

УДК 536.546.013.2

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА

В. А. ИСЯКАЕВ, Г. Д. ЛИХОВОЛ

(Октябрьский)

Рассматриваются решения центрально-симметричных задач неустановившегося притока газа к опробователю пластов на каротажном кабеле в мощном пласте при постоянном давлении на стоке и изменяющемся в процессе заполнения газом замкнутого баллона опробователя.

В работах [1, 2] показано, что реальная геометрия фильтрации в мощных пластах близка к центрально-симметричной. Ниже рассматриваются решения двух задач неустановившегося притока газа к опробователю для уравнения центрально-симметричной фильтрации

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{m\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 p \frac{\partial p}{\partial r} \right)$$

Решения получены при помощи метода интегральных соотношений [3].

1. Рассмотрим бесконечный однородный пласт, первоначальное давление в котором постоянно и равно p_0 . В момент времени $t = 0$ давление на полусферическом стоке радиуса r_c мгновенно снижается до нуля и в дальнейшем не изменяется. Найдем пространственно-временное распределение давления и изменение расхода газа после начала действия стока.

При помощи подстановок

$$\xi = \frac{p}{p_0}, \quad \rho = \frac{r}{r_c}, \quad \lambda = \frac{l}{r_c}, \quad \tau = \frac{kp_0 t}{m\mu r_c^2}$$

запишем уравнение фильтрации и граничные условия в безразмерном виде

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \right) \quad (1.1)$$

$$\xi(1, \tau) = 0, \quad \xi(\lambda, \tau) = 1, \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial \rho} \right)_{\rho=\lambda} = 0 \quad (1.2)$$

Первое граничное условие показывает равенство нулю давления на стоке, второе и третье означают соответственно, что на перемещающейся границе возмущенной зоны давление равно начальному и отсутствует движение газа.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$\xi^2(\rho, \tau) = a \lambda / \rho + b + c \rho / \lambda \quad (1.3)$$

Определив коэффициенты a , b и c из условий (1.2), получаем

$$\xi^2(\rho, \tau) = 1 - \frac{(\lambda - \rho)^2}{(\lambda - 1)^2 \rho} \quad (1.4)$$

Для нахождения λ применяем первое и второе интегральные соотношения, получаемые умножением обеих частей уравнения (1.1) соответственно на ρ и ρ^2 , интегрируем их по ρ от 1 до λ и использованием форму-

лы дифференцирования определенного интеграла по параметру τ . Первое интегральное соотношение с учетом граничных условий принимает вид

$$\frac{d}{d\tau} \int_1^\lambda \left[1 - \frac{(\lambda - \rho)^2}{(\lambda - 1)^2 \rho} \right]^{1/2} \rho d\rho = -\frac{1}{\lambda - 1} + \lambda \frac{d\lambda}{d\tau} \quad (1.5)$$

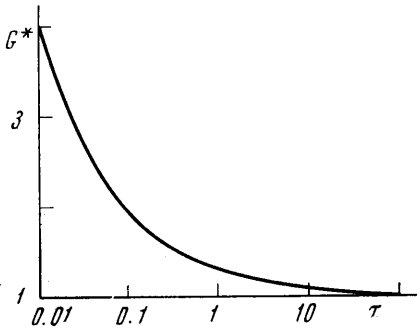
Интеграл в левой части находим приближенно, раскладывая подынтегральное выражение в степенной ряд и ограничиваясь тремя членами разложения. Получаем обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, которое после интегрирования от 1 до λ и от 0 до τ дает

$$\lambda = 1 + \sqrt{12\tau} \quad (1.6)$$

Такое же выражение дает и второе интегральное соотношение.

Объединив (1.4) и (1.6), после некоторых преобразований получаем

$$\xi(\rho, \tau) = \left[\frac{\rho - 1}{\rho} \frac{(1 + \sqrt{12\tau})^2 - \rho}{12\tau} \right]^{1/2} \quad (1.7)$$



Фиг. 1

Результаты вычислений по формуле (1.7) приведены в таблице.

Весовой расход газа при течении в полусфере определяется выражением

$$G = \frac{\pi k \gamma_a}{\mu p_a} r^2 \frac{\partial p^2}{\partial r} \quad (1.8)$$

или после интегрирования от 0 до p_0 и от r до l

$$G = \frac{\pi k \gamma_2 r_c l p_0^2}{\mu p_2 (l - r_c)} \quad (1.9)$$

Выражения (1.6) и (1.9) дают совместно

$$G^* = \frac{G \mu p_a}{\pi r_c k \gamma_2 p_0^2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{12\tau}} \quad (1.10)$$

Зависимость (1.10) приведена на фиг. 1.

Полученные результаты показывают, что течение газа стабилизируется практически мгновенно после начала отбора. Так, уже при $\tau = 100$, чему в реальных условиях соответствует время $0.01 \div 1$ сек, значения ξ и G^* отличаются от установившихся менее чем на 3%. Сказанное позволяет принять в следующей задаче приток к опробователю перед началом отбора в баллон стационарным.

Отметим также, что рассмотренный приток газа характеризуется крутой депрессионной воронкой.

2. Рассмотрим реальную задачу о нарастании давления в баллоне опробователя при заполнении его газом. Представим процесс опробования следующей моделью. Сначала в пласте, аналогичном рассмотренному в п. 1, имеем установившийся приток к полусфере радиуса r_c с весовым дебитом G_0 при нулевом давлении на стоке. В момент $t = 0$ к стоку мгновенно подключается пустой баллон опробователя пластов объемом V_0 .

| τ | ξ | | | | | Расчетные формулы |
|--------|------------|-------|-------|-------|-------|-------------------|
| | $\rho = 2$ | 5 | 7 | 10 | 20 | |
| 10 | 0.766 | 0.959 | 0.985 | 0.998 | 1.000 | (1.7) |
| | 0.763 | 0.960 | 0.991 | 1.000 | 1.000 | (3.2), (3.3) |
| | 0.761 | 0.959 | 0.988 | 1.000 | 1.000 | (3.2) — (3.4) |
| 100 | 0.726 | 0.918 | 0.950 | 0.972 | 0.995 | (1.7) |
| | 0.725 | 0.918 | 0.950 | 0.972 | 0.996 | (3.2), (3.3) |
| | 0.725 | 0.915 | 0.947 | 0.970 | 0.994 | (3.2) — (3.4) |
| 1000 | 0.713 | 0.902 | 0.934 | 0.957 | 0.983 | (1.7) |
| | 0.713 | 0.902 | 0.934 | 0.956 | 0.983 | (3.2), (3.3) |
| | 0.712 | 0.900 | 0.933 | 0.956 | 0.982 | (3.2) — (3.4) |
| | 0.707 | 0.894 | 0.925 | 0.949 | 0.975 | |

Установившийся расход газа через полусферический сток при $p_c = 0$ равен

$$G_0 = \frac{\pi r_c k \gamma_a p_0^2}{\mu p_a} \quad (2.1)$$

Текущий объем газа в баллоне, приведенный к атмосферному давлению, можно выразить в виде

$$V(t) = \frac{V_0}{p_a} p_c(t) \quad (2.2)$$

Отсюда весовой расход газа

$$G(t) = \gamma_a \frac{dV}{dt} = \frac{\gamma_a V_0}{p_a} \frac{dp_c}{dt} \quad (2.3)$$

С другой стороны, расход газа определяется выражением (1.8).

Граничные условия в безразмерном виде запишутся

$$\begin{aligned} \xi^2(\lambda, \tau) &= 1 - \frac{G_0^*}{\lambda}, \quad \left(\rho^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho} \right)_{\rho=\lambda} = G_0^* \\ \left(\rho^2 \frac{\partial \xi^2}{\partial \rho} \right)_{\rho=1} &= G^*, \quad G_0^* = \frac{G_0 \mu p_a}{\pi r_c \gamma_a p_0^2} = 1 \\ G^* &= \frac{G \mu p_a}{\pi r_c k \gamma_a p_0^2} = \frac{V_0}{\pi m r_c^3} \frac{d\xi_c}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ищем решение в виде (1.3). Определив коэффициенты из условий (2.4), получаем

$$\xi^2(\rho, \tau) = \frac{G_0^*(2\lambda\rho - \rho^2 - 1) + G^*(\lambda - \rho)^2}{\rho(\lambda^2 - 1)} \quad (2.5)$$

откуда для стока, т. е. при $\rho = 1$, имеем

$$1 - \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \xi_c^2 = \frac{V_0}{\pi m r_c^3} \frac{d\xi_c}{d\tau} \quad (2.6)$$

Выражения для λ находим из первого интегрального соотношения, которое в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \int_1^\lambda \left[1 - \frac{G_0^*(2\lambda\rho - \rho^2 - 1) + G^*(\lambda - \rho)^2}{\rho(\lambda^2 - 1)} \right]^{1/2} \rho d\rho &= \\ = \frac{G_0^* - G^*}{\lambda + 1} + \left(1 - \frac{G_0^*}{\lambda} \right)^{1/2} \lambda \frac{d\lambda}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для приближенного вычисления интеграла в левой части применяем биномиальное разложение подынтегрального выражения, ограничиваясь двумя членами разложения, поскольку уже при $\lambda \geq 2$ третий и последующий члены разложения практически не оказывают влияния. Так же поступаем и с корнем в правой части.

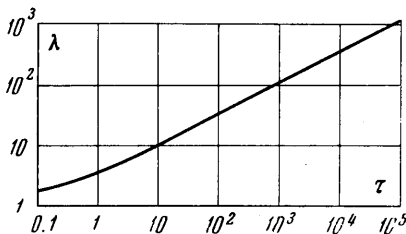
Окончательное выражение имеет вид

$$\tau = \frac{1}{12} \left(\lambda^2 + 2\lambda - 3 - 8 \ln \frac{\lambda + 1}{2} \right) \quad (2.8)$$

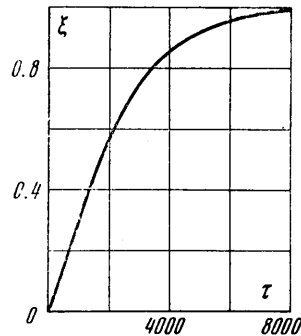
На фиг. 2 зависимость (2.8) представлена в двойном логарифмическом масштабе. Она показывает, что для $\tau > 100$ величина $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^{-1}$ с очень малой погрешностью может быть принята равной единице. С учетом сказанного уравнение (2.6) упрощается и после интегрирования от 0 до τ и от 0 до ξ_c дает

$$\tau = \frac{V_0}{2\pi m r_c^3} \ln \frac{1 + \xi_c}{1 - \xi_c} \quad (2.9)$$

Зависимость (2.9) показана на фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 3

для $V_0 = 8000 \text{ см}^3$, $r_c = 1.6 \text{ см}$, $m = 0.2$. Оценим глубину распространения возмущения для этого случая. Будем считать отбор пробы законченным, когда $\xi_c = 0.99$. Этому моменту соответствует $\tau = 8250$ и $\lambda = 310$. Отсюда $l = r_c \lambda = 496 \text{ см}$. Как видно, глубина возмущенной зоны невелика, что подтверждает правомерность допущения о бесконечном простирании пласта.

Из фиг. 3 следует, что допущенное упрощение уравнения (2.6) отразится лишь на незначительном по величине начальном участке кривой давления.

3. Известно, что при помощи метода интегральных соотношений решение уравнений фильтрации можно получить с любой степенью точности, если в выражениях для давления брать многочлены все более высокой степени. Для оценки точности приведенных решений сравним решение, приведенное в п. 1, с решением в виде многочлена второй степени

$$\xi^2(\rho, \tau) = a \frac{\lambda}{\rho} + b + c \frac{\rho}{\lambda} + d \frac{\rho^2}{\lambda^2} \quad (3.1)$$

К условиям (1.2) при этом надо добавить

$$\left[\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \xi \frac{\partial \xi}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=1} = 0$$

После нахождения коэффициентов a, b, c, d получаем

$$\xi(\rho, \tau) = \left[\frac{\rho - 1}{\rho} \frac{\lambda^2 (\lambda - 1.5) - 0.5\rho(\rho - 2)}{(\lambda - 1)^3} \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

Первое и второе интегральные соотношения дают соответственно

$$\tau = 0.125(\lambda - 1)^2 \quad (3.3)$$

$$\tau = 0.1(\lambda^2 - 1.25\lambda + 0.25 - 1.125 \ln(2\lambda + 1) / 3) \quad (3.4)$$

Расчеты показывают, что для одинаковых τ второе выражение дает несколько завышенные значения λ . Расхождение возрастает от 4 до 10% с ростом τ от 1 до 1000. В таблице, приведенной в п.1, даны значения ξ , вычисленные по формулам (1.7), (3.2), (3.3) и (3.2) — (3.4), которые почти совпадают. Следовательно, при решении задач центрально-симметричной фильтрации в выражении для давления можно ограничиваться тремя первыми членами.

Поступило 11 II 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Исякаев В. А., Бродский П. А., Петросян Л. Г. К теории процесса опробования пластов приборами на кабеле. Разведочная геофизика, вып. 25. М., «Недра», 1968.
2. Morgan J. H., Finklea E. E. Theoretical analysis of pressure phenomena associated with wireline formation tester. J. Petrol. Techn., 1962, vol. 14, No. 8.
3. Баренблатт Г. И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.