

УДК 621.4/6:533.6

ОДНОМЕРНОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ РЕШЕТКЕ

В. Т. МИТРОХИН

(Москва)

Рассмотрена задача определения динамических характеристик вращающихся и неподвижных решеток турбомашин. Решетка рассчитывается как линейная система с распределенными параметрами.

В задачах определения устойчивости сложных систем и в задачах регулирования необходимо знать динамические характеристики турбомашин. Такие характеристики изучались, например, в работе [1]. Однако в [1] рассмотрение ограничено системой с сосредоточенными параметрами, что допустимо при малых частотах возмущения.

В работе [2] рассмотрена задача о распространении колебаний в потоке с постоянной средней скоростью. Ниже эта задача решается при переменной скорости среднего движения. Кроме того, принято, что при колебаниях осуществляется отвод или подвод механической энергии.

Рассмотрим вращающийся канал. Запишем уравнения абсолютного движения в подвижной системе координат (см. [3])

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{c^2}{2} - c\mathbf{u} \right) - (c - \mathbf{u}) \text{rot } \mathbf{c} = \mathbf{F} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p \dots \quad (1)$$

Если ввести в рассмотрение угол α между векторами абсолютной \mathbf{c} и окружной \mathbf{u} скоростями, то в проекции на направление линий тока l будем иметь

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{c^2}{2} - cu \cos \alpha \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = 0 \quad (2)$$

Уравнение неразрывности в рассматриваемом случае

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} (\rho c) = 0 \quad (3)$$

Линеаризуем уравнения (2) и (3), полагая, что пульсациями окружной скорости u можно пренебречь. Обозначая средние значения параметра ($\bar{}$) и пульсационные ('), с учетом выполнения соотношений для стационарного движения

$$\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\bar{c} u \cos \bar{\alpha} - \frac{\bar{c}^2}{2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial l} (\bar{\rho} \bar{c}) = 0 \quad (4)$$

получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l} [c'(\bar{c} - u \cos \bar{\alpha} + u \sin \bar{\alpha} \alpha')] - \\ & - \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial l} \left[\bar{c} u \cos \bar{\alpha} - \frac{\bar{c}^2}{2} \right] + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial l} = 0 \\ & \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{c} \frac{\partial \rho'}{\partial l} + \rho' \frac{\partial \bar{c}}{\partial l} + \bar{\rho} \frac{\partial c'}{\partial l} + c' \frac{\partial \bar{p}}{\partial l} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнение (5) входит величина пульсации угла α' . Если ввести в рассмотрение угол β между направлением стационарной относительной

скорости и окружной и принять, что при колебаниях направление относительной скорости не изменяется (в рассматриваемой одномерной постановке это требование естественно и равносильно условию жесткости стенок канала), то из треугольников скоростей получим связь между пульсациями α' и c'

$$\alpha' = \frac{c'}{\bar{c}} \sin(\bar{\beta} - \bar{\alpha}) \quad (6)$$

Поскольку в рассматриваемом процессе не происходит притока тепла, связь между колебаниями давления и плотности определяется изэнтропическим соотношением

$$p' = a^2 \rho' \quad (7)$$

где a — скорость звука.

Уравнения (5) при отсутствии отвода или подвода механической энергии ($\beta = \bar{\alpha}$, $u = 0$) и при $\bar{c} = \text{const}$ сводятся к известному волновому уравнению [2] для потока с постоянной средней скоростью.

Применим к уравнениям (5) преобразование Фурье, тогда для изображений c' , ρ' и p' , которые будем обозначать буквами без штриха, получим

$$\begin{aligned} -i\omega c + \bar{c} h_1 \frac{\partial c}{\partial l} + c \frac{\partial(\bar{c} h_1)}{\partial l} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} \frac{\partial(1/2 \bar{c}^2 h_2)}{\partial l} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial l} &= 0 \\ -i\omega \rho + \frac{\partial(\rho \bar{c})}{\partial l} + \bar{\rho} \frac{\partial c}{\partial l} + c \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial l} &= 0 \\ h_1 &= 1 - \frac{\sin(\bar{\beta} - \bar{\alpha})}{\sin \bar{\beta}} [\cos \bar{\alpha} - \sin \bar{\alpha} \sin(\bar{\beta} - \bar{\alpha})] \\ h_2 &= 2 \frac{\sin(\bar{\beta} - \bar{\alpha})}{\sin \bar{\beta}} - 1 \end{aligned} \quad (8)$$

Система уравнений (8) является системой уравнений с переменными коэффициентами, потому что $\bar{\rho}$, \bar{c} , h_1 и h_2 зависят от координаты l .

Исключая из системы (8) переменную c и вводя для средних величин $M = \bar{c}/a$, $\lambda = \bar{c}/a^*$ и функции приведенной скорости λ , получим для изображения давления p обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 p}{dl^2} + Q(l) \frac{dp}{dl} + q(l)p = 0 \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} Q(l) &= \frac{1}{h_1 M^2 - 1} \left\{ h_1 M^2 + 2 h_1 \lambda^2 \frac{d}{dl} \left(\frac{a^*}{a} \right)^2 + A + \right. \\ &\quad \left. + \frac{M}{B} \frac{a^*}{a} + (h_1 M^2 - 1) \frac{d \ln B}{dl} \right\} \\ q(l) &= \frac{1}{h_1 M^2 - 1} \left\{ \frac{d}{dl} \left(\frac{a^*}{a} \right)^2 \left[\frac{d(\lambda^2 h_1)}{dl} + A \left(\frac{a}{a^*} \right)^2 + \frac{\lambda}{B} \right] + \right. \\ &\quad \left. + h_1 \lambda^2 \frac{d^2}{dl^2} \left(\frac{a^*}{a} \right)^2 + \frac{d \ln B}{dl} \left[h_1 \lambda^2 \frac{d}{dl} \left(\frac{a^*}{a} \right)^2 + A \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^*}{a} \frac{1}{B} \left(\frac{d\lambda}{dl} \frac{a^*}{a} - ik \right) + \frac{a^*}{a} \frac{dA}{dl} \right\} \\ A &= \left(\frac{a^*}{a} \right)^2 \frac{\lambda^2}{2} h_2 - ik h_1 M - h_1 M \frac{dM}{dl} \end{aligned}$$

$$B = \frac{d(h_1 \lambda)}{dl} - ik \frac{a}{a^*} - h_1 \lambda \frac{d \ln \varepsilon(\lambda)}{dl}$$

$$k = \omega / a, \quad \varepsilon(\lambda) = \bar{\rho} / \bar{\rho}^*$$

При $\beta = \alpha$ ($h_1 = 1$, $h_2 = -1$) уравнение (9) описывает изменение давления в неподвижной решетке.

Изображение скорости c выражается через изображение давления следующим образом:

$$c = \left\{ p \left[ikh_1 M - h_1 \lambda^2 \frac{d}{dl} \left(\frac{a^*}{a} \right)^2 \right] + \frac{dp}{dl} (1 - h_1 M^2) \right\} \frac{1}{i\omega \bar{\rho}} \quad (10)$$

Отметим, что при $M \rightarrow 0$ получим известную из акустики зависимость

$$c = \frac{1}{i\omega \bar{\rho}} \frac{dp}{dl}$$

Обычно в задачах расчета длинных линий задается импеданс ζ в конце или начале линии

$$\zeta = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{a}} \frac{p}{c}$$

Поскольку изображение скорости пропорционально изображению давления и производной давления, начальные условия можно свести к задаче Коши. Кроме того, очевидно, что при заданных

$$p|_{l=0} = p_0, \quad \left. \frac{dp}{dl} \right|_{l=0} = \frac{dp_0}{dl}$$

можно однородное уравнение (9) привести к неоднородному уравнению при нулевых начальных условиях для функции

$$P(l) = p(l) - \left(\frac{dp_0}{dl} l + p_0 \right)$$

$$\frac{d^2 P}{dl^2} + Q(l) \frac{dP}{dl} + q(l)P = f(l) \quad (11)$$

Правая часть неоднородного уравнения, как легко видеть

$$f(l) = \frac{dp_0}{dl} Q(l) - \left[\frac{dp_0}{dl} l + p_0 \right] q(l) \quad (12)$$

Как известно (см., например, [4]), задача интегрирования дифференциального уравнения (11) сводится к разрешению интегрального уравнения Вольтерра второго рода с неизвестной функцией $\varphi(l)$

$$\varphi(l) + \int_0^l K(l, x) \varphi(x) dx = f(l)$$

$$K(l, x) = Q(l) + q(l)(l - x) \quad (13)$$

Определив $\varphi(l)$, изображение давления находится затем квадратурой по формуле

$$P(l) = \int_0^l (l - x) \varphi(x) dx$$

Как известно, уравнение (13) имеет решение (ряд Неймана)

$$\varphi(l) = f(l) + \int_0^l R(l, x) f(x) dx$$

$$R(l, x) = K_1(l, x) + K_2(l, x) + \dots$$

при условии, что ядро ограничено по модулю

$$|K(l, x)| \leq K$$

Из (9) видно, что для неподвижной решетки ($h_1 = 1$) решение возможно всегда при дозвуковой скорости среднего потока ($M < 1$). Для подвижной решетки решение возможно всегда при $h_1 M^2 < 1$. Если закрутка среднего потока на входе направлена по вращению ($h_1 < 1$), то для вращающейся решетки область возможных решений больше (по числу M), чем для неподвижной. При закрутке потока против вращения ($h_1 > 1$) область возможных решений сужается.

Однако, если зависимости числа M и параметра h_1 от координаты подчиняются условию Липшица с показателем α , можно всегда построить решение уравнения (13) методом последовательных приближений. Функции $h(l)$ и $M(l)$ определяются в зависимости от геометрических размеров канала в каждом конкретном случае.

В важном частном случае, когда \bar{c} , h_1 и h_2 не зависят от длины, уравнение (13) приводится к виду

$$\varphi(l) + \int_0^l [Q + q(l-x)] \varphi(x) dx = \frac{dp_0}{dl} Q - \left[\frac{dp_0}{dl} l + p_0 \right] q \quad (14)$$

где Q и q не зависят от l .

Решение (14) известно (см., например, [4])

$$\varphi(l) = N_1 e^{\gamma_1 l} + N_2 e^{\gamma_2 l}$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 - 4q}}{2} = -\frac{i\omega}{a} U_{1,2}$$

$$U_{1,2} = [M(1 + h_1) \pm \sqrt{M^2(1 - h_1^2) + 4}] (1 - h_1 M^2)^{-1} \quad (15)$$

$$N_1 = \left(\frac{dp_0}{dl} q \gamma_1 + p_0 q^2 \right) \frac{1}{\gamma_2} (Q^2 + 4q)^{-1/2}$$

$$N_2 = \left(\frac{dp_0}{dl} q \gamma_2 + p_0 q^2 \right) \frac{1}{\gamma_1} (Q^2 + 4q)^{-1/2}$$

Несложными преобразованиями в рассматриваемом частном случае можно получить выражения для изображения давления p_2 и скорости c_2 в конце участка по их значениям в начале p_1 и c_1 .

Эти соотношения можно представить в матричной записи

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

Элементы матрицы A определяются следующим образом:

$$A_{11} = \frac{(1 + MU_1) U_2 e^{-ikU_2 l} - (1 + MU_2) U_1 e^{-ikU_1 l}}{U_2 - U_1}$$

$$A_{12} = \frac{U_1 U_2 (e^{-ikU_2 l} - e^{-ikU_1 l})}{U_2 - U_1}$$

$$A_{21} = \frac{(1 + MU_2)(1 + MU_1)(e^{-ikU_1 l} - e^{-ikU_2 l})}{U_2 - U_1}$$

$$A_{22} = \frac{U_2(1 + U_1 M)e^{-ikU_1 l} - U_1(1 + U_2 M)e^{-ikU_2 l}}{U_2 - U_1} \quad (16)$$

Для определения общего решения при \bar{c} , h_1 и h_2 , зависящих от l , необходимо вычислять ряд Неймана.

Вычисления повторных итераций ядра встречают практические затруднения. Кроме того, решение в виде ряда не дает наглядного представления результата. Поэтому воспользуемся решением при постоянных \bar{c} , h_1 и h_2 . Выбираем по длине l участки, на которых $Q(l)$ и $q(l)$ мало изменяются. На каждом из этих участков можно выписать решение в форме (16). Остается произвести стыковку решений на отдельных участках.

Поскольку стыковка решений проводится при длине $\Delta l = 0$, можно воспользоваться стационарными уравнениями движения и неразрывности (4). Линеаризуя (4) и обозначая параметры в начале разрыва индексом 1, а в конце — индексом 2, получим

$$\frac{p_2'}{\bar{\rho}_2} - \frac{p_1'}{\bar{\rho}_1} = c_1' \bar{c}_1 h_{11} - c_2' \bar{c}_2 h_{12}$$

$$\frac{c_1'}{\bar{c}_1} + \frac{1}{\kappa} \frac{p_1'}{\bar{p}_1} = \frac{c_2'}{\bar{c}_2} + \frac{1}{\kappa} \frac{p_2'}{\bar{p}_2} \quad (17)$$

В матричной форме (17) можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}' & A_{12}' \\ A_{21}' & A_{22}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}' = \frac{\bar{\rho}_2}{\bar{\rho}_1} \left(1 - \frac{a_2^2}{a_1^2} h_{12} M_2^2 \right) (1 - h_{12} M_2^2)^{-1}$$

$$A_{12}' = \frac{\bar{\rho}_2}{\rho_1 a_1} M_1 \left(h_{11} - \frac{a_2^2}{a_1^2} \frac{M_2^2}{M_1^2} h_{12} \right) (1 - h_{12} M_2^2)^{-1} \quad (18)$$

$$A_{21}' = \frac{1}{\rho_1 a_1} \frac{a_2}{a_1} M_2 \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) (1 - h_{12} M_2^2)^{-1}$$

$$A_{22}' = \frac{a_2}{a_1} \frac{M_2}{M_1} \left(1 - h_{12} \frac{a_1^2}{a_2^2} M_1^2 \right) (1 - h_{12} M_2^2)^{-1}$$

а двойными индексами у h отмечены значения параметра h_1 соответственно до и после разрыва. Матрица $[A']$ позволяет рассчитать параметры потока при квазистационарном течении.

Для определения параметров c и p в конце заданного интервала, состоящего из ряда участков с постоянными значениями \bar{c} и h_1 , по значениям параметров в начале интервала необходимо перемножить матрицы $[A]$ и $[A']$ по обычному правилу. Для n разрывов необходимо провести $2n - 1$ перемножений

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = [A_{2n-1}] \dots [A_1'] [A_1] \begin{bmatrix} p_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} p_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

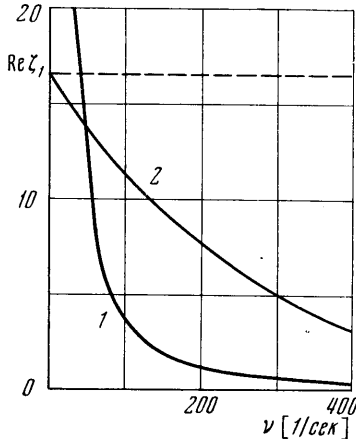
Обычно в расчетах задается импеданс по осевой составляющей скорости (нормальный импеданс)

$$\zeta = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{a}} \frac{p}{c_a} \quad (c_a = c \sin \alpha) \quad (20)$$

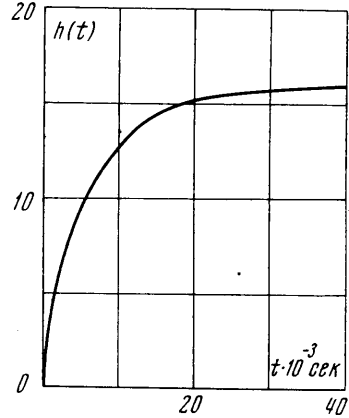
Линеаризация (20) с учетом (6) дает

$$c_a' = c'h_3 \quad (h_3 = \sin \bar{\alpha} + \cos \bar{\alpha} \sin (\beta - \bar{\alpha})) \quad (21)$$

При использовании матрицы $[\delta]$ могут быть рассчитаны динамические характеристики вращающихся и неподвижных решеток.



Фиг. 1



Фиг. 2

Если задан нормальный входной импеданс, то с использованием элементов матрицы $[\delta]$ и соотношения (21) можно определить передаточную функцию по давлению

$$F_p = p_2 / p_1 = \delta_{11} + \delta_{12} / \zeta_1 \quad (22)$$

передаточную функцию по скорости

$$F_c = c_2 / c_1 = \delta_{12} \zeta_1 + \delta_{22} \quad (23)$$

и нормальный выходной импеданс

$$\zeta_2 = \frac{\overline{\rho_1 a_1}}{\rho_2 a_2} \frac{1}{h_3} \left[\frac{\delta_{11} \zeta_1 + \delta_{12}}{\delta_{21} \zeta_1 + \delta_{22}} \right] \quad (24)$$

Если задан выходной импеданс, то предварительно рассчитывается величина ζ_1 по формуле

$$\zeta_1 = \left(\delta_{12} - \frac{\overline{\rho_2 a_2}}{\rho_1 a_1} h_3 \zeta_2 \delta_{22} \right) \left(\frac{\overline{\rho_2 a_2}}{\rho_1 a_1} h_3 \zeta_2 \delta_{21} - \delta_{11} \right)^{-1}$$

а затем рассчитываются передаточные функции по формулам (22) и (23).

Рассмотрим в качестве примера динамические характеристики неподвижной ($h_1 = 1$) и вращающейся решеток. Средняя линия канала имела длину $l = 0.04$ м. Средняя скорость изменялась по длине канала ($M_1 = 0.3$, $M_2 = 1$). На выходе из решеток критический режим истечения, поэтому из двух волн (прямой и отраженной), определяемых экспоненциальными множителями $\exp(-ikl / (1 - M))$ и $\exp(ikl / (1 + M))$ остается только одна и выходной импеданс ζ_2 в рассматриваемом случае $\zeta_2 = 1$.

На фиг. 1 приведена зависимость действительной части входного импеданса вращающейся (1) ($\alpha_1 = 30^\circ, \beta_1 = 90^\circ, \beta_2 = 125^\circ, \alpha_2 = 90^\circ$) и неподвижной (2) решеток от частоты. На этой же фигуре пунктиром приведено значение входного импеданса при квазистационарном истечении из неподвижной решетки

$$\zeta_1 = \frac{2}{(\kappa - 1)M_1} \tag{25}$$

Значение ζ_1 по (25) получается сразу, если решить систему (18) при $h_1 = 1$, и совпадает со значением, приведенным в [5]. Из фиг. 1 видно, что учет волновых свойств и изменение энергии потока оказывают существенное влияние на зависимость $\zeta_1 = \zeta(\nu)$. Значение ζ_1 , получаемое при квазистационарном решении, показывает, что входной импеданс неподвижной решетки при $\zeta_2 = 1$ близок к так называемому «закрытому концу». С учетом волновых явлений значение ζ_1 существенно ниже значения, полученного из квазистационарного решения.

Если во входном сечении задано возмущение скорости в виде единичной функции, то отклик по давлению $h(t)$ (переходная функция) находится из известного выражения

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{Re}(\zeta_1) \sin \omega t}{\omega} d\omega \tag{26}$$

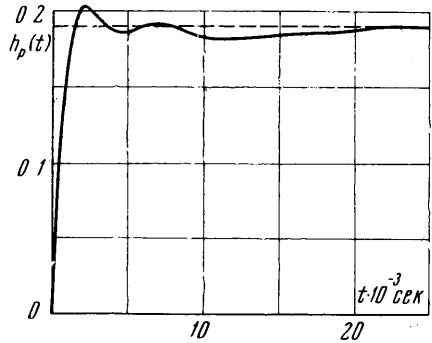
Величина $h(t)$ определялась для неподвижной решетки приближенным графоаналитическим способом (см. [6]). На фиг. 2 приведена переходная функция для рассмотренного примера.

Как известно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \zeta(\omega)$$

На фиг. 2 пунктиром приведено предельное значение $h(t)$. Как видно из фиг. 2, при времени $t > 20 \cdot 10^{-3}$ сек можно пользоваться квазистационарным решением.

Если в формуле (26) вместо $\text{Re}(\zeta_1)$ подставить $\text{Re}(F_p)$, то получим переходную функцию по давлению $h_p(t)$. Зависимость $h_p(t)$ приведена на фиг. 3. При входном воздействии в виде единичной функции по давлению установившееся значение давления в выходном сечении достигается практически уже при $t > 5 \cdot 10^{-3}$ сек. Пунктиром на фиг. 3 приведено квазистационарное значение $h_p(t) = 0.19$, которое равно значению коэффициента усиления давления. При критическом истечении из неподвижной решетки происходит существенное ослабление колебаний в выходном сечении по сравнению с входным.



Фиг. 3

Поступило 8 XII 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Казакевич В. В. Автоколебания (помпаж) в вентиляторах и компрессорах. М., Машгиз, 1959.
2. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. М., Гостехиздат, 1946.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Изд. 5. М., Гостехиздат, 1955.
4. Привалов И. И. Интегральные уравнения. М.—Л., ОНТИ, 1937.
5. Крокко Л., Чжень Синь-и. Теория неустойчивости горения в жидкостных ракетных двигателях. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
6. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.