О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

С. С. БИШАЙ ХАННА

(*Москва*)

В статье строится класс моделей сплошных сред, свободная энергия которых зависит от плотности, скорости изменения плотности и температуры. Находятся условия на скачках в таких моделях. Получена модель Когарко для смеси жидкости с пузырьками газа. Кроме этого в статье изучается распространение малых возмущений. В третьем и четвертом пунктах найдены точные решения задач об одномерных неустановившихся и установившихся движениях смеси жидкости и пузырьков в трубе.

1. Построение модели. Ниже рассматривается применение универсального базисного вариационного уравнения, предложенного Л. И. Седовым [1, 2]

$$\delta \int\limits_{V_4} \Lambda d\tau_4 + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{0.1}$$

для описания моделей сплошных сред, свободная энергия которых зависит от плотности ρ, скорости изменения плотности $\rho^{\cdot}$ и температуры T. Здесь V_4 — произвольный объем четырехмерного пространства, Λ — лагранжиан, зависящий от определяющих параметров, δW^* — задаваемый функционал. Функционал δW представляет собой интеграл по границе объема V_4 от линейной комбинации вариаций определяющих параметров и их производных и определяется, если известны Λ и δW^*.

Будем рассматривать движение среды в декартовой системе координат наблюдателя с пространственными координатами x^α $(\alpha = 1, 2, 3)$. Введем также сопутствующую систему координат с координатами ξ^μ $(\mu = 1, 2, 3)$. Закон движения определяется связью между координатами в этих двух системах отсчета [3]

$$x^\alpha = x^\alpha(\xi^\mu, t), \qquad \alpha = 1, 2, 3$$

Для элемента длины ds имеются выражения

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = g^\circ{}_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \tag{1.1}$$

где $g_{\alpha\beta}$ и $g^\circ{}_{\alpha\beta}$ — ковариантные компоненты метрического тензора в системе наблюдателя и в сопутствующей системе координат. Плотность среды определяется формулой

$$\rho = g^{\circ -1/2} f(\xi\ \mu), \qquad g^\circ = \det \| g^\circ{}_{ij} \|$$

Для моделей, рассмотренных ниже, в число определяющих параметров входят ρ, $\rho^{\cdot}$, v, T, где v — модель вектора скорости. Построение проводится в системе наблюдателя, в этом случае уравнение (0.1) примет вид

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{V_3} \Lambda d\tau_3 dt + \delta W^* + \delta W = 0 \tag{1.2}$$

где V_3 — произвольный объем трехмерного пространства, ограниченного поверхностью Σ_2.

Введем независимые вариации декартовых координат в системе наблюдателя и температуры δx^α, δT. Вариация плотности выражается через независимые вариации следующим образом:

$$\delta\rho = f(\xi^\mu)\,\delta\left(\frac{1}{\sqrt{g^\circ}}\right) = -\frac{\rho}{2} g^{\circ\alpha\beta}\delta \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta} =$$

$$= -\frac{\rho}{2}\sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial x^k}{\partial\xi^\beta}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^l}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^l}\frac{\partial\delta x^k}{\partial\xi^\alpha} + \frac{\partial x^k}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^l}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^l}\frac{\partial\delta x^k}{\partial\xi^\beta}\right) = -\rho\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (1.3)$$

Для вариаций $\rho^\cdot$ и v^α имеем выражения

$$\delta\rho^\cdot = \frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + v^\alpha\frac{\partial(\delta\rho)}{\partial x^\alpha}, \quad \delta v^\alpha = \frac{\partial}{\partial t}(\delta x^\alpha) + v^\beta\frac{\partial(\delta x^\alpha)}{\partial x^\beta} \quad (1.4)$$

Пусть лагранжиан имеет следующий вид:

$$\Lambda = {}^1/_2\rho v^2 - F$$

где $F(\rho, \rho^\cdot, T)$ — свободная энергия. Пользуясь выражениями (1.3), (1.4) и (1.5) уравнением неразрывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\rho v^\alpha) = 0$$

и равенством [3]

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\frac{\partial G}{\partial t}d\tau_3 dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_2} G v^\alpha n_\alpha d\sigma_2 dt = \left[\int_{V_3} G d\tau_3\right]_{t_1}^{t_2}$$

где $G(x^\alpha, t)$ — любая функция, преобразуем первый член уравнения (1.2) к виду

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\Lambda d\tau_3 dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\left(\delta\Lambda + \Lambda\frac{\partial\delta x^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)d\tau_3 dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\rho(v_\alpha\delta x^\alpha - \delta F)\,d\tau_3 dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\left\{\left\langle\rho\frac{dv_\alpha}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot}\right)\right]\right\rangle\delta x^\alpha +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial F}{\partial T}\delta T\right\}d\tau_3 dt + \left[\int_{V_3}\rho\left(v_\alpha\delta x^\alpha - \frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot}\delta\rho\right)d\tau_3\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_2}\rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot}\right)\times$$

$$\times\delta x^\alpha n_\alpha d\delta_2 dt \quad (1.5)$$

Зададим δW^* в следующей форме:

$$\delta W^* = \int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\rho(-S\delta T + A\delta\rho + B\delta\rho^\cdot)\,d\tau_3 dt$$

На основании (1.3) и (1.4) получаем

$$\delta W^* = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\left\{\rho S\delta T + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}[\rho^2(B^\cdot - A)]\,\delta x^\alpha\right\}d\tau_3 dt +$$

$$+ \left[\int_{V_3}\rho B\delta\rho d\tau_3\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Sigma_2}\rho^2(B^\cdot - A)\,\delta x^\alpha n_\alpha d\sigma_2 dt \quad (1.6)$$

(как и выше, точка означает полное дифференцирование по времени).

Представим функционал δW в виде

$$\delta W = \left[\int\limits_{V_3} \rho\,(D_\alpha \delta x^\alpha + C\delta\rho)\,d\tau_3\right]_{t_1}^{t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Sigma_2} p\delta x^\alpha n_\alpha d\sigma_2 dt \tag{1.7}$$

Предполагая, что $\delta x^\alpha = 0$ на Σ_2 при $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ и что $\delta x^\alpha = \delta\ \rho = 0$ во всем пространстве при $t = t_1$ и $t = t_2$, и пользуясь произвольностью вариаций δx^α и δT, получаем из (1.1), (1.5), (1.6) уравнения

$$\rho\frac{dv_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot} + B^\cdot - A\right)\right], \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} \tag{1.8}$$

Из уравнений (1.1) и (1.5) — (1.8) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(C + B - \frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot}\right)\delta\rho + \rho\,(D_\alpha + v_\alpha)\,\delta x^\alpha\right] + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left\{\left[\rho\,(D_\alpha + v_\alpha)\,v^\beta + \right.\right.$$
$$\left. + \left\langle\rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot} + B^\cdot - A\right) - p\right\rangle\delta_\alpha{}^\beta\right]\delta x^\alpha +$$
$$\left. + \rho\left(C + B - \frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot}\right)\delta_\alpha{}^\beta\, v^\alpha\delta\rho\right\} = 0$$

Подставляя в последнее уравнение $\delta\rho = \rho^\cdot\varepsilon(x^\alpha, t)$ и $\delta x^\alpha = v^\alpha\varepsilon(x^\alpha, t)$, где $\varepsilon(x^\alpha, t)$ — произвольная бесконечно малая величина, и затем приравнивая коэффициенты при ε и ее производных к нулю, получим уравнение притока тепла

$$\frac{dF}{dt} = -S\frac{dT}{dt} + \frac{p}{\rho^2}\rho^\cdot + \frac{d}{dt}\left[\rho\,(D_\alpha + v_\alpha)\,v^\alpha\right] - \frac{v^\alpha}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} + \rho\frac{dv_\alpha}{dt}\right] +$$
$$+ \rho^\cdot A + \rho^{\cdot\cdot} B + \frac{d\,(\rho^\cdot C)}{dt} \tag{1.9}$$

и два соотношения

$$p = \rho^2\left(\frac{\partial F}{\partial\rho} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot} + B^\cdot - A\right), \qquad \rho^\cdot\left(B + C + \frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot}\right) + (D_\alpha + v_\alpha)\,v^\alpha = 0 \tag{1.10}$$

Учитывая (1.8) — (1.10) и пользуясь произвольностью δx^α внутри V_3, получаем из (1.1)

$$D_\alpha + v_\alpha = 0, \qquad B + C - \partial F / \partial\rho^\cdot = 0 \tag{1.11}$$

Тогда уравнения притока тепла и движения примут вид

$$dF = -SdT + (\rho^{-2}p + A)\,d\rho + Bd\rho^\cdot + d(\rho^\cdot C)$$
$$\rho\frac{dv_\alpha}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{1.12}$$

Условия на скачках. Из (1.7) — (1.11) находим выражение для δW

$$\delta W = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{V_3}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot} - B\right)\delta\rho - v_\alpha\delta x^\alpha\right]\right\}d\tau_3 dt +$$
$$+ \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Sigma_2}\left\langle\rho\left(\frac{\partial F}{\partial\rho^\cdot} - B\right)\delta\rho v^\beta - \{p\delta_\alpha{}^\beta + \rho v_\alpha{}^\beta\}\,\delta x^\alpha\right\rangle n_\beta d\sigma_2 dt$$

Если имеется поверхность разрыва S_2, то на ней выполняется соотношение

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{S_1}\left\langle\rho\left(\frac{\partial F}{\partial\rho^{\cdot}}-B\right)\delta\rho v^{\beta}-[p\delta_{\alpha}{}^{\beta}+\rho v_{\alpha}v^{\beta}]\,\delta x^{\alpha}\right\rangle n_{\beta}d\delta_2 dt=0 \qquad (1.13)$$

Из уравнения неразрывности и уравнения (1.13) имеем условия на скачках

$$[\rho v_n]=0, \qquad [p+\rho v_n^2]=0, \qquad [\partial F/\partial\rho^{\cdot}-B]=0 \qquad (1.14)$$

Первые два условия выполняются в идеальной среде.

Модель Когарко. Модель Когарко для смеси несжимаемой жидкости с пузырьками принадлежит к рассмотренному классу моделей. Ее можно получить, если принять

$$A=-\frac{\partial F}{\partial\rho^{\cdot}}\frac{\rho^{\cdot\cdot}}{\rho^{\cdot}}, \qquad B=\frac{\partial F}{\partial\rho^{\cdot}}$$

а для свободной энергии принять выражение, найденное Б. С. Когарко [4]

$$F=\frac{3b}{2}R^3R^{\cdot 2}-\frac{p_n b}{\rho_0}R^3+\frac{3b\delta}{\rho_0}R^2+\varphi(T)$$

где параметр R (параметру R приписывается значение радиуса пузырьков в смеси жидкости с кавитационными пузырьками) связан с плотностью среды соотношением

$$\rho=\rho_0[1+b(R^3-R_0^3)]^{-1}$$

В этом случае уравнения притока тепла и состояния примут вид

$$dF=-SdT+\rho^{-2}\,pd\rho$$

$$C=0, \qquad D_{\alpha}+v_{\alpha}=0, \qquad p=p_n-\rho_0(RR^{\cdot\cdot}+{}^3/_2R^{\cdot 2})-2\delta R^{-1}$$

Заметим, что последнее условие (1.14) в этой модели всегда удовлетворяется автоматически.

Для действительных процессов в модели Когарко имеет место равенство

$$\delta W^*=-\int_{t_1}^{t_2}\int_{V_3}\rho SdTd\tau_3 dt$$

2. Распространение малых возмущений. Система уравнений движения, неразрывности и состояния в одномерном случае для модели Когарко (пренебрегая членом $2\delta R^{-1}$ по сравнению с другими членами в уравнении состояния) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (2.1)$$

$$p=p_n-\rho_0\left(R\frac{d^2R}{dt^2}+{}^3/_2\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right), \qquad \rho=\frac{\rho_0}{1+b(R^3-R_0^3)}$$

Проведем линеаризацию этой системы вблизи невозмущенных постоянных значений u^*, p_n, ρ^* и R^*, т. е. будем считать, что

$$u=u^*+u', \qquad p=p_n+p', \qquad \rho=\rho^*+\rho', \qquad R=R^*+R'$$

где u', p', ρ' и R' — малые величины. Будем искать возмущения в виде

$$u' = u^{**}e^{i(kx-\omega t)}, \qquad p' = p^{**}e^{i(kx-\omega t)}, \qquad \rho' = \rho^{**}e^{i(kx-\omega t)}, \quad R' = R^{**}e^{i(kx-\omega t)}$$

Тогда из системы уравнений (2.1) получим алгебраическую систему однородных уравнений для определения неизвестных констант u^{**}, p^{**}, ρ^{**} и R^{**}. Чтобы эта система имела решение, кроме тривиального, которое соответствует отсутствию возмущений, определитель, составленный из коэффициентов при u^{**}, p^{**}, ρ^{**} и R^{**}, должен равняться нулю. Отсюда имеем

$$(ku^* - \omega)^3(k^2 + 3b\rho_0^{-2}\rho^{*2}R^*) = 0$$

Это уравнение имеет трехкратный корень, который дает $\omega / k = u^*$. Это соответствует распространению возмущений вместе с частицами. Остальные два корня k не зависят от ω, т. е. фазовая скорость может быть любой, а групповая скорость равна бесконечности. Возмущение, получившееся в результате сложения таких волн, распространяется с бесконечной скоростью.

3. Точное решение для одномерного неустановившегося движения в трубе. Система уравнений (2.1) при переходе к системе лагранжевых координат принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0$$

$$p = p_n - \rho_0\left[R\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right], \qquad \rho = \frac{\rho_0}{1 + b(R^3 - R_0^3)}$$

Эта система сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[R\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right] = 3b\left[R^2\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + 2R\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)^2\right] \tag{3.1}$$

Если искать R в классе функций $R(\xi, t) = \psi(\xi)T(t)$, то уравнение (3.1) разбивается на два уравнения для определения $\psi(\xi)$ и $T(t)$

$$\psi\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \left(\frac{d\psi}{d\xi}\right)^2 = \alpha\psi^3 \tag{3.2}$$

$$\left(T^2 - \frac{2\alpha}{3b}T\right)\frac{d^2T}{dt^2} + \left(2T - \frac{\alpha}{b}\right)\left(\frac{dT}{dt}\right)^2 = 0 \tag{3.3}$$

где α — некоторая константа. Уравнение (3.3) решается в квадратурах, а для (3.2) решение может быть найдено в виде ряда.

4. Точное решение для одномерного установившегося движения в трубе. Для этой задачи система уравнений принимает вид

$$\rho u\frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0, \qquad u\frac{d\rho}{dx} + \rho\frac{du}{dx} = 0 \tag{4.1}$$

$$p = p_n - \rho_0\left[R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2\right], \qquad \rho = \frac{\rho_0}{1 + b(R^3 - R_0^3)}$$

Отсюда имеем, в частности

$$\rho u = \alpha, \qquad p = p_0 - \alpha u \tag{4.2}$$

где α и p_0 — константы интегрирования.

Если примем, что значения p_n и ρ_0 удовлетворяют второму равенству (4.2), то имеем из (4.1)

$$R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha^2 b}{\rho_0^2}(R^3 - R_0^3)$$

Это уравнение решается в квадратурах, если принять, что $R^{\cdot} = 0$ при $R = R_0$. В этом случае имеет место решение

$$\left(\frac{b}{3}\right)^{1/2} x + c = \frac{1}{3\sqrt{R_0}} \ln \frac{\sqrt{R} - \sqrt{R_0}}{\sqrt{R} + \sqrt{R_0}} + \frac{1}{6\sqrt{R_0}} \ln \frac{R - \sqrt{R_0 R} + R_0}{R + \sqrt{R_0 R} + R_0} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3R_0}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt{R} + \sqrt{R_0}}{\sqrt{3R_0}} + \frac{1}{\sqrt{3R_0}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt{R} - \sqrt{R_0}}{\sqrt{3R_0}} + \frac{2b}{5} R^{5/2}$$

где c — некоторая константа.

Автор благодарит Л. И. Седова за руководство и ценные советы.

Поступило 8 VI 1971

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Усп. матем. н., 1965, т. 20, вып. 5.
2. Седов Л. И. Модели сплошных сред с внутренними степенями свободы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
3. Седов Л. И. Механика сплошных сред, т. 1, 2. М., «Наука», 1970.
4. Когарко Б. С. Об одной модели кавитирующей жидкости. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6.