

УДК 532.529.6

## ДВИЖЕНИЕ СФЕРЫ ПЕРЕМЕННОГО ОБЪЕМА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ОКОЛО ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

О. В. ВОИНОВ, А. Г. ПЕТРОВ

(Москва)

Рассматривается задача о движении сферической полости в жидкости. Изменение радиуса сферы происходит под действием постоянного давления в бесконечности. В точной постановке решены задачи о захлопывании полости, движущейся в безграничной жидкости, и о захлопывании полости около плоскости.

Наличие начальной поступательной скорости или близость твердой поверхности в отличие от захлопывания покоящейся сферы в безграничной жидкости [1] приводят к появлению предельного радиуса, при котором процесс захлопывания прекращается. Сфера, первоначально покоящаяся около плоскости, в результате захлопывания всегда приходит в соприкосновение с плоскостью. Для различных начальных расстояний от плоскости рассчитаны радиус и скорости, с которыми сфера достигает плоскости.

Обсуждается возможный механизм воздействия кавитационного пузырька на твердую поверхность.

**1. Движение сферы в безграничной жидкости.** В идеальной жидкости движение системы сфер, объем которых меняется со временем, описывается уравнениями Лагранжа [2, 3]. Для сферической полости, движущейся в безграничной жидкости, в качестве обобщенных координат можно выбрать радиус сферы  $R$  и координату ее центра  $Z$ . Тогда функция Лагранжа равна

$$L = T - \frac{4}{3} p_{\infty} \pi R^3 \quad (1.1)$$

Здесь  $p_{\infty}$  — давление жидкости на бесконечности. Предполагается, что работа поверхностных сил, обеспечивающих сферичность, при изменении радиуса равна нулю.

По известному потенциалу поля скоростей

$$\Phi = -R^2 R' / r - R^3 Z' \cos \theta / 2r^2 \quad (r, \theta - \text{сферические координаты})$$

для кинетической энергии жидкости имеем

$$T = -\frac{\rho}{2} \int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = 2\pi \rho R^3 \left( R'^2 + \frac{1}{6} Z'^2 \right)$$

Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  обобщенные координаты имеют следующие значения:

$$R = R_0, \quad R' = 0, \quad Z = 0, \quad Z' = U$$

В безразмерных координатах

$$y = R / R_0, \quad z = Z / R_0, \quad R_0 x = t \sqrt{p_{\infty} / \rho} \quad (1.2)$$

функция Лагранжа (1.1) с точностью до постоянного множителя примет следующий вид:

$$L = y^3 (y'^2 + \frac{1}{6} z'^2 - \frac{1}{3}), \quad y' = dy / dx, \quad z' = dz / dx \quad (1.3)$$

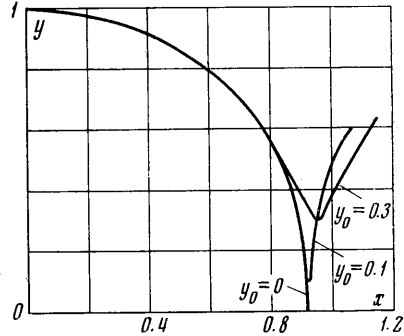
Уравнения Лагранжа в этом случае имеют два первых интеграла, выражающие законы сохранения импульса и энергии

$$\begin{aligned} y^3 z^2 &= 3P_0, & y^3 y'^2 + \frac{2}{3}(y_0^3 / y^3 + y^3) &= \frac{2}{3}(y_0^3 + 1) \\ 9P_0^2 &= 4y_0^3 = \rho U^2 / p_\infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнения (1.4) показывают, что при уменьшении радиуса сферы энергия поступательного движения возрастает и при определенном значении радиуса достигает своего максимального значения. В этот момент потенциальная энергия почти полностью перейдет в кинетическую энергию поступательного движения, захлопывание прекратится и радиус сферы начнет расти. Уравнения (1.4) удобно переписать в форме

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2y_0^{3/2}}{y^3}, \quad (1.5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{1}{y^3} - 1 \right) \left( 1 - \frac{y_0^3}{y^3} \right) \right]^{1/2}$$



Фиг. 1

Из (1.5) видно, что радиус сферы колеблется между двумя предельными значениями  $y_0 R_0 \leq R \leq R_0$  (при  $y_0 < 1$ ). Нетрудно написать решение уравнений (1.4) в виде квадратур.

На фиг. 1 представлены численно найденные зависимости  $y(x)$  при значениях  $y_0 = 0, 0.1, 0.3$ . Значение  $y_0 = 0$  соответствует решению, найденному Рэлеем [1].

Из уравнений (1.5) можно определить безразмерные полупериод колебаний  $x_0$  и расстояние  $\Delta z$ , пройденное сферой за это время

$$x_0 = I_3, \quad \Delta z = 2I_0 y_0^{3/2}, \quad I_n = \left( \frac{3}{2} \right)^{1/2} \int_{y_0}^1 \frac{y^n dy}{\sqrt{(1-y^3)(y^3-y_0^3)}}$$

Асимптотические формулы для  $I_0, I_3$  при  $y_0 \ll 1$  приведены в приложении. На основании формул (6.2) и (6.3) при  $y_0 \ll 1$

$$\Delta z \approx y_0(5.95 - 3.66\sqrt{y_0}), \quad x_0 \approx 0.915 \quad (1.6)$$

Полученное предельное значение  $x_0$  соответствует времени захлопывания пузыря в задаче Рэля. Из (1.5) определяются максимальные значения скоростей  $y', z'$ :

$$\begin{aligned} \max |y'| &= \sqrt{1/6}(1 - y_0^3) y_0^{-3/2} \quad \text{при} \quad y^3 = 2y_0^3(1 + y_0^3) \\ v = \max |z'| &= 2y_0^{-3/2} \quad \text{при} \quad y = y_0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

При  $y_0 \ll 1$  скорость поступательного движения сферы может достичь значений, существенно превышающих начальную скорость, и в этом случае наибольшая скорость поступательного движения примерно в пять раз превышает наибольшую радиальную скорость.

**2. Уравнения движения сферы около плоскости.** Задача движения сферы около плоскости эквивалентна задаче о движении в безграничной жидкости сферы и ее зеркального отражения от плоскости. Точное выражение

для кинетической энергии жидкости, в которой движутся две сферы навстречу одна другой, как следует из работ [4-7], имеет вид

$$T = 2\pi\rho R^3(T_1 Z^2 + T_2 R^2 - 2T_3 Z'R') \quad (2.1)$$

$$T_1 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{A_n^3} + \frac{1}{B_n^3} \right), \quad T_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{A_n^2 B_n} + \frac{1}{A_{n-1} B_n^2} \right)$$

$$T_2 = 2(1 + \xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{A_n} + \frac{1}{B_{n+1}} + \frac{B_n^2 - 1}{A_n} \ln \left( 1 - \frac{1}{B_n^2} \right) - \right. \\ \left. - B_n \ln \left( 1 + \frac{1}{B_n B_{n+1}} \right) \right]$$

Здесь  $2Z$  — расстояние между сферами,  $R$  — радиус сфер. Функции  $A_n$  и  $B_n$  определяются из рекуррентных соотношений

$$A_n = A_{n-1}(1/\xi^2 - 2) - A_{n-2}, \quad B_n = \xi(A_n + A_{n-1}) \quad (2.2)$$

$$A_0 = 1, \quad A_1 = 1/\xi^2 - 1, \quad \xi = R/2Z$$

Из (2.1) и (2.2) нетрудно найти первые члены рядов коэффициентов кинетической энергии по степеням  $\xi \ll 1$

$$T_1 = 1/3 + \xi^3 + O(\xi^6), \quad T_2 = 2 + 2\xi + O(\xi^4), \quad T_3 = \xi^2 + O(\xi^5) \quad (2.3)$$

На фиг. 2 представлены графики зависимостей  $T_1, T_2, T_3$  от  $\xi$ . Пунктиром изображены соответствующие приближенные зависимости (2.3).

В контакте с плоскостью ( $\xi = 0.5$ ) точные значения коэффициентов кинетической энергии равны

$$T_1 = 0.53539, \quad T_2 = 3.15443, \quad T_3 = 0.35506$$

Отсюда при помощи (2.1) можно вычислить кинетическую энергию для случая сферы, расширяющейся в контакте с плоскостью

$$T = 9.3610 \rho R^3 R'^2$$

В работах [8, 9] для коэффициента кинетической энергии найдены значения 9.35 и 9.33.

В динамические уравнения войдут еще и производные по  $\xi$   $T_1', T_2', T_3'$ . На фиг. 3 приведены графики разностей точных и асимптотических значений этих производных, вычисленных при помощи (2.3).

Как видно из фиг. 2 и фиг. 3, вблизи точки  $\xi = 0.5$  точные значения коэффициентов кинетической энергии и их производных существенно отличаются от приближенных значений (2.3). Таким образом, замена точных формул (2.2) на (2.3) при рассмотрении динамики сферы в непосредственной близости от плоскости может привести к значительной ошибке.

Захлопывание двух сферических полостей при постоянном давлении на бесконечности  $p_\infty$  описывается следующей функцией Лагранжа:

$$L = T - \frac{8}{3}\pi R^3 p_\infty$$

Здесь функция  $T$  определяется из формул (2.1). В безразмерных переменных (1.2) функция Лагранжа имеет вид

$$L = y^3(\tau - 1/3), \quad \tau = T_1 z^2 + T_2 y^2 - 2T_3 z'y' \quad (2.4)$$

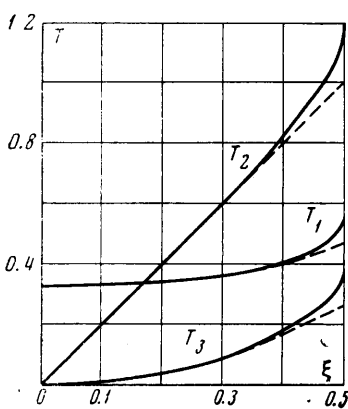
Уравнения Лагранжа можно записать в следующей, удобной для численных расчетов, форме:

$$\begin{aligned} y' &= (T_3 x_1 + T_1 x_2) / \Delta, & z' &= (T_2 x_1 + T_3 x_2) / \Delta \\ x_1' &= -\xi^2 y^2 \partial \tau / \partial \xi, & x_2' &= 1/2 y^2 (\xi \partial \tau / \partial \xi + 3\tau - 4) \\ (\Delta &= y^3 (T_1 T_2 - T_3^2), & x_1 &= 1/2 y^3 \partial \tau / \partial z', & x_2 &= 1/2 y^3 \partial \tau / \partial y') \end{aligned} \quad (2.5)$$

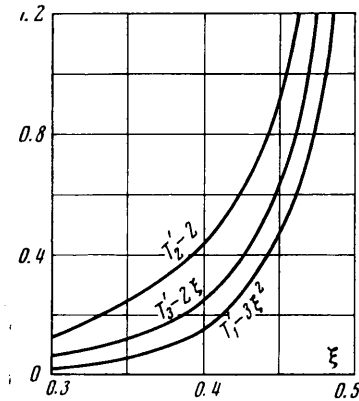
Если первоначально сфера покоилась, то при  $x = 0$  будут следующие условия:

$$z = z_0, \quad y = 1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad (z' = 0, \quad y' = 0) \quad (2.6)$$

Представляет интерес получить уравнения, определяющие захлопыва-



Фиг. 2



Фиг. 3

ние сферической каверны вдали от плоскости. Пусть  $\xi \ll 1$ , тогда из формул (2.4) и (2.3)

$$L = y^3 [(1 + \xi)y'^2 + 1/6(1 + 3\xi^3)z'^2 - \xi^2 y' z' - 2/3]$$

Отсюда для поступательного импульса получается уравнение

$$dP / dx = d(y^3 \xi^2 y') / dx + \partial L / \partial z \quad (2.7)$$

$$P = 1/3 y^3 z' \quad (\partial L / \partial z = -2y^2 \xi^2 y'^2 + 4y^2 \xi^3 y' z' + O(\xi^4))$$

Уравнение сохранения энергии при помощи начальных условий (2.6) принимает следующий вид:

$$y^3 [(1 + \xi)y'^2 + 3/2(1 + 3\xi^3)P^2 / y^6 - \xi^2 y' z' + 2/3] = 2/3 \quad (2.8)$$

**3. Асимптотическое решение уравнений ( $\xi \ll 1$ ).** Рассматривается сфера, сильно удаленная от плоскости. Соответствующая этому случаю система уравнений (2.7) и (2.8) допускает аналитическое исследование.

Если в уравнении (2.7) заменить  $y$ ,  $y'$  и  $y''$  на соответствующие функции из решения задачи Рэлея

$$y'^2 = 2/3(y^{-3} - 1), \quad y^3 y'' = -3/2 y^2 y'^2 - y^2$$

то с точностью до членов порядка  $\xi^2$  получается следующее уравнение для импульса:

$$dP / dx = y^2 \xi^2 (y^{-3} - 2) \quad (3.1)$$

Как следует из (3.1), захлопывающаяся сфера притягивается к плоскости только в первые моменты времени, когда радиус сферы  $y > 1/2^{1/3}$ . При  $y < 1/2^{1/3}$  сфера отталкивается от плоскости, импульс поступательного движения уменьшается по абсолютной величине. Величину импульса

$P_0$ , приобретаемого сферой при захлопывании, можно определить из (3.1) асимптотически точно. При  $\xi \ll 1$  функция  $z$  на начальной стадии захлопывания меняется мало и поэтому можно положить  $z = z_0$ . Тогда из (3.1) следует

$$P_0 \approx - \int_0^1 \frac{P}{y} dy \approx - \frac{\sqrt{6}}{8z_0^2} \int_0^1 y^4 \left( \frac{1}{\sqrt{y^{-3}-1}} - \sqrt{y^{-3}-1} \right) dy$$

Здесь зависимость  $y'(y)$  соответствует захлопыванию сферической полости в безграничной жидкости.

Последняя формула оправдана ввиду того, что область малых значений  $y$  дает вклад в интеграл порядка  $y^{1/2}$ . С точностью до членов  $\xi^2$  импульс, приобретаемый сферой при захлопывании, равен

$$P_0 = - \frac{\sqrt{6\pi} \Gamma(7/6)}{36z_0^2 \Gamma(8/3)} = - \frac{0.0744}{z_0^2} \quad (3.2)$$

Из уравнения (2.8) следует, что существует некоторый минимальный радиус, так же как и в безграничной жидкости, при наличии поступательной скорости. Если пренебречь малыми порядка  $\xi^3$ , то наименьшее значение радиуса  $y_0$  и наибольшее значение поступательной скорости  $v$  можно выразить через импульс  $P_0$ , потребовав в (2.8)  $y' = 0$

$$y_0 = ({}^9/4 P_0^2)^{1/3}, \quad \max |z'| = v = {}^4/3 P_0^{-1} \quad (3.3)$$

Отсюда при помощи (3.2) нетрудно получить

$$y_0 = 0.232 z_0^{-1/3}, \quad v = 17.9 z_0^2 \quad (3.4)$$

Формулы (3.3) соответствуют области  $y \ll 1$ , где импульс  $P$  мало отличается от предельного  $P_0$  и движение происходит так же, как и в безграничной жидкости. Из формул (1.4) и (3.3) определяется начальная скорость  $U$ , которую необходимо сообщить сфере в безграничной жидкости, чтобы она приобрела импульс  $P_0$

$$U = 3P_0 \sqrt{\rho_\infty / \rho} = 0.223 z_0^{-2} \sqrt{\rho_\infty / \rho} \quad (3.5)$$

Полученные формулы (3.4) и (3.5) устанавливают соответствие между движением сферы около плоскости из состояния покоя и движением сферы в безграничной жидкости с начальной поступательной скоростью. Поэтому для расчета характеристик движения сферы около плоскости можно применять формулы, полученные в п. 1. Так, безразмерное расстояние, пройденное сферой за время захлопывания, и наибольшее значение радиальной скорости на основании (1.6), (1.7) и (3.4) равны

$$\Delta z = 1.38 z_0^{-1/3} - 0.41 z_0^{-2}, \quad \max |y'| = 3.70 z_0^2 \quad (3.6)$$

Аналитически исследованную выше задачу при  $\xi \ll 1$  в работах [10-12] пытались решить путем численных расчетов на ЭВМ. Однако основные уравнения [10-12] сформулированы неправильно, так как в кинетической энергии не учтен член с произведением радиальной и поступательной скоростей. Для поступательного движения в [10-12] записано уравнение

$$yz'' + 3y'z' + 6\xi^2 y^2 = 0$$

Через импульс  $P = {}^1/3 z^3 y'$  это уравнение можно переписать в виде

$$P' = -{}^4/3 y^2 \xi^2 (y^{-3} - 1) \approx \partial L / \partial z$$

Последнее отличается от асимптотически правильного уравнения для импульса поступательного движения системы (3.1). В частности, в начальный момент производная от импульса оказывается равной нулю, вместо того чтобы быть максимальной

ной, а при  $y < 1$  сфера постоянно «притягивается» к плоскости, тогда как в действительности притяжение сменяется «отталкиванием» при  $y < 0.794$ .

Однако это уравнение отличается от (2.7) на полную производную, которая при интегрировании не дает вклад в импульс  $P_0$ . Поэтому, хотя в [10-12] взаимодействие сферы с плоскостью описывается неправильно, такая характеристика процесса захлопывания, как минимальный радиус, должна совпадать с верным значением. Отсюда понятно, почему предложенная в [12] на основе обработки численных данных аппроксимационная формула  $y_0 = 0.23z_0^{-1/3}$  близка к асимптотически точной формуле (3.3). Этого совпадения не произойдет, если в начальный момент  $x = 0$ ,  $y^* \neq 0$ . Несмотря на указанную ошибку в основных уравнениях, авторы [11, 12] пришли к правильному выводу о невозможности полного захлопывания полости в присутствии твердой границы.

Асимптотические формулы (3.1), (3.2) и (3.4) можно уточнить, учитывая следующие члены по малому параметру  $\xi$ . Поскольку  $P \sim z^* \sim \xi^2$ , то из (2.8) с точностью до членов порядка  $\xi$

$$y^* = -(1 - \xi/2)\sqrt{2/3}(y^{-3} - 1)$$

Отсюда, интегрируя уравнение (2.7), положив в нем  $z = z_0$ , аналогично предшествовавшему можно получить

$$P_0 = 2 \int_0^1 y^2 \xi^2 y^* dy = -\frac{\sqrt{6\pi}}{36z_0^2} \left( \frac{\Gamma(7/6)}{\Gamma(8/3)} - \frac{\sqrt{\pi}}{16z_0} \right)$$

После чего из (3.3) определяются наименьший радиус и наибольшая скорость сферы

$$P_0 = -0.0744/z_0^2 + 0.0134/z_0^3 \tag{3.7}$$

$$y_0 = 0.232 z_0^{-1/3} (1 - 0.120/z_0), \quad v = 17.9 z_0^2 (1 + 0.180/z_0)$$

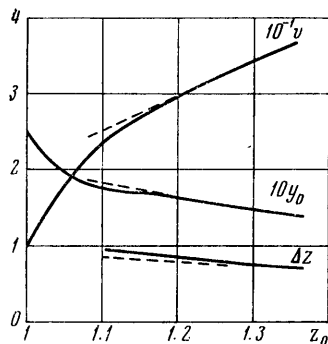
**4. Численное решение точных уравнений.** Задача движения сферы переменного объема около плоскости для случая, когда радиус сферы сравним с расстоянием до плоскости, решена путем численного интегрирования системы уравнений (2.5) с начальными условиями (2.6) и с коэффициентами, задаваемыми формулами (2.1), (2.2), (2.4). При этом учет необходимого числа членов в рядах, определяющих коэффициенты уравнений, производился автоматически, исходя из требований к точности вычислений. Интегрирование системы (2.5) производилось методом Рунге — Кутты. Для контроля в программу счета был включен независимо расчет полной энергии системы на каждом шаге вычислений. То, что интеграл энергии в пределах точности вычислений выполнялся, подтверждает правильность результатов.

Из решения следует, что сфера в результате захлопывания достигает плоскости с поступательной скоростью, достигающей больших значений при определенном начальном расстоянии. В рассматриваемой модели полость достигает плоскости при любых начальных расстояниях, только при этом может совершать несколько циклов сжатия и расширения. На фиг. 4 изображены зависимости минимального радиуса  $y_0$  и максимальной поступательной скорости  $v$  от начального расстояния (сплошные линии). Приводится также зависимость расстояния  $\Delta z$ , пройденного сферой к моменту, когда  $y = y_0$ , от начального расстояния сферы от плоскости. Для сравнения на фиг. 4 пунктирными линиями изображены соответствующие зависимости, следующие из асимптотических формул (3.7) и (3.6).

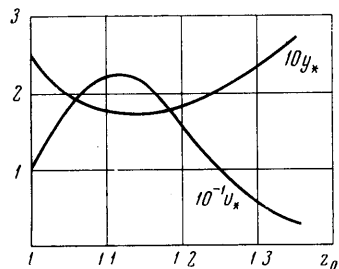
На фиг. 5 приведены зависимости радиуса сферы  $y_*$  в момент касания плоскости и поступательной скорости  $v_*$  в этот же момент от начального расстояния. Скорость в момент касания равна примерно  $22\sqrt{p_\infty/\rho}$  в области  $1.09 < z_0 < 1.14$  и достигает максимального значения  $22.2\sqrt{p_\infty/\rho}$  при  $z_0 \approx 1.11$ . Близкое по порядку величины значение следует из асимптотической формулы (3.7) для  $v$ . Следует отметить, что вследствие близости плоскости максимальная скорость поступательного движения достигается еще до того, как радиус сферы принимает минимальное значение. Это объясняется тем, что на сферу постоянного радиуса, приближающуюся к плоскости, последняя оказывает тормозящее действие. Обращает на себя внимание факт понижения скорости в непосредственной близости сферы к контакту в начальный момент. Это связано с тем, что сфера достигает плоскости, не успев захлопнуться до максимального радиуса, имея некоторую отрицательную скорость  $R^*$ . Процесс захлопывания будет продолжаться и после касания. Сфера осаждается на стенку с радиальной скоростью  $R_*^* < 0$  при  $z_0 < 1.12$ ,  $R_*^* > 0$  при  $z_0 > 1.12$ .

### 5. Воздействие кавитационного пузырька на твердую поверхность.

Рассмотренная задача о движении сферы переменного объема около плоскости может служить приближенной моделью поведения пузырька вблизи твердой поверхности. При захлопывании пузырька вблизи твердой границы, на последней возникает повышенное давление, которое может



Фиг. 4



Фиг. 5

быть обусловлено течением жидкости, а также ударной волной, образовавшейся после захлопывания. Как показано выше, полость не может захлопнуться в точку вблизи твердой границы. На основании этого можно показать, что передача больших давлений на твердую поверхность через жидкость от захлопывающей полости невозможна.

Для доказательства этого утверждения удобно рассмотреть сначала пузырьки, захлопывающиеся достаточно близко от границы, когда скорости течения не достигают скорости звука. Давление в идеальной несжимаемой жидкости определяется из интеграла Коши — Лагранжа. При помощи (2.8), (3.1) — (3.4) с точностью до основных членов по малому параметру  $\xi$  для наибольшего давления на плоскости  $p$  (в точке, расположенной напротив сферы) можно получить следующее выражение:

$$p / p_{\infty} \approx 1 + 2(y''y^2 + 2y'^2y) / z_0$$

Из уравнения сохранения энергии (2.8) следует, что давление монотонно возрастает с уменьшением радиуса и достигает максимального значения при  $y = y_0$ . Поэтому на основании (3.2) — (3.4)

$$(p / p_{\infty})_{\max} \approx (3P_0^2 y_0^{-3} + 2/3) / y_0^2 z_0 = 37z_0^{5/3} \quad (5.1)$$

Последняя формула справедлива только в приближении несжимаемой жидкости. В воде при  $p_{\infty} = 1 \text{ атм}$  скорость звука  $c \approx 1500 \text{ м/сек}$ , как видно из (3.4), достигается для начальных расстояний  $z_0 \geq 2.9$ . Таким образом, формула (5.1) оправдана при  $z_0 < 2.9$ . В этой области максимальное давление, развиваемое на стенке, не превышает  $200 \text{ атм}$ . На больших начальных расстояниях необходимо учитывать сжимаемость жидкости. В этом случае оценку максимального давления на поверхности можно получить, рассмотрев полость, захлопнувшуюся в точку. Согласно автомодельному решению Хантера [13] в момент полного захлопывания полости в воде образуется сферическая область сильного сжатия. Скорость звука уменьшается с увеличением расстояния от центра области и становится равной невозмущенной скорости звука  $c$  на расстоянии  $r_* \approx (E / \rho c^2)^{1/3}$ , где  $E = 4/3 \pi R_0^3 p_{\infty}$  — потенциальная энергия полости в начальный момент. Если распространить формулы автомодельного решения Хантера [13], которые, вообще говоря, верны при  $r \ll r_*$ , до  $r = r_*$ , можно найти, что давление  $p(r_*) \approx \rho c^2 / \gamma$  ( $\gamma$  — показатель адиабаты). При  $r \gg r_*$  течение не отличается от течения несжимаемой жидкости. Изменение давления в идеальной несжимаемой жидкости с расстоянием, обусловленное инерционными силами, согласно интегралу Коши — Лагранжа убывает с расстоянием, как  $1/r$ . Следовательно, при  $r \gg r_*$

$$p(r) \approx \rho c^2 r_* / \gamma r \approx 1.6 \gamma^{-1} (\rho c^2)^{2/3} p_{\infty}^{1/3} R_0 / r \quad (5.2)$$

В случае твердой поверхности в жидкости максимальное давление удвоится по сравнению с безграничной жидкостью.

Из работы Хангера [13] следует, что после полного захлопывания образуется ударная волна, переходящая в акустическую на расстоянии  $r \gg r_*$ . Известно [14], что плотность внутренней энергии звуковой волны равна

$$\varepsilon = (\Delta p)^2 / 2\rho c^2$$

а скорость течения с точностью до членов порядка  $1/r$  равна  $v \approx \Delta p / \rho c$ . Полагая, что ширина возмущенной зоны равна  $r_*$ , а полная энергия звуковой волны равна энергии полости, можно получить следующее уравнение для  $\Delta p$ :

$$4\pi r_*^2 (\varepsilon + \frac{1}{2}\rho v^2) \approx \frac{4}{3}\pi R_0^3 p_\infty$$

Вычисленный отсюда перепад давлений будет описываться формулой того же вида, что и (5.2), с незначительно отличающимся числовым коэффициентом. Полученная зависимость перепада давления согласуется с известными результатами теории сферических звуковых волн [15]. При отражении ударной волны от твердой поверхности давление удвоится по сравнению с безграничной жидкостью. Если учесть это, то можно получить, что максимальное давление в воде с учетом сжимаемости ( $\gamma = 7$ ,  $p_\infty = 1 \text{ атм}$ ) не превышает 250 атм при  $Z_0 \sim 3R_0$  и монотонно уменьшается с удалением полости от поверхности.

Максимальное давление на поверхности, возникающее при захлопывании удаленной от поверхности полости, не превышает нескольких сотен атмосфер. Следовательно, модель пузырька, сферически симметрично захлопывающегося в безграничной жидкости, не объясняет высоких давлений, возникающих на твердой поверхности и приводящих к значительным разрушениям поверхности при пузырьковой кавитации.

Возможен следующий механизм воздействия кавитационного пузырька на твердую поверхность. Как показано в п. 3, сферический пузырек, находящийся вблизи границы, достигает поверхность с большой поступательной скоростью. Последнее должно сопровождаться смятием пузырька и образованием струи, диаметр которой по порядку величины совпадает с диаметром пузырька, а скорость — с его поступательной скоростью. Происходит удар одной поверхности полости о другую или о твердую границу. Площадь воздействия по порядку величины совпадает с площадью сечения полости. Величину давления в окрестности удара жидкости об абсолютно жесткую поверхность можно получить из закона сохранения импульса на фронте ударной волны, распространяющейся от места удара. Если скорость жидкости  $v_*$  много меньше скорости звука  $c$ , то приращение давления  $p - p_\infty \approx \rho c v_*$ . Длительность импульса давления, развиваемого при ударе, будет равна примерно времени, за которое звуковые возмущения проходят расстояние, равное половине ширины струи. Следовательно, длительность равна  $\sim R/c$ .

По известным значениям поступательной скорости в момент касания можно найти величину давления, развиваемого при ударе. В воде давление достигает величины 3300 атм ( $p_\infty = 1 \text{ атм}$ ) для пузырьков, начальные расстояния которых от стенки равны  $\sim 1.09 \div 1.14$ .

Графики зависимостей размеров площади ударного воздействия и давления от начального расстояния пузырька до поверхности с точностью до множителя совпадают с графиками фиг. 5, соответствующими  $v_*$  и  $Y_*$ .

Предлагаемая модель согласуется с представлениями, почерпнутыми рядом авторов из опытных данных [16].

Рассматриваемый механизм воздействия пузырька на твердую поверхность основан на переходе потенциальной энергии полости в кинетическую энергию радиального движения и последующем переходе энергии радиального движения на основе закона сохранения импульса, индуцированного в начальной стадии захлопывания, в энергию поступательного движения полости к поверхности. На последней стадии, при касании полости и по-



верхности формируется струя, ударяющая о поверхность. По-видимому, нет физических причин полагать, что диаметр струи будет много меньше, чем наименьшие размеры полости, как это предполагается в ряде работ [17, 18], в которых развивается гипотеза «кумулятивных струек».

При захлопывании пузырька в жидкости, вообще говоря, следует учитывать поверхностное натяжение, вязкость и наличие внутри пузырька газа и паров жидкости. Поверхностным натяжением  $\sigma$  можно пренебречь для пузырей размера  $R$ , если  $R \gg \sigma / \rho \infty$ . Пренебрежение вязкостью, как известно [19], оправдано в области  $R \gg \gg 8.4\nu\sqrt{\rho / \rho \infty}$ . Например, при захлопывании пузырька в воде эти два фактора начинают существенно проявляться только в области очень малых пузырьков размером  $R \sim 10^{-4}$  см.

Как показано выше, наиболее существенное воздействие на твердую поверхность могут оказать пузырьки, находящиеся вблизи контакта, при этом их радиус уменьшается не более чем в 5–6 раз. Поэтому малые количества газа и пара, находящиеся внутри пузырька не окажут существенного влияния на полученные результаты.

К основному недостатку рассмотренной выше модели следует отнести предположение о сферической форме пузырька. Вблизи твердой поверхности сферическая симметрия задачи не имеет места. Поэтому в процессе захлопывания форма пузыря будет отклоняться от сферической. Однако учет изменения формы не может изменить того факта, что захлопывание сферы в точку невозможно при наличии твердой границы и что предельный размер области, в которую захлопывается сфера, зависит от начальной поступательной скорости или расстояния до стенки. Следует отметить, что в известных работах [17, 20] учет изменения формы производился только в пределе малых отклонений от сферы.

Известно также [21], что форма пузыря неустойчива даже в безграничной жидкости. Неустойчивость формы имеет, однако, второстепенное значение. Действительно, возмущения формы растут [22] с уменьшением радиуса, как  $y^{-1/4}$ . Из формул п. 1 следует, что поступательное смещение растет, как  $y^{-1/2}$ . Это указывает на то, что фактором, ограничивающим захлопывание, является поступательное движение пузырька, а малыми начальными возмущениями формы можно пренебречь.

**6. Приложение.** Функцию входящую в интеграл  $I_0$ , можно представить в виде

$$[(1 - y^3)(y^3 - y_0^3)]^{-1/2} = (y^3 - y_0^3)^{-1/2} + y^{-3/2}(1 - y^3)^{-1/2} - y^{-3/2} + F(y)$$

$$F(y) = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - y^3}} - 1 \right) \left( \frac{1}{\sqrt{y^3 - y_0^3}} - \frac{1}{\sqrt{y^3}} \right)$$

Функция  $F(y)$  удовлетворяет неравенству

$$F(y) < y_0^3 [(y^3 - y_0^3)(1 - y^3)]^{-1/2}$$

Отсюда следует, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}} I_0 = \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^3 - y_0^3}} - \int_1^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y^3}} + \int_0^1 \left( \frac{1}{\sqrt{y^3(1 - y^3)}} - \frac{1}{\sqrt{y^3}} \right) dy + O(y_0^{5/2}) \quad (6.1)$$

Последний интеграл в (6.1) равен сумме двух следующих интегралов:

$$\int_0^1 (\sqrt{1 - y^3} - 1) y^{-3/2} dy + \int_0^1 y^{-3/2} (1 - y^3)^{-1/2} dy = 2 - \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)}$$

Для доказательства равенства достаточно преобразовать первый интеграл при помощи интегрирования по частям. На основании последней формулы из (6.1) следует:

$$I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left( \frac{\Gamma(1/6)}{\Gamma(2/3)} y_0^{-1/2} - 2 \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)} + O(y_0^{5/2}) \right) \quad (6.2)$$

Аналогично для  $I_3$  можно получить

$$I_3 = \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{\Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)} + O(y_0^{5/2}) \quad (6.3)$$

Численные расчеты на ЭВМ проведены авторами в вычислительном центре ВНИИГидромаша в содружестве с лабораторией теоретических и экспериментальных исследований гидромашин. Авторы благодарят Д. А. Войташевского за постоянное внимание к работе и сотрудников вычислительного центра за оказанную помощь.

Поступило 10 XII 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Philos. Mag.*, 1917, vol. 34.
2. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М., «Мир», 1964.
3. Воинов О. В., Головин А. М. Уравнения Лагранжа для системы пузырьков изменяющихся радиусов в жидкости малой вязкости. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 3.
4. Hicks W. M. On the motion of two spheres in a fluid. *Philos. Trans.*, 1880, vol. 171, pp. 455—492.
5. Basset A. B. A treatise on hydrodynamics, vol. 1, Inc., N. Y., George Bell and Sons, 1888.
6. Воинов О. В. О движении двух сфер в идеальной жидкости. *ПММ*, 1969, т. 33, вып. 4.
7. Воинов О. В. Движение идеальной жидкости около двух сфер с радиальными скоростями на поверхности. *Вестн. МГУ*, 1969, вып. 5.
8. Shiffman M., Friedman B. On the best location of a mine near a sea bed. In: *Underwater Explosion Research*, vol. II, U. S. Office of Naval Research, 1950.
9. Witze C. P., Schrock V. E., Chambre P. L. Flow about a growing sphere in contact with a plane surface. *Internat. J. Heat and Mass Trans.*, 1968, vol. 11, No. 11.
10. Коровкин А. Н., Левковский Ю. Л. Исследование замыкания кавитационной каверны вблизи твердой стенки. *Инж.-физ. ж.*, 1967, т. 12, вып. 2.
11. Левковский Ю. Л., Судакова Г. Г. Влияние твердой стенки на замыкание сферической кавитационной каверны. *Инж.-физ. ж.*, 1968, т. 15, вып. 2.
12. Левковский Ю. Л. Динамика сферической кавитационной каверны. *Тр. Акуст. ин-та*, 1969, вып. 6.
13. Hunter C. On the Collapse of an empty cavity in water. *J. Fluid Mech.*, 1960, vol. 8, p. 241.
14. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, Изд. 2. М., «Наука», 1966.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Механика сплошных сред*. М., Гостехиздат, 1954.
16. Корнфельд М. И. Упругость и прочность жидкостей. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
17. Naudé C. F., Ellis A. T. On the mechanism of cavitation damage by nonhemispherical cavities collapsing in contact with a solid boundary. *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng*, 1961, vol. 83, p. 648.
18. Kozirev S. P. On cumulative collapse of cavitation cavities. *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng*, 1968, vol. 90, No. 1.
19. Забабахин Е. И. Заполнение пузырьков в вязкой жидкости. *ПММ*, 1960, т. 24, вып. 6.
20. Shima A. The behavior of a spherical bubble in the vicinity of a solid wall. *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng*, 1968, vol. 90, No. 1.
21. Plesset M. S., Mitchell T. P. On the stability of the spherical shape of a vapour cavity in a liquid. *Quart. J. Appl. Math.*, 1956, vol. 13, No. 4.
22. Перник А. Д. Проблемы кавитации, Изд. 2. Л., «Судостроение», 1966.