

УДК 533.6.011

РАСЧЕТ ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

А. Д. РЫЧКОВ

(Томск)

Методом установления получено в осесимметрической постановке численное решение задачи о движении закрученного потока идеального газа в сопле Лавалья. В результате выявлен ряд существенно неоднородных эффектов, в частности эффект втягивания звуковой линии в сопло, что приводит к уменьшению его коэффициента расхода. Получена зависимость изменения этого коэффициента от интенсивности закрутки.

Ряд проблем, связанных с регулировкой расхода газа через сопло Лавалья и с изменением тяги сопла, может быть успешно решен, если потоку газа, истекающего из сопла, придать вращательное движение. Исследования такого закрученного течения в [1, 2] и ряде других работ, основываются на одномерной модели течения газа, что позволяет в основном получить интегральные характеристики течения.

1. Закрученное течение газа, являющееся по сути трехмерным течением, можно рассматривать и в осесимметрической постановке, если все параметры потока (а также и граничные условия) не зависят от угла φ цилиндрической системы координат. Для решения поставленной задачи в данной работе используется метод установления, т. е. стационарное течение газа рассматривается как предельный во времени случай нестационарного, когда все параметры течения уже не зависят от времени.

Система нестационарных уравнений газовой динамики записывается в виде законов сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} y\rho + \frac{\partial}{\partial x} y\rho u + \frac{\partial}{\partial y} y\rho v &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} yM + \frac{\partial}{\partial x} yMu + \frac{\partial}{\partial y} yMv + \frac{\partial}{\partial x} yp &= 0 \quad (p = \varepsilon(k-1)) \\ \frac{\partial}{\partial t} yN + \frac{\partial}{\partial x} yNu + \frac{\partial}{\partial y} yNv + \frac{\partial}{\partial y} yp - p - \omega\Omega &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} y\Omega + \frac{\partial}{\partial x} y\Omega u + \frac{\partial}{\partial y} y\Omega v + v\Omega &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} y\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} y\varepsilon u + \frac{\partial}{\partial y} y\varepsilon v + p \left[\frac{\partial}{\partial x} yu + \frac{\partial}{\partial y} yv \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь u, v, ω — составляющие вектора скорости по осям x, y, φ цилиндрической системы координат; $M = \rho u, N = \rho v, \Omega = \rho\omega$ — соответствующие количества движения; ρ — плотность; p — давление; ε — удельная внутренняя энергия на единицу объема газа; k — показатель адиабаты.

Течение газа, описываемое системой (1.1), рассматривается в области $F\{0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq \delta(x), t \geq 0\}$, где граница $y = \delta(x)$ задается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(r_0 + r_*) + \frac{1}{2}(r_0 - r_*) \cos(\pi x/x_*) & (0 \leq x \leq x_+) \\ y_+ + B_+(x - x_+) & (x_+ \leq x \leq L) \end{cases} \quad (1.2)$$

т. е. представляет собой косинусоидально-коническое сопло.

Здесь r_0 — радиус входного сечения сопла, r_* — радиус критического сечения, x_* — абсцисса критического сечения, x_+ — точка сопряжения косинусоиды с прямой, B_+ — тангенс угла наклона прямой к оси x , y_+ — ордината $y = \delta(x_+)$, соответствующая точке сопряжения x_+ .

Система (1.1) имеет гиперболический тип, и поэтому вопрос о постановке граничных условий должен решаться с точки зрения ее характеристических свойств. При этом поведение бихарактеристических коноидов на границах области позволяет выяснить, сколько граничных условий должно быть задано на той или иной границе, конкретный же вид граничных условий определяется из физических соображений.

Для рассматриваемой области течения газа F оказывается, что на входе в сопло должны быть заданы четыре граничных условия, на границе области $y = \delta(x)$, предполагаемой непроницаемой, — одно. Решение вопроса о граничных условиях на срезе сопла зависит от того, выполняется ли здесь неравенство $u(L, y, t) > a$ (где a — местная скорость звука). Если неравенство имеет место для всех $t \geq 0$, что соответствует сверхзвуковому режиму течения газа, то граничных условий задавать не нужно. В случае же дозвукового течения в закрученном потоке может иметь место перетекание газа в сопло из окружающей среды [2], поэтому количество граничных условий зависит от направления течения газа.

В данной работе рассматривается только надкритический режим работы сопла, когда на его срезе $u(L, y, t) > a$ для $t \geq 0$.

Граничные условия задавались следующими:

$$\begin{aligned} 0 \leq y \leq \delta(0), \quad x = 0 & \quad (1.3) \\ M(0, y, t) = C_1, \quad N(0, y, t) = 0 & \quad (C_1 = \text{const}) \\ H_0(0, y, t) = C_2, \quad \omega(0, y, t) = \omega_1 y / \delta(0) & \quad (C_2, \omega_1 = \text{const}) \end{aligned}$$

(H_0 — энтальпия торможения)

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq L, \quad y = 0 \\ \partial \rho / \partial y = \partial M / \partial y = \partial \varepsilon / \partial y = 0, \quad N(x, 0, t) = 0 \\ 0 \leq x \leq L, \quad y = \delta(x) \\ N(x, \delta(x), t) = M(x, \delta(x), t) \frac{d}{dx} \delta(x) \end{aligned}$$

Константа C_1 в (1.3) выбирается таким образом, чтобы на срезе сопла для $t \geq 0$ осуществлялся сверхзвуковой режим течения. Тогда в соответствии с изложенным выше граничных условий задавать не нужно.

Далее вводятся новые независимые переменные

$$x_1 = x, \quad \xi = y / \delta(x), \quad \tau = t$$

переводящие криволинейную область F в прямоугольную $\Phi \{0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq \xi \leq 1, \tau \geq 0\}$. При этом якобиан преобразования $J = D(x, y) / D(x_1, \xi) \neq 0$. Тогда, умножая все уравнения системы (1.1) на J , после несложных преобразований можно записать (1.1) в новых переменных по-прежнему в форме законов сохранения. Удобно также перейти в (1.1) и (1.3) к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} u_2 = u / a_*, \quad v_2 = v / a_*, \quad \omega_2 = \omega / a_*, \quad \rho_2 = \rho / \rho_0 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon / \varepsilon_0, \quad x_r = x_1 / r_*, \quad \tau_2 = \tau a_* / r_* \end{aligned}$$

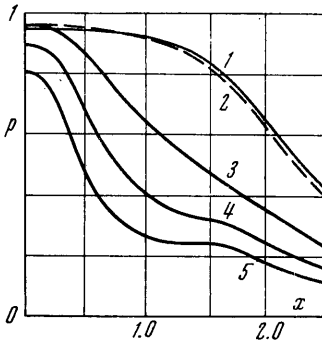
Здесь a_* — критическая скорость звука; ρ_0, ε_0 — параметры торможения.

Тогда (1.1) запишется (индекс 2 опускается)

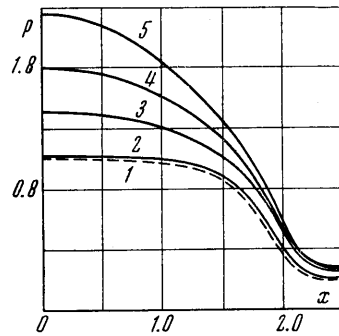
$$\frac{\partial}{\partial \tau} \xi \delta^2 \rho + \nabla \xi \delta \rho W = 0 \quad (W = \delta u i + (v - \xi \delta_x u) j)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} \xi \delta^2 M + \nabla \xi \delta M W + \frac{\partial}{\partial x} \xi \delta^2 B p - \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \delta \delta_x B p &= 0 & \left(\delta_x = \frac{d\delta(x)}{dx} \right) \\
 \frac{\partial}{\partial \tau} \xi \delta^2 N + \nabla \xi \delta N W + \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \delta B p - \delta \omega \Omega &= 0 & (p = \varepsilon(k-1)) \\
 \frac{\partial}{\partial \tau} \xi \delta^2 \Omega + \nabla \xi \delta \Omega W + \delta \nu \Omega &= 0 & \left(\nabla = \frac{\delta}{\delta \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{j} \right) \\
 \frac{\partial}{\partial \tau} \xi \delta^2 \varepsilon + \nabla \xi \delta \varepsilon W + p \nabla \xi \delta W &= 0. & \left(B = \frac{k+1}{2k} \right)
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

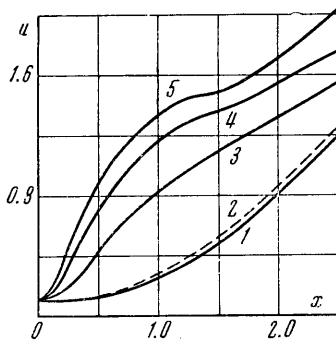
В качестве начальных условий для (1.4) выбирались результаты решения этой же задачи в стационарной постановке. При этом использовался



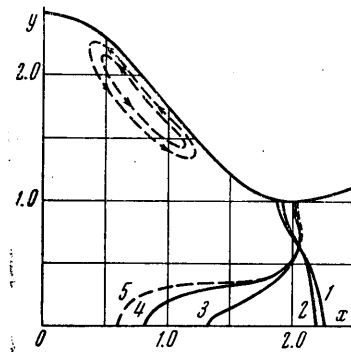
Фиг. 1. 1 — $\omega_1 = 0$, 2 — $\omega_1 = 0.12$, 3 — $\omega_1 = 0.4$, 4 — $\omega_1 = 0.5$, 5 — $\omega_1 = 0.6$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

метод, изложенный в [3], сущность которого заключается в том, что все величины в системе уравнений Эйлера, описывающей стационарное закрученное течение, аппроксимируются полиномами по степеням ξ с учетом их четности и нечетности. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений решалась численно. Для корректности задачи использовалось условие регулярности решения в особых точках.

Численное решение системы (1.4) осуществлялось при помощи метода конечных разностей. Выбранная разностная схема [4] имела второй порядок точности на гладких решениях и позволяла вести сквозной счет ударных волн, которые могут возникать в процессе установления.

2. Рассчитывалось изэнтальпическое течение в косинусоидально-коническом сопле (1.2) при $r_* = 1.0$, $r_0 = 2.5$, $x_* = 2.0$, $x_+ = 2.2$, $L = 2.5$ со следующими значениями безразмерных констант в (1.3):

$$C_1 = 0.0996, \quad C_2 = 5.0, \quad \omega_1 = 0, 0.04, 0.08, 0.12, 0.4, 0.5, 0.6$$

При $\omega_1 = 0.04, 0.08$ течение еще слабо отличается от незакрученного, но затем влияние закрутки быстро нарастает. Так, распределение давления вдоль оси сопла приведено на фиг. 1, при этом кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям $\omega_1 = 0, 0.12, 0.4, 0.5, 0.6$; распределение вдоль стенки $y = \delta(x)$ (приведено на фиг. 2) свидетельствует о значительном перепаде давления поперек сопла, особенно на его входном участке. Обозначения на фиг. 2, как и на всех остальных, те же, что и на фиг. 1. Резкое изменение давления на стенке сопла в расширяющейся части связано с поджатием потока вследствие разрыва второй производной в точке сопряжения косинусоиды с прямой. Этот эффект отмечается также в работах [5, 6].

По мере роста ω_1 , т. е. с увеличением интенсивности закрутки потока, давление вдоль оси сопла весьма быстро падает (фиг. 1), скорость, соответственно, быстро нарастает (фиг. 3). При $\omega_1 \geq 0.4$ скорость газа на оси сопла в критическом сечении значительно превышает скорость звука, что совпадает с результатами работы [2]. На фиг. 4 приведено положение линий $q = a (q = \sqrt{u^2 + v^2})$, которые для стационарной системы уравнений являются линиями параболы. Стационарный закрученный поток обладает свойствами сверхзвукового незакрученного потока только при $q > a$ (система уравнений меняет свой тип на гиперболический); по аналогии будем называть линии $q = a$ звуковыми линиями.

Все звуковые линии имеют точки перегиба, так как выполняется неравенство $R_s / r_* = 0.541 < 1$, где R_s — радиус кривизны стенки сопла в критическом сечении. Достаточность этого условия показана в [7]. По мере увеличения интенсивности закрутки линии втягиваются в сопло, что уменьшает его коэффициент расхода. При $\omega_1 \geq 0.5$ вблизи оси сопла наблюдается торможение сверхзвукового потока (фиг. 1, 3).

Это торможение связано с тем, что линии тока, проходя через звуковую линию (фиг. 4), имеют достаточно большой угол наклона к оси сопла.

Поэтому их разворот уже в сверхзвуковой области течения и приводит к торможению потока. При $\omega_1 \geq 0.4$ у стенки сопла в дозвуковой его части возникает зона возвратного течения газа. Возможность существования подобных зон подтверждается экспериментами [8]. На фиг. 4 такая зона изображена пунктирными линиями и соответствует $\omega_1 = 0.4$.

Определялось также изменение коэффициента расхода сопла в зависимости от интенсивности закрутки потока. Расход газа через сопло вычислялся по следующей формуле (течение изэнтальпическое) (φ — коэффициент расхода).

$$G = \varphi \sqrt{k} \left(\frac{2}{k+1} \right)^\gamma \left(\frac{RT_0}{g} \right)^{-1/2} \int_0^{\delta(0)} p y dy \quad \left(\gamma = \frac{k+1}{2(k-1)} \right)$$

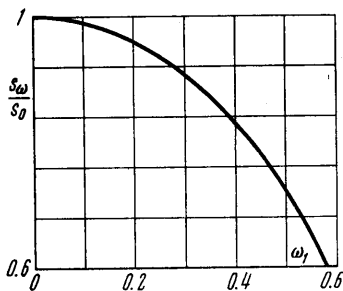
Приравнивая расходы в закрученном и незакрученном течениях, получаем

$$\frac{\varphi_\omega}{\varphi_0} = \left(\int_0^{\delta(\omega)} p y dy \right)_0 / \left(\int_0^{\delta(0)} p y dy \right)_0$$

Здесь индексом ω отмечены величины для закрученного потока и индексом 0 — для незакрученного. Отношение $\varphi_\omega / \varphi_0$ в зависимости от ω_1 представлено на фиг. 5.

3. Некоторые особенности закрученного течения, в частности поведение звуковой линии, можно высчитать при непосредственном рассмотрении системы уравнений газодинамики, описывающей стационарное закрученное течение. Полагая в (1.1) $\partial / \partial t \equiv 0$ и учитывая, что течение изэнтальпическое, запишем уравнение неразрывности в следующем виде:

$$(a^2 - u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - uv \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + (a^2 - v^2) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y} (\omega^2 + a^2) = 0 \quad (3.1)$$



Фиг. 5

Теперь покажем, что по мере роста интенсивности закрутки потока знак кривизны звуковой линии меняется с положительного (при $\omega = 0$) на отрицательный, т. е. звуковая линия обращается своей выпуклостью вверх по потоку.

Записывая (3.1) на оси сопла ($y = 0, v = \omega = 0$), убеждаемся, что $\partial v / \partial y = 0$ в звуковой точке, где $u = a$. Далее, дифференцируя третье уравнение в (1.1) (при $\partial / \partial t = 0$) по переменной y , имеем на оси сопла

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 - u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad (3.2)$$

Из уравнения Бернулли, дифференцируя его по y и учитывая симметрию течения при $y = 0$, получаем, что

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = -q \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \quad (q^2 = u^2 + v^2)$$

Подставив это выражение в (3.2), имеем

$$\frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{1}{q} \left[u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - 3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

Из (3.1) можно получить, что в звуковой точке $\partial^2 v / \partial x \partial y > 0$. Следовательно, в (3.3) при достаточно большом члене $\partial \omega / \partial y$ будет иметь место неравенство $\partial^2 q / \partial y^2 < 0$ и звуковая линия обращается выпуклостью вверх по потоку.

Аналогично можно показать, что с ростом интенсивности закрутки звуковая точка на стенке сопла перемещается в сторону расширяющейся его части.

Полученные качественные результаты подтверждают результаты расчетов (фиг. 4).

4. При расчетах использовалась разностная сетка размером 50×10 в плоскости $x\xi$. Установление течения наступало приблизительно через 2000 шагов по времени, для чего требовалось 20 мин на ЭВМ БЭСМ-6. Результаты расчетов течения с вдвое меньшим количеством узлов разностной сетки дают отличие в параметрах не более 3%. Кроме того, вычислялись интегральные законы сохранения массы, полного импульса и полной энергии. Точность выполнения указанных законов сохранения составляла соответственно 0,6, 0,08 и 0,7%.

Поступило 28 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Гостинцев Ю. А. Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
2. Lewellen W. S., Burns W. I., Strickland H. I. Transonic swirling flow. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7.
3. Рычков А. Д. Численный расчет установившегося осесимметрического течения газа. Сб. «Труды НИИ ПММ», отдельный выпуск, 1970, Изд-во Томск. гос. ун-та.
4. Нох В. Ф. СЭЛ — совместный эйлерово-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. Сб. «Вычислительные методы в гидродинамике», М., «Мир», 1967.
5. Back L. H., Cuffel R. F. Direction of oblique shock in a conical nozzle with a circular — arc throat. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 12.
6. Cuffel R. F., Back L. H., Massier P. F. Transonic flow flied in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7.
7. Hopkins D. F., Hill D. E. Effect of small radius of curvature on transonic flow in axisymmetric nozzles. AIAA Journal, 1966, vol. 3, No. 3.
8. Dunlap R. An investigation of the swirling flow in a spinning end — burning rocket. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 12.