r\rho\, dr}{1+\rho} \right) = 2\pi H m_0 B_0 r_0^2$$

2. Пусть область фильтрации представлена частью горизонтального пласта, пересеченного двумя плоскими вертикальными сбросами, взаимно не пересекающимися внутри области (фигура) u, r_3 — расстояние от скважины до ближайшего сброса, z_4 — расстояние от скважины до второго сброса, r_2 — максимальное расстояние от оси z до контура.

Тогда введенная в п.1 функция $\rho(r)$ определяется равенствами

$$\rho(r) = 2\left(1 + \frac{2}{\pi} \arcsin r_3/r_2\right)^{-1} - 1 \qquad (r_3 \leqslant r \leqslant r_4)$$

$$\rho(r) = \pi(\arcsin r_3 / r_2 + \arcsin r_4 / r_2)^{-1} - 1 \qquad (r_4 \leqslant r) \tag{2.1}$$

Разделив (2.1) на r и проинтегрировав полученные равенства, имеем после преобразований

$$J = \ln\frac{r_2}{r_3} - 2\ln\frac{(\pi+2) r_2}{\pi r_2 + 2 r_3} - \left(1 - \frac{r_3}{r_2}\right) F_1, \quad a_0 = r_3, \quad (r_3 \leqslant r \leqslant r_4)$$

$$J = \frac{\pi(r_2 - r_4)}{r_3 + r_4} - (1 + F_2)\ln\frac{r_2}{r_4}, \quad a_0 = r_4 \quad (r_4 \leqslant r) \quad J = \int_{a_0}^{r_2} \frac{r\, dr}{1+\rho(r)} \tag{2.2}$$

Здесь F_1, F_2 — числа, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < F_1 < (\pi - 2)(\pi + 2)^{-1}, \qquad 0 < F_2 < 0.5(\pi - 2) \tag{2.3}$$

Из (1.15) и первого равенства (2.2) следует, что зависимость между установившимся дебитом скважины и падением потенциала в жесткой фильтрационной системе при наличии одного сброса определяется равенством

$$\frac{\Delta\Phi}{Q}=\frac{\nu_0}{2\pi Hk_{r0}}\left(\ln\frac{r_2}{r_1}+\ln\frac{r_2}{r_3}\right)(1-\Theta_1) \tag{2.4}$$

$$\Theta_1=\left[2\ln\frac{(\pi+2)r_2}{\pi r_2+2r_3}+F_1\left(1-\frac{r_3}{r_2}\right)\right]\left(\ln\frac{r_2}{r_1}+\ln\frac{r_2}{r_3}\right)^{-1}$$

При $r_2 \gg r_m$ функция Θ_1 стремится к нулю и первое равенство (2.4) преобразуется к виду

$$2\pi Hk_{r0}\Delta\Phi\approx\nu_0 Q(\ln r_2/r_1+\ln r_2/r_3) \tag{2.5}$$

В данном случае использование радиальной модели приводит к результату, который по крайней мере при $r_2 \gg r_3$ асимптотически стремится к тому же пределу, что и решение, получаемое при использовании задачи методом комплексных потенциалов [2]. Более того, использование предложенного метода построения радиальной модели приводит к асимптотически точному результату и при наличии двух не пересекающихся внутри области фильтрации сбросов. Пусть $r_3=r_4$. Тогда из второго равенства (2.2) и (1.15) имеем

$$\frac{\Delta\Phi}{Q}=\frac{\nu_0(r_2-r_3)}{4Hr_3k_{r0}}\left[1+\frac{2r_3\Theta_2}{\pi(r_2-r_3)}\right],\qquad \Theta_2=\left(\ln\frac{r_3}{r_1}-F_2\ln\frac{r_2}{r_3}\right) \tag{2.6}$$

при $r_2 \gg r_3$ уравнение (2.6) приводит к виду

$$4Hk_{r0}\Delta\Phi\approx\nu_0 Q(r_2-r_3) \tag{2.7}$$

С помощью графического построения [1] не трудно убедиться, что при $r_2 \gg r_3$ это уравнение асимптотически точно, хотя фильтрация в реальном пласте скорее плоскопараллельна, чем плоскорадиальна. При упругом режиме фильтрации в замкнутой области метод построения модели также приводит к незначительным погрешностям при оценке зависимости установившегося дебита скважины от падения потенциала.

Рассмотрим случай, когда в замкнутой области фильтрации имеются два взаимно параллельных сброса, находящихся на одинаковом расстоянии от скважины ($r_3=r_4$). Учитывая (1.15), (1.16), (2.2), можно показать, что в данном случае зависимость между падением потенциала и установившимся дебитом оценивается равенством

$$\frac{\Delta\Phi}{Q}=\frac{\nu_0}{2\pi Hk_{r0}}\left[\frac{\pi(r_2-r_3)}{2r_3}-\frac{r_2(r_2-r_3)}{r_0^2}+\Theta_2-\frac{\Theta_3}{r_0^2}\right]$$

$$\Theta_3=r_2r_3-\left(\frac{2}{3}E_2+\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi+2}\right)r_3^2 \tag{2.8}$$

$$\pi r_0^2=\pi r_2^2\arcsin\frac{r_3}{r_2}+2r_3\sqrt{r_2^2-r_3^2},\qquad 1<F_2<1.5$$

При $r_2 \gg r_3$ из последнего равенства (2.8) имеем

$$\pi r_0^2\approx 4r_2r_3\qquad (r_3=r_4\ll r_2)$$

Отсюда и из первого уравнения (2.8) получим после преобразований

$$8Hr_3k_{r0}\Delta\Phi \approx \nu_0 Q(r_2 - r_3) \qquad (r_2 \gg r_4 = r_3) \tag{2.9}$$

Для сравнения рассмотрим задачу о притоке жидкости (газа) к вертикальной скважине квадратного сечения со стороной $2r_1$ из замкнутой полосовой области, заключенной между двумя параллельными сбросами, находящимися на расстоянии $r = 2r_1$ один от другого.

Распределение потенциала определяется равенством

$$\Phi - \Phi_1 = \frac{Q\nu_0}{4Hr_1k_{r0}}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^{-1}\left(r - r_1 - \frac{r^2 - r_1^2}{2r_2}\right) \tag{2.10}$$

Зависимость между падением потенциала в замкнутой области и установившимся дебитом определяется равенством

$$\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{Q} = \frac{\nu_0(r_2 - r_1)}{8Hr_1k_{r0}} \tag{2.11}$$

При $r_2 \gg r_1$ зависимость между падением потенциала и дебитом в задаче с круглой скважиной должна быть такой же, как и в задаче с квадратной скважиной. Сравнение (2.11) с (2.9) при $r_1 = r_3 = r_4$ показывает, что в случае замкнутой области фильтрации, существенно отличной от радиальной, применение радиальной модели приводит к асимптотически точному выражению зависимости между падением потенциала и дебитом скважины.

Рассмотренные примеры убедительно показывают, что предложенный метод построения радиальной модели пространственной фильтрации вполне применим для гидродинамических расчетов зависимости между установившимся дебитом скважины и падением потенциалов как в жестких фильтрационных системах, так и в замкнутых областях при упругом режиме фильтрации.

Оценка такой зависимости имеет значение, например, при гидродинамических исследованиях неоднородных пластов, разрабатываемых при упругом режиме. Она позволяет учитывать искривление индикаторных линий за счет взаимодействия скважин в неоднородном пласте, полученных в результате исследования скважин на установившихся режимах.

Поступило 20 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехиздат, 1952.
2. Пилатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Недра», 1966.
3. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М., Гостоптехиздат, 1963.
4. Mattnews C. S., Lefkovits H. C. Studies on pressure distribution in bounded reservoirs at steady state. J. Petrol. Techn., 1955, vol. 7, No. 11, p. 182.
5. Иванов Т. Ф. О притоке жидкости к несовершенной скважине в неоднородном пласте. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
6. Иванов Т. Ф. О линейной изотермической фильтрации при упругом режиме в замкнутой области. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.